Empl.
Gr. 1 HR

Lycée Buffon

Revue de Mathématiques spéciales

1902-1904

# REVUE

DE

# MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Math.
68

# REVUE

DE

# MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

RÉDIGÉE PAR MM.

**E. HUMBERT**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

ET

**G. PAPELIER**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLÉANS

AVEC LA COLLABORATION DE MM.

**N. CHARRUIT,**
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE LYON

**E. DESSENON,**
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

**P. LAMAIRE,**
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU COLLÈGE CHAPTAL

**CH. RIVIÈRE,**
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE SAINT-LOUIS

**H. VUIBERT,**
RÉDACTEUR DU *Journal de Mathématiques élémentaires.*

## TOME SEPTIÈME

ANNÉES 1902-1903 & 1903-1904

13 14

291730/9 33
30

PARIS
VUIBERT ET NONY, ÉDITEURS
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

QA
1
R486
Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat13pari

# TABLE DES MATIÈRES

## ANNÉES 1902-1903 ET 1903-1904


Nos des questions. — Pages

### ALGÈBRE

1090 Etude de la série $u_n = \frac{1}{nq^2}$, $q$ désignant le nombre des chiffres de $n$ . . . . . 4

1089 Trouver un polynome du troisième degré tel qu'en le multipliant par un polynome du premier degré on obtienne le carré de sa dérivée . . . . . 24

1099 Etude d'un déterminant . . . . . 25

1091 Résolution d'un système d'équations . . . 35

1093 Exercice sur le polynome du troisième degré . . . . . 49

1106 Sur l'équation réciproque. . . . . 70

1142 Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et la somme des volumes engendrés par le triangle en tournant successivement autour des côtés de l'angle droit . . . . . 96

Discussion de l'équation
$x^6 + 5ax^3 + 10bx^2 + 1 = 0$. . . . 120

Discussion de l'équation
$x^5 + px^3 + qx + r = 0$. . . . . 148

Discussion de l'équation
$x^4 + px^2 + qx + r = 0$ . . . 172

1169 Valeurs réelles de $x$ et $y$ pour lesquelles $(x + yi)^4$ est réel et supérieur à 8. . . . 258

1182 Developper $\frac{L(1+x)}{1+x}$ par la formule de Mac Laurin. . . . . 281

1183 Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant la bissectrice de l'angle droit et le volume engendré par le triangle tournant autour de l'hypoténuse . . . . 283

1184 Etude d'une série. . . . . 291

1170 Conditions pour que les racines de l'équation du quatrième degré soient de la forme $a$, $b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$. . . . . 315

1187 Déterminer une fonction $y$ dont la dérivée est $\frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}$. Étudier cette fonction. . 316

1188 Etudier la fonction $y$ définie par
$e^x - e^y(x-y)^2 = 0$ . . . 317

1190 Variation de la fonction $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$, A, B, C désignant des points fixes et M un point variable d'une droite située dans le plan ABC . . . . . 318

1203 Etude de l'équation
$$x^n + \frac{n^2}{1!\,n}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!\,n^2}x^{n-2} + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!\,n^3}x^{n-3} + \cdots = 0. \quad 397$$

1249 Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant la bissectrice de l'angle droit et la somme des surfaces engendrées par l'hypoténuse en tournant autour des côtés de l'angle droit. . . . . 543

1250 Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant la hauteur relative à l'hypoténuse et la somme des volumes engendrés par le triangle tournant autour des côtés de l'angle droit. . . . . 562

### GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS

1111 Propriété du triangle équilatéral . . . . . 72

1151 Triangle et cercles : propriétés . . . . . 127

1176 Par les extrémités d'une corde AB inscrite dans un cercle et de grandeur constante on mène deux droites parallèles à des directions fixes. Lieu du point de rencontre. . . . . 324

1207 Enveloppe d'une corde d'un cercle telle que les droites joignant les extrémités à deux points fixes se coupent sur le cercle . . 411

1251 Lieu des pieds des bissectrices de l'angle A d'un triangle MAB dans lequel AB est fixe et l'angle M constant. . . . . 586

1110 Exercices sur des cercles variables. . . . . 51

1235 Cercle fixe, A point fixe, PP′ et QQ′ couples de points diamétralement opposés. Enveloppe des droites PQ lorsque les couples de droites AP, AP′ et AQ,AQ′ ont mêmes bissectrices. . . . . 586

1149 Sur des triangles homologiques . . . . . 198

1171, 1197 Lieu des centres de similitude de cercles variables. . . . . 259, 361

1165 Par le point de contact de deux cercles tangents et par un point fixe de la ligne des centres on fait passer un cercle variable rencontrant les cercles fixes en M et M′. Enveloppe de MM′ . . . . . 186

1229 Cercle variable passant par deux points fixes et droite passant par l'un d'eux. Lieux et enveloppe . . . . . 494

1244 Enveloppe d'un segment dont les extrémités glissent sur deux droites fixes et qui est vu d'un point fixe sous un angle droit. . 517

1230 Cercle, points sur un même diamètre, droite perpendiculaire à ce diamètre. Lieux géométriques . . . . . 563

1245 Droites Δ et Δ′, points A et A′, M et M′ points variables sur les droites tels que $\frac{AM}{A'M'} = k$; lieu du point de rencontre de AM et A′M′, et enveloppe de MM′. . . 565

1198 Variations d'une longueur ; courbe correspondante . . . . . 383

1072 On donne un cercle et un point fixes. Etude d'une correspondance homographique entre deux points. . . . . 4

1189 Etude de la courbe $a = x^y$. . . . . 261

1192 Exercices sur les tangentes à la courbe
$y = \frac{x^3}{x^2-1}$ . . . . . 373

1201 Exercices relatifs à l'hypocycloïde à trois rebroussements . . . . . 378

1254 Par le sommet d'une strophoïde droite et par un point quelconque de la courbe on peut mener deux cercles tangents à la strophoïde ; le cercle passant par le sommet et les contacts enveloppe une cissoïde droite . . . . . 557

1253 Trois cercles passant par le rebroussement d'une cissoïde droite et coupant orthogonalement la courbe en trois points ont même axe radical . . . . . 572

1272 Podaire d'une épicycloïde par rapport au centre du cercle fixe . . . . . 579

1271 On considère deux courbes (A), (B), un rayon issu d'un point fixe O et qui les coupe en A et B; ce rayon coupe en M une troisième courbe (M). Déterminer cette courbe sachant que sa tangente en M est divisée au point M dans un rapport constant par les tangentes en A,B à (A) et à (B), ou par les parallèles à ces mêmes tangentes menées par le pôle. . . . . 576

1096 Enveloppe des cordes d'une conique qui ont leurs milieux sur une droite donnée. Enveloppe des asymptotes d'un faisceau

Nos des questions. Pages.

de coniques bitangentes . . . . . 8
1100 Par quatre points d'une conique passent deux coniques tangentes à chacun des côtés d'un triangle inscrit dans la première. Les six points de contact sont trois à trois en ligne droite. . . . . 9
1098 Exercices sur des ellipses homofocales. . . 26
1107 Polaire réciproque d'un cercle par rapport à une parabole. . . . . 29
1104 Parabole et cercle variable passant par le foyer et tangent. Lieux géométriques . . 38
1112 Exercices divers relatifs à deux coniques quelconques . . . . . 64
1124, 1125 Exercices sur les normales à une ellipse. 66, 68
1114 Lieu des points de concours des tangentes communes à un cercle variable et à une parabole fixe. . . . . 73
1115 Triangles inscrits dans une parabole et circonscrits à une autre parabole. Propriétés.. 74
1126 Problèmes relatifs à une ellipse et à des hyperboles équilatères passant par le centre et deux sommets de l'ellipse . . . 76
1132 On donne un cercle et un point. Enveloppe d'une droite. Lieu des centres et des foyers de coniques . . . . . 94
1127 Propriétés d'une hyperbole relatives à ses asymptotes. . . . . 97
1141 Sur les coniques osculatrices à un cercle. Lieux géométriques. . . . . 98
1146 Lieu des centres des coniques normales à deux droites données en un point donné de chacune d'elles . . . . . 101
1147 Lieu des foyers des coniques normales à deux droites parallèles en un point donné de chacune d'elles. . . . . 102
1148 Il existe quatre cercles tangents à une ellipse et à deux quelconques de ses tangentes. Les points de contact de ces cercles avec l'ellipse sont sur l'hyperbole homofocale à cette ellipse qui passe par le point de rencontre des deux tangentes. . . . . 136
1152 Lieu des foyers des coniques normales aux côtés égaux d'un triangle isocèle en chacun des sommets. . . . . 138
1154 Lieu des centres des ellipses ayant un foyer commun, passant par un point donné et touchant une droite donnée. . . . . 178
1180 Lieu du point de rencontre de la tangente à une ellipse en un point variable et de l'hyperbole d'Apollonius relative à ce point . . . . . 204
1168 Sur les cercles de Joachimstal relatifs à une ellipse. . . . . 244
1172 Sur les coniques inscrites dans un triangle et qui découpent sur une droite un segment vu d'un point sous un angle droit. 248
1181 Lieux relatifs à une parabole. . . . . 284
1196 Lieu des foyers des paraboles de grandeur constante passant par deux points. . . . 286
1193 Les tangentes issues d'un point P à une ellipse rencontrent la directrice relative à un foyer F en A et B. PF est bissectrice de l'angle AFB . . . . . 360
1194 Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse donnée intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales . . . . . 376
1200 Propriétés relatives à deux coniques. . . . 378
1210 Lieux des points de rencontre d'une hyperbole et d'une parabole variables . . . . 385
1213 Quadrilatère fixe, conique inscrite, conique passant par deux sommets et tangente à une diagonale. Propriétés et lieux. . . . 399
1202 Le foyer d'une parabole touchant un cercle et deux tangentes rectangulaires de ce cercle décrit un cercle. . . . . 400

Nos des questions. Pages.

1214 Propriétés des normales à une ellipse. . . 404
1206 Ellipse fixe et cercle variable tangent aux deux axes ; exercices . . . . . 407
1209 Ellipse de foyers F et F', M point variable de l'ellipse. Lieu du centre du cercle des neuf points du triangle MFF' . . . . . 412
1211 Lieu des centres des cercles passant par un des sommets d'une ellipse et tangents à l'ellipse . . . . . 413
1219 Coniques osculatrices à un cercle et tangentes à une droite. Lieux divers . . . . 433
1217 Coniques homofocales tangentes à un cercle. Propriétés. . . . . 450
1218 Propriétés d'une ellipse. . . . . 455
1220 Coniques coaxiales ; enveloppes de droites. 458
1208 Du centre d'une ellipse on abaisse des perpendiculaires sur la tangente et la normale en un point. Enveloppe de la droite joignant les projections. . . . . 490
1234 Sur les coniques admettant pour axes la tangente et la normale en un point variable d'une ellipse . . . . . 507
1248 Le cercle passant par les projections d'un point d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit passe par le centre de la courbe. . . . . 534
1243 Exercices sur une ellipse et son cercle principal. . . . . 542
1276 Lieu du point de rencontre des symétriques du grand axe d'une ellipse par rapport aux tangentes (ou aux normales) menées aux extrémités de deux diamètres conjugués. . . . . 581
1273 Coniques ayant un foyer donné et passant par deux points fixes. Lieu des centres et des sommets. . . . . 588
1274 Exercices sur les tangentes communes à deux paraboles tangentes . . . . . 590

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

1101 Etude d'une surface cubique, lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur une droite variable qui rencontre deux droites fixes. . . . . 59
1167 Enveloppe d'un plan tel que le cône ayant pour sommet le centre d'un ellipsoïde et pour base la section de la surface par ce plan ait un volume donné . . . . . 201
1191 Etude d'une surface réglée . . . . . 354
1212 Lieu du sommet d'un trièdre trirectangle dont deux arêtes rencontrent une parabole en deux points B et C et dont la troisième passe par le pôle de BC. . . . . 401
1247 Etude de la surface lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les plans tangents à une parabole. . . . . 532
1108 Exercices sur l'hyperboloïde à une nappe . 61
1144 Sur le paramètre tangentiel d'un cône . . . 150
1143 Sur les quadriques tangentes à huit plans. Exercices divers . . . . . 173
1153 Sur les sphères bitangentes à un ellipsoïde. 222
1174 Les cônes qui ont leurs sommets sur une quadrique et qui sont circonscrits à une quadrique homothétique et concentrique ont un volume constant . . . . . 251
1173 Lieu des foyers des sections planes des cônes de révolution circonscrits à une quadrique donnée . . . . . 275, 323
1175 Sur les quadriques homofocales. . . . . 294
1185 Exercices relatifs à une quadrique et à des droites. . . . . 297
1186 Sur les quadriques de révolution passant par une ellipse et un cercle . . . . . 351
1228 Exercices sur les normales menées d'un point à l'ellipsoïde . . . . . 499
1235 Etude d'une surface du quatrième ordre . . 527

Nos des questions. Pages.

1252 Sur les paraboloïdes admettant une parabole principale donnée . . . . . 552
1258 Enveloppe du plan d'une ellipse située sur un ellipsoïde et dont le centre décrit une droite. Exercices. . . . . 574

## ÉPURES

1076 Intersection de deux cylindres. Ombres. . 31
1138 Intersection d'un cône et d'un paraboloïde hyperbolique . . . . . 140
1120 Intersection d'une sphère et d'un cylindre. Ombres . . . . . 183
1179 Section plane d'une surface de révolution. 239
1160 Intersection d'un tore et d'un cône . . . . 388
1225 Ombres d'un tronc de cône entaillé par un paraboloïde . . . . . 427

## MÉCANIQUE

1109 Sur les côtés d'un polygone plan et fermé on construit dans un même sens de rotation des triangles semblables entre eux ; leurs sommets forment un autre polygone qui a même centre de gravité que le premier . . . . . 63
1204 Mouvement uniforme d'un point sur une parabole. . . . . 364
1205 Mouvement d'un point sur une parabole de manière que l'hodographe soit une autre parabole . . . . . 366
1215 Mouvement d'un point sur une parabole de façon que la projection sur l'axe ait un mouvement uniforme. Exercices divers. 459
1216 Mouvement d'un point sur une parabole connaissant la projection de l'accélération sur l'axe ou sur la tangente au sommet. . . . . 461

## PHYSIQUE

1024 Exercice sur la dilatation de deux liquides placés dans un tube en U. . . . . 11
1113 Exercice sur la chaleur latente de fusion et de vaporisation . . . . . 42
1195 Projectile arrêté par une plaque de blindage. Température produite par le choc. 326
802 Exercice sur la pesanteur . . . . . 69
1155 Sur la variation de température et de la lecture barométrique . . . . . 300
1199 Sur une cloche cylindrique flottant sur l'eau. 387
1278 Exercice sur la machine de Linde. . . . . 584
1123 Exercice d'optique relatif à un prisme. . . 152
1150 Calcul de la différence de vitesse de la lumière rouge et de la lumière violette dans l'air. . . . . 278

# NOTES ET COMMUNICATIONS

Question d'algèbre relative aux polynomes réciproques et identiques à leurs transformés en $1 - x$, par M. Lelieuvre . . . . . 1
Sur l'emploi de la méthode expérimentale dans l'étude des Sciences mathématiques, par M. Souls. . . . . 2
Sur la méthode des racines égales, par M. A. Tresse. . . . . 33
Sur la formule de Taylor et la formule du binome, par M. A. Tresse. . . . . 57
Sur la methode d'élimination d'Euler, par M. Vogt . . . . . 105
Sur le calcul du nombre $\pi$. . . . . 193
Note sur la règle à calculs. . . . . 196
Sur l'expression $\sqrt[3]{A} + \sqrt{B}$, par M. G. Fontené. 321
Sur les dérivées de la fonction $x^p f(Lx)$, par M. G. Fontené . . . . . 350
Note de géométrie, par M. T. Lemoyne . . . . . 147
Note sur le théorème de M. Faure, par M. J. Franceschini . . . . . 170
Sur les cercles harmoniquement circonscrits à à une conique, par M. R. Bouvaist. . . . . 171
Note sur deux problèmes relatifs aux coniques, par M. Bouvaist . . . . . 242
Sur une construction du centre de courbure en un point d'une conique, par M. Bouvaist . . . 449
Note sur l'homologie, par M. Pierre Sicard . . 129
Leçon sur la transformation par polaires réciproques. . . . . 217
Sur une application de la transformation par inversion, par M. R. Bouvaist . . . . . 243
Sur les transformations homographiques, par M. L. Bickart . . . . . 369
Une leçon sur l'involution, par M. Ch. Michel. . 345
Sur les coniques considérées comme courbes unicursales, par M. Ch. Michel. . . . . 393, 417
Sur les triangles inscrits et circonscrits (ou conjugués) à deux coniques, par M. Ch. Michel . . 497
Note sur les coniques d'un réseau, par M. L. Bickart. . . . . 83
Démonstration pour les polygones de Poncelet, par M. G. Fontené. . . . . 57
Triangles inscrits dans une conique et dont deux côtés touchent deux autres coniques, par M. Mathieu Weill . . . . . 545
Sur les courbes algébriques, par M. J. Richard. . 81
Note sur une cubique, par M. A. Vacquant. . . . 145
Note sur une cubique, par M. A. Sainte-Laguë . . 244
Théorèmes sur les cubiques planes, par M. J. Richard. . . . . 289
Théorèmes relatifs aux cubiques planes, par M. Labrousse . . . . . 322
Sur certaines quartiques unicursales, par M. Leconte. . . . . 473
Sur les courbes unicursales du quatrième degré, par M. J. Richard . . . . . 569
Note de géométrie à trois dimensions, par M. Leconte . . . . . 169
Sur la cubique gauche équilatère, par M. H. Deroide. . . . . 241
Sur l'équation en S . . . . . 265
Sur les tétraèdres inscrits à une quadrique et circonscrits à une autre, par M. G. Fontené . . . 521
Questions d'examen, par M. R. Bouvaist (surfaces de révolution passant par l'intersection de deux surfaces de révolution données). . . . 571
Un principe de statique, établi par la méthode de Lagrange, par M. J. Richard . . . . . 441

## BIBLIOGRAPHIE

Œuvres mathématiques de Francesco Brioschi. 56
Œuvres mathématiques de Eugenio Beltrami. . 56
Evaluation numérique des grandeurs géométriques, par J. Pionchon. . . . . 167
Éléments de mathématiques supérieures, par H. Vogt. . . . . 168
Cours de mécanique, par Ch. Michel . . . . . 368
Traité de géométrie, par C. Guichard. . . . . 391
Précis d'algèbre et de trigonométrie, par G. Papelier. . . . . 416
La Mécanique, exposé historique et critique de son développement, par Ernst Mach . . . . . 439

# EXAMENS ET CONCOURS


**Agrégation des Sciences Mathématiques.**

1902. . . . . 110. | 1904. . . 559.
1903. . . . . 279, 522. |

**Concours général de Mathématiques spéciales.**

1902. . . Mathématiques. 83, 89.
Physique. . . . 117.
Chimie. . . . . 119.
1903 (*). . Mathématiques. 226, 428, 443.
Physique. . . . 227, 481.
Chimie. . . . . 227, 482.

**Bourses de Licence.**

1902. . . Mathématiques. 113.
Physique. . . . 180.
1903. . . Mathématiques. 253, 479.
Physique. . . . 253, 449, 450.
1904. . . Mathématiques. 560.
Physique. . . . 561.

**Concours généraux de Belgique.**

1902. . . . 32. | 1903. . . . 343.

ÉCOLES

**Ecole Normale Supérieure.**

1902. . 131. | 1904. . . . 539, 561.
1903. . 229, 254, 445, 509. |

**Ecole Polytechnique.**

1902. . 91, 182, 252. | 1904. . . . 538.
1903. . 227, 422, 425. |

**Ecole Centrale.**

1901. . . 2e session. . . 30.
1902. . . 1re session. . . 122, 126, 139, 159, 161, 206, 319.
2e session. . . 54, 230, 233, 262, 336, 340, 387.
1903. . . 1re session. . . 263, 484, 486, 487, 489, 541.
2e session. . . 340, 510, 512, 515, 516.
1904. . . . . 566.

**Ecole des Ponts et Chaussées.**

1902. . . Cours spéciaux. 48.
Cours préparatres 55, 255, 257.
1903. . . Cours spéciaux. 344.
Cours préparatres 342.

**Ecole des Mines de Saint-Étienne.**

1902. . . . . 103, 234, 238, 319.
1903 . . . . . 414.

**Ecole Nationale Supérieure des Mines.**

1903. . Cours préparatres. . 335, 547, 551.

**Ecole Militaire de Belgique** (*artillerie et génie*).

1902. . . . . 79.
1903. . . . . 389.


# EXAMENS ORAUX


**Ecole Normale Supérieure.**

1902. . . . . 155, 184.

**Ecole Polytechnique.**

1902. . . . . 12, 43.
1903. . . . . 301, 327.

**Ecole Centrale.**

1902. . . . . 162, 206.
1903. . . . . 436, 464.

**Ecole des Mines de Saint-Étienne.**

1902. . . . . 142.
1903. . . . . 519.


(*) A partir de l'année 1904, le concours général a été supprimé.

# NOMS D'AUTEURS


ABRAMESCU (N.), 159, 336, 398, 439, 592.
BARISIEN (E.-N), 28, 32, 80, 104, 144, 167, 216, 240, 264, 284, 288, 320, 368, 382, 391, 416, 471, 496, 592.
BELTRAMI (Eugenio), 56.
BICKART (L.), 24, 64, 83, 158, 201, 360, 369, 382, 432.
BOREL, 156.
BOUDEVILLE, 83.
BOURNIQUE, 317.
BOUVAIST (R.), 67, 69, 98, 101, 137, 138, 159, 171, 242, 243, 259, 281, 286, 315, 318, 319, 326, 413, 499, 538, 543, 558, 566, 571, 586, 590.
BRIOSCHI (Francesco), 56.
C. (N.), 31, 142, 184, 240, 389, 428.
C. (T.), 368.
CANET (P.), 286, 316.
CHOLLET (T.), 113, 137.
CLAPIER, 167.
COMBETTE, 162, 163, 166, 436, 438.
COTTON, 157.
DEMEUNYNCK (J.), 166, 192, 457, 471, 520.
DEROIDE (H.), 241.
DNALLOR-LECRAM, 496, 590.
DUFAUT (J.-D.), 449.
DULIMBERT (G.), 9, 37, 60, 248.
FEUCHOT, 575.
FONTENÉ (G.), 57, 321, 350, 521.
FRANCESCHINI (J.), 100, 117, 170.
GOUILLY, 206, 209, 464, 466.
GOURDEL (G.), 186, 400.
GUICHARD (C.), 391.
H. (E.), 49, 167, 168, 186, 216, 222, 275, 336, 382, 392, 416, 440, 483, 510.
HAAG (J.), 4, 30, 53, 60, 61, 67, 71, 74, 78, 96, 98, 117, 139, 180, 205, 226, 262, 276, 278, 288, 301, 354, 365, 385, 400, 410, 411, 412, 414, 425, 489, 496, 516, 519, 527, 534, 543, 557, 558, 566, 587, 590, 592.
HECKER (R.), 119.
HELITAS (Gilbert), 64.
HIOUX (V.), 56, 192, 494.
HOUDINIÈRE, 537.
JANOSY (J.), 584.
JAVELOT (R.), 180.
L. (P.), 125, 127, 161, 162, 232, 234, 238, 257, 258, 339, 340, 485, 487, 490, 512, 514.
L. (T.), 280, 314, 540.
LABROUSSE, 322.
LAURENCE (M.), 53, 136, 154.
LECONTE (T.), 122, 137, 169, 240, 473.
LEFÈVRE (H.), 481.
LELIEUVRE, 1.
LEMOINE (J.), 383.
LEMOYNE (T.), 103, 147, 186, 206, 344, 406, 457, 568.
LEVEL (Jean), 428.
LEVI, 212, 213, 467, 468.
LOIRE (J.), 181.
LOUIN (J.), 205, 282, 455.
MACH (Ernst), 439.
MARCHAL (J.), 26, 28, 50, 247, 252.
MARTIN (J.-B.), 137.
MARTIN (L.), 544.
MICHEL (Ch.), 345, 368, 393, 417, 497.
MONFRAIX (P.), 10, 63, 137.
NICOLESCO (J.-G.), 102, 368, 412, 585.
O. (H.), 520.
D'OCAGNE (M.), 24, 70.
ORLANDO (P.), 360, 580.
PAPELIER (G.), 416.
PARROD, 137, 204, 260, 509, 558, 574, 576, 584.
PHILBERT, 360.
PIONCHON, 167.
R. (J.), 253.
REBEIX (M.), 9, 11, 56, 66, 76.
RICHARD (J.), 81, 289, 441, 569.
RODA (J.), 367, 376.
SADE (L.), 102.
SAINTE-LAGUE, 61, 244, 386, 401, 410, 411.
SAUVAGEON (C.), 42.
SAYOUS (L.), 483.
SICARD (Pierre), 129.
SIZAIRE (E.), 459.
SOULS, 2, 70.
TANNERY, 155.
THIERY (M.), 544, 563, 587.
THONET (P.), 38.
TREILLOU (M.), 260.
TRESSE (A.), 33, 57.
TRIBIER (P.), 68, 69, 73, 368.
V. (H.), 204.
VACQUANT (A.), 145.
VASNIER, 32, 72, 96, 122, 128, 158, 178, 230, 251, 252, 254, 278, 300 378, 507, 532, 585.
VERJUS (Paul), 29.
VIAL, 360.
VIDAILLET (J.), 204.
VOGT (H.), 105, 168.
WEILL (M.), 122, 545.
X., 574.

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

13e Année. — N° 1. Octobre 1902.

## PREMIÈRE PARTIE

### QUESTION D'ALGÈBRE

par M. **Lelieuvre.**

Je me propose de résoudre le problème suivant :

*Trouver tous les polynomes entiers en $x$, de degré pair $2n$, qui sont à la fois réciproques et identiques à leur transformé en $1-x$.*

Dans un précédent numéro (*), j'ai indiqué une solution du cas particulier où le polynome est du sixième degré $(n=3)$.

On peut essayer la même méthode dans le cas général ; pour cela on considérera le polynome entier le plus général de degré $2n$ qui est identique à son transformé en $1-x$ : ce polynome étant un produit de $n$ diviseurs du second degré de la forme $x^2-x+q$ sera une fonction entière de $x^2-x$ ; il restera à le développer et à écrire que ses coefficients équidistants des extrêmes sont deux à deux égaux ; en réduisant à l'unité les coefficients extrêmes, on pourra l'écrire sous la forme :

$$F(x)=(x^2-x)^n+A_1C_n^1(x^2-x)^{n-1}+A_2C_n^2(x^2-x)^{n-2}+\ldots+A_{n-1}C_n^{n-1}(x^2-x)+1.$$

$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ désignant des constantes à déterminer et $C_n^p$ représentant, comme de coutume, le nombre des combinaisons de $n$ objets $p$ à $p$.

On aura alors à écrire $n-1$ conditions linéaires entre $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ ; on reconnait immédiatement, au moins pour les premières valeurs de $n$, qu'elles ne sont pas distinctes ; mais la discussion de ces $(n-1)$ équations, dans le cas général, n'est pas très simple : il est facile de l'éviter en prévoyant le résultat auquel on doit arriver.

En effet, soit $a$ et $1-a$ deux racines du polynome cherché, associées de façon que leur somme égale 1 ; si leur produit est aussi égal à 1, on aura $a(1-a)=1$, c'est-à-dire $a^2-a+1=0$ ; donc le polynome $F(x)$ sera divisible par $x^2-x+1$ dont il a les deux racines.

Supposons maintenant que $a$ soit l'inverse d'une racine choisie dans la suite des $2n$ racines de $F(x)$ et autre que son associée $1-a$ : je peux désigner par $1-b$ cette nouvelle racine ; on aurait donc : $a(1-b)=1$.

La racine $b$ doit être à son tour l'inverse d'une autre racine de la suite : deux cas sont à distinguer suivant que cette dernière racine est précisément $1-a$ ou bien une nouvelle racine de la suite :

1° C'est $1-a$ ; on aura alors : $a(1-b)=b(1-a)=1$, d'où $a=b$ et par conséquent $a(1-a)=1$. Donc les quatre racines considérées $a$, $1-a$, $b$, $1-b$, sont celles de $(x^2-x+1)^2$ et $F(x)$ doit être divisible par ce polynome.

(*) Voir le numéro de Mars 1901 de la *Revue*.

2° Supposons au contraire que $b$ soit l'inverse d'une nouvelle racine $(1-c)$ de la suite; on aura $a(1-b) = b(1-c) = 1$, d'où il résulte immédiatement, en éliminant $b$, $c(1-a) = 1$. *Donc $c$ est précisément la racine inverse de* $1-a$, et par conséquent les six racines $a, b, c, 1-a, 1-b, 1-c$ sont celles d'un polynome du sixième degré répondant à la question : ce sont les six rapports anharmoniques de quatre quantités, et l'une de ces racines peut être choisie arbitrairement, car elles ne sont assujetties qu'à deux relations telles que $a(1-b) = b(1-c) = 1$.

Donc, si je suppose $n = 3$ dans $F(x)$, les deux équations de condition du problème devront bien se réduire à une seule ; on reconnaît en effet immédiatement qu'elles se réduisent à $A_2 = 1$, de sorte que le polynome répondant alors à la question peut s'écrire

$$\Phi(x) \equiv (x^2 - x)^3 + 3A_1(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 1.$$

$A_1$ y demeure arbitraire ; donc si l'on appelle $\lambda$ un nouveau paramètre, on peut mettre $\Phi(x)$ sous la forme

$$\Phi(x) \equiv (x^2 - x + 1)^3 + \lambda(x^2 - x)^2.$$

*Soit maintenant à former le polynome général* $F(x)$ *de degré* $2n$ $(n \geqslant 3)$, *qui est réciproque:* trois cas seront à distinguer suivant que, $p$ désignant un entier, $n$ sera de la forme $3p$, $3p+1$ ou $3p+2$.

1° $n = 3p$ : les racines pourront s'associer en $p$ *termes* formés chacun de trois racines $a, b, c$ appartenant à un même polynome $\Phi(x)$, qui peut d'ailleurs se réduire à $(x^2 - x + 1)^3$; donc $F(x)$ s'exprimera par le produit de $p$ polynomes $\Phi$ :

$$F(x) \equiv \varphi_1(x).\varphi_2(x)\ldots\varphi_p(x) \equiv [(x^2 - x + 1)^3 + \lambda_1(x^2 - x)^2][(x^2 - x + 1)^3 + \lambda_2(x^2 - x)^2]\ldots$$
$$[(x^2 - x + 1)^3 + \lambda_p(x^2 - x)^2],$$

c'est-à-dire, en posant $U \equiv (x^2 - x + 1)^3$ et $V \equiv (x^2 - x)^2$,

$$F(x) \equiv U^p + \mu_1 U^{p-1}V + \mu_2 U^{p-2}V^2 + \ldots + \mu_p V^p,$$

en désignant par $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ $p$ *paramètres arbitraires* équivalents à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ; en particulier, si $\mu_p = 0$, $F(x)$ contient $U$ en facteur.

2° $n = 3p+1$ : on pourra former $p$ termes de trois racines, semblables à ceux du cas précédent, et il restera forcément deux racines associées $a$, $1-a$ qui seront réciproques; donc $F(x)$ sera le produit de $x^2 - x + 1$ par un polynome semblable à celui du cas précédent, d'où

$$F(x) \equiv (x^2 - x + 1)(U^p + \mu_1 U^{p-1}V + \mu_2 U^{p-2}V^2 + \ldots + \mu_p V^p).$$

3° $n = 3p+2$ : on pourra former $p$ termes de trois racines, semblables à ceux du premier cas, et il restera deux couples $a$, $1-a$ et $b$, $1-b$ qui, dans tous les cas, seront formés des quatre racines de $(x^2 - x + 1)^2$ ; donc on aura

$$F(x) \equiv (x^2 - x + 1)^2(U^p + \mu_1 U^{p-1}V + \mu_2 U^{p-2}V^2 + \ldots + \mu_p V^p).$$

Ces résultats sont faciles à vérifier directement à l'aide des équations de condition pour les premières valeurs de $n$.

---

## SUR L'EMPLOI DE LA MÉTHODE EXPÉRIMENTALE DANS L'ÉTUDE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par M. **Souls.**

Voici quelques réflexions qui m'ont été suggérées à ce propos par un sujet de composition française donné, il y a quelques années, à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, et qui, sans être peut-être nouvelles, peuvent cependant n'être pas encore venues à l'esprit des jeunes lecteurs de la *Revue*.

On est surpris, de prime abord, de trouver l'expérience dans cette branche des études scientifiques, qui semble cependant le domaine du raisonnement le plus abstrait. Et pourtant elle y a sa place. Je me bornerai dans ces quelques lignes à l'examen des mathématiques spéciales.

En algèbre d'abord, nous avons le théorème des substitutions. Sans avoir besoin d'entrer dans le détail de l'emploi de ce théorème, il suffit de se rappeler que, en substituant des nombres dans le premier membre d'une équation et en observant les signes des résultats obtenus, on peut séparer les racines de l'équation : c'est là une méthode purement expérimentale, méthode qui rappelle jusqu'à un certain point celle qu'on emploie pour la recherche de la base ou de l'acide d'un sel métallique en dissolution. Les nombres substitués sont les réactifs ; les signes obtenus, la couleur des précipités qui permet de former les métaux en groupes, dont l'un contient le métal cherché : on a ainsi « *séparé* » le métal, qu'on trouve ensuite lui-même par une nouvelle application du même procédé.

Tout le monde sait d'ailleurs, qu'un grand nombre de propositions n'ont été *démontrées* que bien postérieurement à leur découverte. Je ne citerai comme exemple que le théorème ou règle des signes de Descartes. Dans les œuvres de l'illustre mathématicien, on ne trouve pas trace de démonstration. L'auteur, après avoir montré l'exactitude de sa règle sur divers exemples, en admet la généralité sans plus ample démonstration. Descartes avait fait ses expériences sur des équations : il en déduisit une loi. Le théorème a été démontré depuis, de bien des façons, par de Gua, Segner, Æpinus, Kaestner, Lagrange, Gauss, Pinck : mais on doit reconnaître que l'*inventeur* l'a découvert uniquement par l'expérience. On peut encore citer le théorème de Fermat, quoique nous ne puissions pas affirmer, à la vérité, que Fermat n'en eût pas une démonstration. Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'il ne l'a jamais donnée.

Si nous passons dans le domaine de la géométrie analytique à trois dimensions, les exemples deviennent encore plus frappants. Étant donnée l'équation d'une surface, il serait très difficile, pour ne pas dire impossible, de s'en représenter la forme. Mais alors nous étudions cette surface comme l'anatomiste étudie la structure du cerveau, le naturaliste la constitution d'une roche : nous y pratiquons des *coupes;* on a un exemple de cette méthode dans le cours de géométrie analytique : l'étude de la forme des quadriques, d'après leurs équations réduites.

Parlerai-je encore de la résolution graphique des équations ? Ici nous trouvons les racines par la mesure de la longueur de certaines ordonnées ; procédé purement physique. Enfin, rappelons-nous un chapitre intéressant de l'algèbre : les séries. On y trouve un grand nombre de théorèmes généraux, qui présentent, il est vrai, à peu près tous un cas douteux, mais qui, malgré cela, sembleraient devoir donner la clef de presque toutes les questions concernant les séries. Il n'en est rien : il est bien rare, tous les élèves de spéciales le savent bien, que l'application de ces théorèmes, qui pourtant semble la méthode la plus logique, conduise à un résultat. Aussi doit-on s'y prendre autrement. On connaît, par une étude directe, la nature d'un certain nombre de séries. Eh bien ! la méthode la meilleure, presque toujours, c'est de *comparer* à ces séries la série proposée. C'est d'ailleurs ce qu'on fait généralement dans les cours pour démontrer ces théorèmes généraux dont je parlais.

Certes, ces deux dernières méthodes ne sont pas expérimentales d'une façon aussi absolue que celles que j'ai citées plus haut, et c'est pourquoi je n'en ai parlé qu'en dernier lieu. Mais elles marquent un passage gradué du raisonnement pur, tel qu'on l'emploie, par exemple, dans l'étude des nombres irrationnels par le partage des nombres rationnels en deux classes ou dans l'étude des propriétés générales des fonctions, aux méthodes purement expérimentales de Descartes et de Fermat.

Il est d'ailleurs intéressant de remarquer qu'inversement la physique, qui semble le domaine de l'expérience, est envahie peu à peu par le calcul ; témoins tant de faits qui, prévus de cette façon, n'ont été vérifiés qu'*a posteriori* par l'expérience : les phénomènes d'interférence, par exemple. De là un rapprochement entre les mathématiques pures et la physique, qui ne sont donc pas deux sciences si dissemblables, puisqu'on passe de l'une à l'autre d'une façon pour ainsi dire insensible, l'une empruntant les procédés de l'autre.

Je n'insiste pas plus longuement sur ces remarques, qui risqueraient de prendre dans la *Revue* une place précieuse, laissant à chacun le soin de les approfondir, s'il y trouve quelque intérêt.

## ALGÈBRE

**1090.** — *On donne la série de terme général*

$$u_n = \frac{1}{nq^\alpha},$$

*dans lequel $q$ désigne le nombre de chiffres de $n$, et $\alpha$ un nombre plus grand que l'unité.*

*Montrer, à l'aide de tel théorème qu'il conviendra, que cette série est convergente.*

*Étudier ensuite le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et voir quelle particularité intéressante il présente, étant donnée la convergence de la série.*

Quand $n$ croît, $u_n$ décroît; par suite la série proposée est convergente ou divergente en même temps que la série qui a pour terme général $v_m = 10^m u_{10^m}$. Or le nombre de chiffres de $10^m$ est $m+1$, par conséquent $u_{10^m}$ est égal à $\frac{1}{10^m.(m+1)^\alpha}$ et

$$v_m = \frac{1}{(m+1)^\alpha}.$$

Comme $\alpha$ est plus grand que 1, la série de terme général $v_m$ est convergente, il en est de même de la série donnée.

Considérons maintenant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si $n$ n'est pas égal à une puissance de 10 diminuée de 1, $n$ et $n+1$ ont le même nombre de chiffres et nous avons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}.$$

Si au contraire on a $n = 10^q - 1$, on en déduit $n+1 = 10^q$; le nombre $n$ a $q$ chiffres et le nombre $n+1$ en a $q+1$, de sorte que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}\cdot\left[\frac{q}{q+1}\right]^\alpha.$$

Dans les deux cas le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constamment inférieur à 1 et a pour limite 1 quand $n$ croît indéfiniment.

J. HAAG, lycée de Nancy.

Autre solution par M. VIAL, à Châlons.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1072.** — *On considère un cercle et un point fixes,* (C) *et* P.

1° *Une droite quelconque* (D) *coupe le cercle en deux points* A *et* B; *les droites* PA *et* PB *rencontrent à nouveau le cercle en deux points* A′ *et* B′. *Trouver l'équation de la droite* (D′) *qui joint les points* A′ *et* B′ *en fonction de celle de la droite* (D) *et le lieu du point de rencontre des deux droites* (D) *et* (D′).

2° *Quand la droite* (D′) *tourne autour d'un point fixe* M′, *la droite* (D) *tourne aussi autour d'un point fixe* M. *Trouver les coordonnées de* M *en fonction de celles de* M′ *et réciproquement. Ces formules définissent une transformation homographique. Trouver la ligne qui correspond au cercle* (C), *celle qui correspond à la polaire de* P *par rapport au cercle* (C), ($D_1$), *et la droite* ($\Delta$) *de la première figure qui correspond à la droite de l'infini dans la seconde.*

3° *On considère dans la première figure un cercle variable* (Γ) *tangent à* ($D_1$) *et à* (Δ). *Trouver la conique variable de la seconde figure qui correspond au cercle* (Γ). *Lieu des foyers de cette conique. Construire ce lieu.*

Nous prendrons pour axe des $x$ le diamètre du cercle qui passe au point P, pour axe des $y$ la perpendiculaire à ce diamètre menée par le point P et nous représenterons l'équation du cercle par

$$x^2 + y^2 - 2ax + b = 0.$$

**1.** Soient alors $ux + vy + w = 0$ et $u'x + v'y + w' = 0$ les équations des droites AB et A'B'. Le faisceau des coniques passant par les quatre points de rencontre de ces droites avec le cercle a pour équation

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2ax + b) + PP' = 0,$$

en désignant par P et P' les premiers membres des équations des deux droites (D) et (D') ; nous avons à exprimer que l'un des pôles doubles du faisceau est à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire à annuler les dérivées partielles par rapport à $x$, à $y$ et à $z$ pour $x = 0$, $y = 0$. Ce calcul nous donne

$$uw' + wu' - 2a\lambda = 0, \qquad vw' + wv' = 0, \qquad ww' + \lambda b = 0\,;$$

la seconde de ces équations donne de suite $v' = v$, $w' = -w$ ; ensuite la dernière donne $\lambda$, puis la première, $u'$ ; nous avons ainsi $\lambda = \dfrac{w^2}{b}$ et $u' = u + \dfrac{2aw}{b}$.

L'équation de la droite (D') est donc

$$(1) \qquad ux + vy - w + \frac{2aw}{b}x = 0,$$

ou

$$P + 2w\left(\frac{ax}{b} - 1\right) = 0.$$

Cette dernière forme montre que le lieu du point de rencontre des droites (D) et (D') est la droite $ax - b = 0$ ; c'est la polaire de l'origine par rapport au cercle.

**2.** Si nous exprimons que la droite (D') passe par un point fixe de coordonnées $x'$ et $y'$, nous avons une relation linéaire et homogène en $u$, $v$, $w$,

$$ux' + vy' - w + \frac{2aw}{b}x' = 0\,;$$

elle exprime donc que la droite (D) passe par un point fixe dont les coordonnées homogènes sont $x'$, $y'$, $\dfrac{2a}{b}x' - 1$ ;

Dès lors ce point a pour coordonnées cartésiennes

$$x = \frac{bx'}{2ax' - b}, \qquad y = \frac{by'}{2ax' - b},$$

ou, en posant $\dfrac{b}{2a} = k$,

$$(2) \qquad x = \frac{kx'}{x' - k}, \qquad y = \frac{ky'}{x' - k}.$$

Ces formules définissent évidemment une transformation homographique ; si on les résout par rapport à $x'$ et $y'$, on trouve

$$x' = \frac{kx}{x - k}, \qquad y' = \frac{ky}{x - k},$$

ce qui montre que la transformation est réciproque ou involutive. Nous l'étudierons plus spécialement par la géométrie.

En portant les valeurs de $x$ et de $y$ dans l'équation du cercle (C) et supprimant ensuite les accents, nous retrouvons sans peine l'équation du cercle (C) elle-même. Le cercle se transforme donc en

lui-même. En portant $x$ dans l'équation de la polaire du point P, c'est-à-dire de l'origine, $x - 2k = 0$, nous retrouvons cette équation elle-même, $x' - 2k = 0$; ceci prouve que la transformation actuelle est une homologie dont l'axe est cette polaire $(D_1)$. Il est visible, au surplus, que le point P se correspond à lui-même ; c'est donc le centre d'homologie.

Quant à la droite $(\Delta)$ de la première figure qui correspond à la droite de l'infini de la seconde, elle s'obtient en rendant $x'$ et $y'$ infinis ; elle a donc pour équation $x - k = 0$. C'est l'équidistante du point P et de sa polaire $(D_1)$.

3. Le cercle variable $(\Gamma)$ a un diamètre parallèle à $Ox$, d'ordonnée variable $\mu$, et dont les deux extrémités ont pour abscisses $k$ et $2k$ ; il a donc pour équation

$$(x - k)(x - 2k) + (y - \mu)^2 = 0.$$

En y remplaçant $x$ et $y$ par $\dfrac{kx}{x - k}$ et $\dfrac{ky}{x - k}$, elle devient

$$k^3(2k - x) + (ky - \mu x + \mu k)^2 = 0,$$

ou bien

$$(y - \rho x + \rho k)^2 - k(x - 2k) = 0,$$

en désignant $\dfrac{\mu}{k}$ par $\rho$.

Cette équation représente une parabole que nous pouvons écrire $P^2 - kQ = 0$, avec les variables nouvelles P et Q définies par les égalités

$$P = y - \rho x + \rho k, \qquad Q = x - 2k$$

ces deux dernières équations donnent immédiatement les formules de transformation directe

$$x = Q + 2k, \qquad y = P + \rho Q + \rho k.$$

Cela posé, toute droite du plan peut se représenter par une équation de la forme

$$uP + vQ + w = 0,$$

et l'équation tangentielle de la parabole, dans le système de coordonnées trilinéaires ainsi défini, s'obtient immédiatement ; c'est

$$ku^2 - 4vw = 0.$$

Appelons alors $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du foyer dans le système rectangulaire initial ; l'une des tangentes issues de ce point aura pour équation

$$y - \beta - i(x - \alpha) = 0,$$

ou, à l'aide des variables P, Q,

$$P + (\rho - i)Q + \rho k - \beta + i\alpha - 2ik = 0.$$

En écrivant que ses coordonnées vérifient la condition de contact, nous avons la relation suivante entre $\beta$ et $\rho$ :

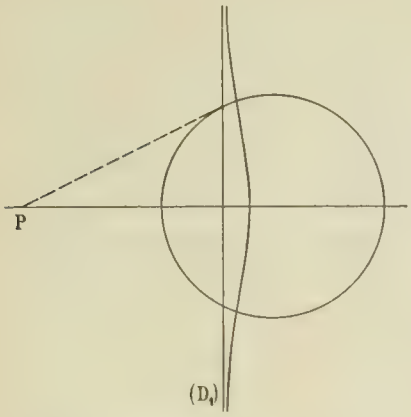
$$k - 4(\rho - i)(\rho k - \beta + i\alpha - 2ik) = 0 ;$$

cette relation devant être vérifiée pour $i$ et $-i$, se dédouble en deux autres

$$k - 4\rho(\rho k - \beta) - 4(\alpha - 2k) = 0,$$
$$\rho(\alpha - 2k) - \rho k + \beta = 0.$$

La deuxième donne $\rho = \dfrac{\beta}{3k - \alpha}$, et il n'y a qu'à porter cette valeur dans la première pour avoir l'équation du lieu des foyers

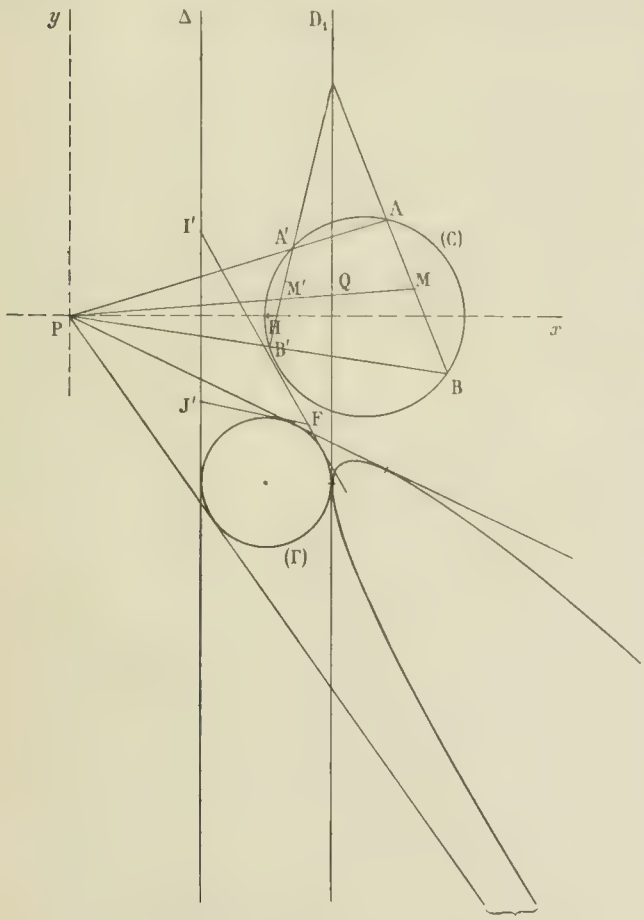
$$(3) \qquad 4y^2(\alpha - 2k) + (4x - 9k)(x - 3k)^2 = 0.$$




Cette équation représente une cubique circulaire unicursale ayant pour point double le point $x = 3k$, $y = 0$, symétrique par rapport à $Ox$ et dont la direction asymptotique réelle est l'axe des $y$ ; l'asymptote parallèle à cette direction est $x - 2k = 0$ ; c'est la droite $(D_1)$ ; le sommet de la courbe a pour abscisse $x = \frac{9k}{4} = 2k + \frac{k}{4}$, il est situé aussi avant le point double ; donc celui-ci est isolé. On peut d'ailleurs le vérifier directement en portant les axes en ce point et l'on constate ainsi que les deux tangentes sont imaginaires. La courbe se trace alors immédiatement.

Bonnes solutions : MM. J. Marchal ; Dolimbert, à Grenoble ; Cans.
Assez bonne solution : M. J. Haag, à Nancy.

**Solution géométrique.** — Le quadrangle AA'B'B inscrit dans le cercle ayant deux côtés opposés qui se croisent en P, les deux autres couples de côtés opposés se rencontrent sur la polaire de P par rapport au cercle.




Si nous menons une droite quelconque passant par le point P, elle rencontre les deux droites AB, A'B' en M et M', et la polaire $(D_1)$ en Q ; les deux points M et M' sont conjugués harmoniques par rapport à P et Q ; si donc l'un d'eux est fixe, l'autre est aussi fixe. En établissant entre eux une correspondance, nous définissons une homologie dont le point central est le point P et dont l'axe est la droite $(D_1)$ ; les deux droites AB et A'B' se correspondent dans cette homologie. D'autre part, le rapport anharmonique constant (PQMM') que forment ici deux points correspondants M et M' avec le point P et le point Q où la droite MM' coupe l'axe d'homologie est égal à $-1$ ; donc cette homologie est involutive.

Il résulte immédiatement de là que le point P se correspond à lui-même, que l'axe d'homologie se transforme en lui-même et qu'il en est de même du cercle (C). Si le point M' est à l'infini, M est au milieu de PQ ; donc ce point décrit l'équidistante du point P et de la droite $(D_1)$.

La ligne qui correspond au cercle (Γ) est une conique tangente à la correspondante de (Δ), c'est-à dire à la droite de l'infini, tangente aussi à l'axe d'homologie au même point que le cercle. C'est donc une parabole qui se déplace tangentiellement à l'axe d'homologie suivant une certaine loi. Au foyer de cette parabole correspond le point de rencontre des tangentes au cercle (Γ) menées par deux points fixes de la droite (Δ), I' et J' ; ces points sont les homologues des points cycliques de la seconde figure, ils sont donc sur les droites PI et PJ et sont, par suite, symétriques par rapport à $Ox$. Cherchons le lieu du point de rencontre F' des tangentes au cercle (Γ) menées par ces deux points.

Il y a deux cercles (Γ) tangents à une droite I'F' de l'un des faisceaux ; par suite, il lui correspond deux rayons J'F' dans l'autre faisceau ; donc la correspondance entre ces rayons est une correspondance (2, 2).

Mais quand le cercle s'éloigne à l'infini, les deux rayons homologues I'F' et J'F' tendent tous deux vers I'J'; ce rayon particulier se correspond donc à lui-même dans les deux faisceaux, et la droite I'J' fait partie du lieu du point F'.

C'est un lieu exceptionnel. Le lieu total est du quatrième ordre et a pour points doubles les deux points I' et J'. Donc le vrai lieu est une cubique qui passe en ces points.

D'autre part, quand les deux rayons I'F' et J'F' tendent vers I'J', le point F' s'éloigne à l'infini sur cette droite et il tend vers la droite $(D_1)$. La cubique a donc pour asymptote cette droite $(D_1)$.

Montrons enfin que cette courbe a un point double au milieu de la portion de $Ox$ comprise entre $(D_1)$ et $(\Delta)$. Soit H ce point; si nous le joignons aux deux points I' et J' symétriques par rapport à $Ox$, nous voyons de suite qu'il y a deux cercles $(\Gamma)$ égaux et symétriques par rapport à $Ox$ et tangents à I'H et J'H; chacun de ces deux rayons correspond donc doublement à l'autre; par suite, leur point d'intersection H est un point double du lieu.

Dans la seconde figure, la ligne correspondante est une cubique circulaire unicursale ayant $(D_1)$ pour asymptote.

---

**1096.** — *Étudier :*

1° *L'enveloppe des cordes d'une conique qui ont leurs milieux sur une droite donnée;*

2° *L'enveloppe des asymptotes d'un faisceau de coniques bitangentes en deux points fixes.*

Prenons pour axe des $y$ la droite donnée et pour axe des $x$ le diamètre conjugué de cette droite. La conique sera alors représentée par une équation de la forme

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + D = 0.$$

**1.** Si nous désignons par $y = mx + p$ l'une quelconque des droites qui coupe la conique en deux points dont le milieu soit sur $Oy$, nous aurons la relation qui existe entre $m$ et $p$, soit en écrivant que l'équation aux abscisses des deux points de rencontre de cette droite et de la conique admet deux racines égales et de signes contraires, soit en écrivant que le diamètre conjugué de cette droite la rencontre sur $Oy$. Nous trouvons ainsi immédiatement

$$Bmp + C = 0,$$

et l'équation générale des droites indiquées est

$$y = mx - \frac{C}{Bm}.$$

En écrivant que cette équation, regardée comme équation du second degré en $m$, a une racine double, nous avons de suite l'équation de l'enveloppe

$$By^2 + 4Cx = 0;$$

cette équation représente une parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre; elle est évidemment tangente, d'après la définition même des droites qu'elle enveloppe, aux deux tangentes à la conique en ses points de rencontre avec la droite donnée, c'est-à-dire avec $Oy$.

Cette équation est indépendante de A et de D. L'enveloppe est donc la même pour toutes les coniques doublement tangentes à la conique donnée en ses deux points de rencontre avec la droite donnée, et aussi pour toutes les coniques ayant les mêmes asymptotes que la conique donnée; elle touche donc en particulier les asymptotes de cette conique. Enfin cette enveloppe est la même pour toutes les coniques du réseau formé par la conique donnée, par exemple, la parabole $By^2 + 2Cx = 0$, et par les deux coniques $y^2 = 0$ et $x^2 = 0$. Elle enveloppe donc toutes les asymptotes des coniques doublement tangentes à la conique donnée en ses points de rencontre avec $Oy$ et toutes les tangentes aux coniques homothétiques et concentriques avec la conique donnée aux points où elles coupent $Oy$.

Quant à la position qu'occupe cette enveloppe, elle est facile à apercevoir en remarquant que c'est une parabole homothétique à la parabole de base du réseau, par rapport à l'origine et dans le rapport 2.

**2.** Cette seconde partie est évidente d'après ce qui précède : l'enveloppe des asymptotes des coniques du faisceau formé par la conique donnée et par la conique réduite à deux droites confondues avec la droite donnée est la même que l'enveloppe des cordes ayant leurs milieux sur cette droite. Pour le vérifier par le calcul, nous prendrons les mêmes axes que précédemment et la même équation pour la conique, seulement nous y regarderons A comme paramètre variable.

Le centre de cette conique a pour coordonnées $x = -\frac{C}{A}$, $y = 0$ ; l'équation quadratique des asymptotes est donc

$$A\left(x + \frac{C}{A}\right)^2 + By^2 = 0,$$

ou

$$A^2x^2 + (2Cx + By^2)A + C^2 = 0.$$

L'enveloppe, quand A varie, a pour équation

$$(2Cx + By^2)^2 - 4C^2x^2 = 0,$$

ou

$$By^2(By^2 + 4Cx) = 0 ;$$

nous trouvons ainsi deux fois l'axe des $x$ qui est une enveloppe singulière : le lieu du point double de la conique impropre qui constitue les deux asymptotes ; puis, la parabole $By^2 + 4Cx = 0$, qui est l'enveloppe précédente.

G. DULIMBERT, à Grenoble.

Bonnes solutions : MM. E.-N. Barisien ; J. Haag, lycée de Nancy ; G. Gourdel, lycée de Marseille ; J. Marchal ; M. Laurence, lycée de Bordeaux ; R. Bouvaist.

**Solution géométrique.**— C'est un problème classique que de chercher l'enveloppe des droites qui joignent deux points conjugués par rapport à une conique donnée et mobiles sur deux droites données. On démontre aisément que ces points, M et M′, décrivent deux divisions homographiques, et, par conséquent que la droite MM′ enveloppe une conique tangente aux deux droites ; la corde des contacts est la polaire du point de rencontre des deux droites par rapport à la conique donnée ; il en résulte que ce point est un pôle double des deux coniques. L'enveloppe touche en particulier les tangentes à la conique aux points où elle rencontre les droites données. Il résulte de ce qui précède que si on considère toutes les coniques doublement tangentes à la conique donnée aux deux points de rencontre avec l'une des deux droites, l'enveloppe ne change pas. Elle est donc la même pour toutes les coniques du réseau formé par la conique donnée et par les deux coniques impropres réduites à des droites doubles coïncidant avec les droites données.

Il n'y a plus qu'à supposer que l'une de ces deux droites est rejetée à l'infini pour avoir la question proposée et la solution complète de cette question.

On peut encore trouver aisément la solution de cette question en transformant homographiquement la figure de façon que la droite donnée soit rejetée à l'infini et que la conique devienne un cercle. Toutes les particularités de la question apparaissent alors immédiatement.

M. REBEIX, élève à l'École normale supérieure.

Bonnes solutions : MM. P. Thonet ; J. Haag ; L. Maury, répétiteur au lycée d'Alais ; P. Tribier.

---

**1100.** — *Soit* ABC *un triangle inscrit dans une conique sur laquelle on prend quatre points quelconques. Par ces quatre points passent deux coniques tangentes à chacun des côtés du triangle* ABC. *Démontrer que les six points de contact sont trois à trois en ligne droite.*

Si l'on prend le triangle ABC pour triangle de référence, l'équation de la conique donnée est

$$uyz + vzx + wxy = 0,$$

et les quatre points pris sur cette conique peuvent être définis par l'intersection de la conique donnée et d'une autre conique ayant pour équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0.$$

Il en résulte qu'une conique quelconque passant par les quatre points considérés a une équation de la forme

$$(1) \qquad ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2(b + \lambda u)yz + 2(b' + \lambda v)zx + 2(b'' + \lambda w)xy = 0.$$

Pour que cette conique soit tangente au côté BC $(x = 0)$, il faut qu'on ait

$$a'a'' - (b + \lambda u)^2 = 0.$$

On en déduit $b + \lambda u = \pm\sqrt{a'a''}$, ce qui détermine deux coniques tangentes au côté BC, et les points de contact $A_1$ et $A_2$ sont définis par les équations

$$(A_1) \qquad x = 0, \qquad y\sqrt{a'} + z\sqrt{a''} = 0,$$

$$(A_2) \qquad x = 0, \qquad y\sqrt{a'} - z\sqrt{a''} = 0.$$

On voit de même que les points de contact $B_1$ et $B_2$ des coniques du faisceau (1) avec le côté CA ont pour coordonnées

$$(B_1) \qquad y = 0, \qquad x\sqrt{a} + z\sqrt{a''} = 0,$$

$$(B_2) \qquad y = 0, \qquad x\sqrt{a} - z\sqrt{a''} = 0\,;$$

et enfin les points $C_1$ et $C_2$ où les coniques (1) touchent le côté AB sont donnés par les équations

$$(C_1) \qquad z = 0, \qquad x\sqrt{a} + y\sqrt{a'} = 0,$$

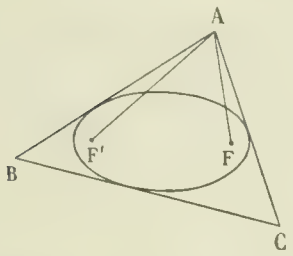
$$(C_2) \qquad z = 0, \qquad x\sqrt{a} - y\sqrt{a'} = 0.$$

Il est alors immédiat que les points $A_1, B_1, C_1$ sont sur la droite $x\sqrt{a} + y\sqrt{a'} + z\sqrt{a''} = 0$; les points $A_2, B_2, C_1$ sur la droite $x\sqrt{a} + y\sqrt{a'} - z\sqrt{a''} = 0$; les points $A_2, B_1, C_2$ sur la droite $x\sqrt{a} - y\sqrt{a'} + z\sqrt{a''} = 0$, et enfin les points $A_1, B_2, C_2$ sur la droite $x\sqrt{a} - y\sqrt{a'} - z\sqrt{a''} = 0$.

Les six points de contact sont donc les sommets d'un quadrilatère complet dont les diagonales sont les côtés du triangle ABC.

Remarque. — Corrélativement on peut énoncer la proposition suivante :

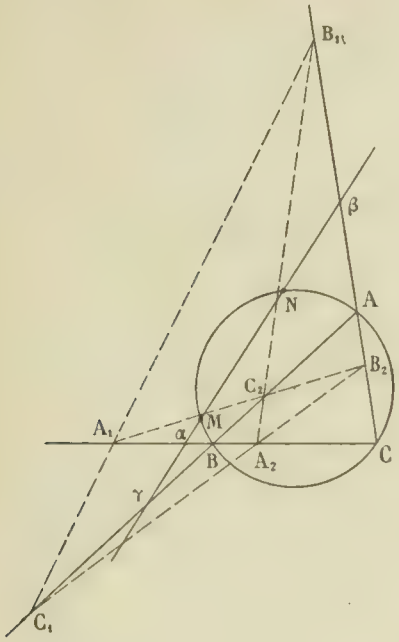
*Etant donné un triangle circonscrit à une conique* (Γ) *et quatre tangentes à cette conique, il existe deux coniques inscrites dans le quadrilatère* (Q) *formé par ces quatre tangentes et passant par chacun des sommets du triangle. Les six tangentes en ces points concourent trois à trois en un même point.*




En particulier supposons que le quadrilatère (Q) soit formé par les tangentes menées à la conique (Γ) par les points cycliques ; les coniques inscrites dans le quadrilatère sont alors homofocales à (Γ). Il passe deux de ces coniques par le point A, tangentes en ce point aux bissectrices de l'angle FAF', F et F' désignant les foyers de (Γ). Mais, en vertu du théorème de Poncelet, ces tangentes sont aussi bissectrices de l'angle A du triangle ABC. Il en résulte que les six droites considérées sont les bissectrices des angles du triangle ABC, et on voit qu'elles passent trois à trois par un même point.

P. MONFRAIX, lycée de Toulouse.

**Solution géométrique.** — Faisons une transformation homographique de façon que deux des quatre points choisis sur la conique soient les points cycliques. Cette conique se transforme en un cercle S inscrit dans le triangle ABC et les coniques passant par les quatre points se réduisent aussi à des cercles passant par deux points fixes M et N du cercle S.




Désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les points de rencontre de la droite MN et des côtés BC, CA, AB du triangle ABC.

Il existe deux cercles passant par M et N et touchant le côté BC; les points de contact sont les points $A_1$ et $A_2$, symétriques par rapport à $\alpha$ et tels que l'on ait

$$\overline{\alpha A_1}^2 = \overline{\alpha A_2}^2 = \alpha M . \alpha N = \alpha B . \alpha C.$$

Par suite les points $A_1$ et $A_2$ divisent harmoniquement BC et ont leur milieu en $\alpha$.

De même les points $B_1$ et $B_2$ divisent harmoniquement CA et ont leur milieu en $\beta$, et enfin les points $C_1$ et $C_2$ divisent harmoniquement AB et ont leur milieu en $\gamma$.

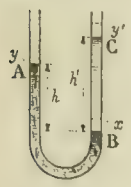
Comme les divisions $CA_2BA_1$ et $CB_2AB_1$ sont harmoniques, le point P où se coupent $A_1B_1$ et $A_2B_2$ et le point Q où se coupent $A_1B_2$ et $A_2B_1$ sont situés sur AB et divisent harmoniquement AB. Ces quatre droites forment un quadrilatère complet dont les diagonales sont $B_1B_2$, $A_1A_2$ et PQ; or les milieux de ces diagonales sont en ligne droite. On en conclut que le milieu de PQ est le point $\gamma$. Comme les points P et Q sont conjugués harmoniques par rapport à A et B et ont leur milieu au point $\gamma$, ces points coïncident avec les points $C_1$ et $C_2$ et la proposition est établie.

M. REBEIX.

## PHYSIQUE

**1024**. — *Un tube en* U *à branches verticales, dont le coefficient de dilatation linéaire est* $\lambda$, *contient deux liquides de poids spécifiques différents* $d$ *et* $d'$ *et de coefficients de dilatation* $m$ *et* $m'$. *L'appareil étant à* 0°, *on trace sur le tube un repère à chacun des niveaux* A, B, C. *On porte ensuite le tout à* $t°$; *chercher à quelle condition l'un ou l'autre des trois niveaux reste en regard du repère correspondant.*

Appelons $x$, $y$, $y'$, les déplacements *apparents* des niveaux B, A, C, $h$ et $h'$ les distances initiales des niveaux A et C au niveau B.




L'équilibre primitif s'exprime par l'équation

$$(1) \qquad hd = h'd',$$

l'équilibre final par l'équation

$$(2) \qquad (h - x + y)\frac{d}{1 + mt} = (h' - x + y')\frac{d'}{1 + m't}.$$

Exprimons la conservation du liquide de densité $d$, en appelant $v$ le volume apparent du tube au-dessous du niveau B et $s$ sa section à 0°. Pour cela, écrivons que le volume final du liquide, exprimé à l'aide du volume initial, est égal au volume de la partie de l'appareil qui le contient.

$$(3) \qquad (v + hs)(1 + mt) = [v + (h + x + y)s](1 + 3\lambda t).$$

Exprimons de même la conservation du liquide de densité $d'$ :

$$(4) \qquad h's(1 + m't) = (h' - x + y')s(1 + 3\lambda t).$$

Telles sont les équations du problème.

Eliminons $y'$ entre (2) et (4), en tenant compte de (1), il vient

$$(5) \qquad (x - y)(1 + 3\lambda t) = h(3\lambda - m)t.$$

Simplifions (3) ; on peut l'écrire

$$(6) \qquad (x+y)(1+3\lambda t) = \left(\frac{v}{s}+h\right)mt - \left(\frac{v}{s}+h\right)3\lambda t.$$

Ajoutons (5) et (6),

$$2x(1+3\lambda t) = \frac{v}{s}(m-3\lambda)t.$$

On voit que $x$ ne peut être nul que si $m = 3\lambda$.

Retranchons (5) de (6),

$$2y(1+3\lambda t) = \left(\frac{v}{s}+2h\right)(m-3\lambda)t,$$

La condition pour que $y$ soit nul est encore $m = 3\lambda$.

Enfin, simplifions l'équation (4) et remplaçons-y $x(1+3\lambda t)$ par sa valeur,

il vient
$$y'(1+3\lambda t) = h'(m'-3\lambda)t + \frac{1}{2}\frac{v}{s}(m-3\lambda)t.$$

La forme du second membre montre que $y'$ ne peut être nul que si $3\lambda$ est compris entre $m$ et $m'$.

La dilatation des solides est en général inférieure à celle des liquides et il n'y a guère que l'eau qui permettrait de réaliser, entre certaines limites de température, les conditions demandées.

## QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

### ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1902).

#### I. — Algèbre.

**2751.** — $a, b, c$ désignant trois nombres entiers positifs, démontrer que $x^{3a+2}+x^{3b+1}+x^{3c}$ est divisible par $x^2+x+1$.

**2752.** — A, B, C désignant des polynomes à une variable, on connaît les restes de la division de A par B et par C ; calculer le reste de la division de A par BC.

**2753.** — On donne deux polynomes A et B à deux variables $x$ et $y$. On les ordonne par rapport à $x$ et on divise A par B ; soit Q le quotient, R le reste. On les ordonne ensuite par rapport à $y$ et on recommence la division. Dans quel cas obtient-on le même quotient et le même reste ?

**2754.** — Trouver le plus grand commun diviseur entre $x^m-1$ et $x^p-1$.

**2755.** — Variations de $p!\,q!$ quand $p+q$ est constant.

**2756.** — Somme des cubes des $n$ premiers nombres impairs.

**2757.** — Combien aurait-on de nombres différents en permutant les chiffres du nombre 54 281 ? Calculer la somme de tous ces nombres.

**2758.** — On considère le déterminant du $n^e$ degré

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix};$$

démontrer la relation
$$\Delta_{n+1} = (a-1)\Delta_n + (a-1)^n.$$

**2759.** — Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & \dots & l \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

**2760.** — Démontrer qu'un déterminant symétrique gauche est nul s'il est d'ordre impair.

**2761.** — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x+y+z+t = 1, \\ ax+by+cz+dt = e, \\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2t = e^2, \\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3t = e^3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y+az = b, \\ z+ax = b', \\ x+ay = b''. \end{cases}$$

**2762.** — A quelles conditions les trois nombres $a, b, c$ feront-ils partie d'une progression arithmétique en y occupant des rangs donnés $p, q, r$ ?

**2763.** — Etudier les séries qui ont pour termes généraux :

$$\frac{1}{n(n+1)},\quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)},\quad \frac{n^2}{n!},\quad \frac{n^p}{n!},\quad \frac{1}{a+bx^n},\quad \frac{2n+1}{n!},\quad \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

**2764.** — Calculer à $\frac{1}{1000}$ près les sommes des séries qui ont pour termes généraux :

$$\frac{1}{n^n},\quad \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}},\quad \frac{1}{(n!)^n},\quad \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}.$$

**2765.** — Etudier la série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots$$

**2766.** — Etudier les séries

$$1+r\cos\omega+r^2\cos 2\omega+\ldots+r^n\cos n\omega+\ldots,$$
$$r\sin\omega+r^2\sin 2\omega+\ldots+r^n\sin n\omega+\ldots,$$

où l'on suppose $|r|<1$. Calculer la somme de chacune de ces séries.

**2767.** — Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$(1+x^2)^{x^3+1},\quad (\sin x)^{1+4x},\quad x^{\sin x},\quad \log\sqrt{\frac{1-\cos mx}{1+\cos mx}},\quad \text{arc}\sin\text{tg}\,x,$$

$$\text{arc tg}\,\frac{1-x}{1+x},\quad (\text{arc}\sin x)^{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{arc tg}\log\sin\sqrt{x},\quad \left(\text{arc tg}\,\frac{1+x}{1-x}\right)^{\sqrt{1-x^2}}.$$

**2768.** — Dérivées des fonctions suivantes :

$$\text{arc tg}\,(\sqrt{1+x^2}-x),\quad \cos x\left(1+\text{tg}\,x\,\text{tg}\,\frac{x}{2}\right),\quad x^{\frac{1}{\log x}},\quad \text{L}(\cos x+i\sin x),$$

$$\text{arc}\sin 2x\sqrt{1-x^2},\quad \text{arc}\cos(2x^2-1),\quad \text{arc tg}\,\frac{u+v}{1-uv}\ (u \text{ et } v, \text{ fonctions de } x).$$

Expliquer les résultats obtenus.

**2769.** — Etudier les variations des fonctions suivantes :

$$\frac{\text{tg}^3 x}{\text{tg}\,3x},\quad \text{L}(x^3-3x+2),\quad \text{L}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\quad \log_x a,\quad x^n+1-x-\frac{1}{x}\ (n \text{ entier}),\quad xe^{\text{tg}\,x},\quad a^{x^2},$$

$$\text{arc}\cos(xe^{-\sqrt{x}}),\quad \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}},\quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad (1+x)^{\frac{1}{x}},\quad \frac{x}{\text{L}x},\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^x,\quad e^{x^2+px+q},$$

$$\frac{\text{L}x}{x},\quad \frac{\text{L}x}{x-1},\quad \text{L}x-x,\quad \text{L}(x^3+px+q),\quad \frac{\sin x}{x},\quad xe^{-\frac{1}{x}},\quad e^{x^2+px+q},$$

$$\frac{a^x}{x},\quad e^{\text{arc tg}\,x},\quad \sin^2 x-\sin x+1,\quad \frac{\text{L}x}{x^2},\quad \frac{x\text{L}x+x-1}{\text{L}x},\quad \text{arc tg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\ x-\log x.$$

$$xe^{\frac{1+x}{1-x}},\quad xe^{\frac{4x^3}{x^4-1}},\quad x\text{L}\,\frac{1}{x},\quad x\text{L}(x+1),\quad \frac{x^4-6x+1}{x^2-1}.$$

**2770.** — Trouver la dérivée par rapport à $x$ de la fonction $y$ définie par la relation $x^{2y}=y$.

**2771.** — On donne la relation $x^y=y^x$. Calculer la dérivée de $y$ par rapport à $x$. Faire dans cette dérivée $y=x$ puis expliquer le résultat. Construire la courbe. Tangente au point $x=y=e$.

**2772.** — On donne la relation $\text{arc}\sin\frac{x}{a}+\text{arc}\sin\frac{y}{b}=c$. Calculer la dérivée de $y$ par rapport à $x$.

**2773.** — Développer en série

$$\text{L}(1-x),\quad \sqrt{1-x},\quad \text{arc tg}\,x,\quad e^x\sin x,\quad \sin^3 x.$$

**2774.** — Développer en série $\cos(x+a)$ et en déduire les développements de $\cos x$ et de $\sin x$.

**2775.** — Appliquer la formule de Taylor pour calculer $\cos mx$ ($m$ entier et positif) en fonction de $\cos x$.

**2776.** — Limites de :

1° $(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ pour $x=0$ ; 2° $(1-\text{cotg}\,x)\left[1-\text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$ pour $x=0$ ; 3° $x\text{L}x$ pour $x=0$ ;

4° $\left(\frac{a^{\frac{1}{m}}+b^{\frac{1}{m}}}{2}\right)^m$ et $\left(\frac{a^{\frac{1}{m}}+b^{\frac{1}{m}}+c^{\frac{1}{m}}}{3}\right)^m$ pour $m$ infini.

**2777.** — Trouver une fonction qui soit égale à sa dérivée changée de signe.

**2778.** — Trouver une fonction $y$ telle que $y=\text{L}y'$.

**2779.** — Dérivées d'ordre $n$ des fonctions

$$e^{ax}\cos mx,\quad e^{-x^2},\quad e^{-\frac{1}{x}},\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Dans les dérivées d'ordre $n$ des fonctions $e^{-x^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ apparaissent en facteur des polynomes. Montrer que ces polynomes ont toutes leurs racines réelles et distinctes.

**2780.** — Dérivée d'ordre $n$ de $(x-a)^n(x-b)^n$. En déduire la somme des carrés des coefficients du binome.

**2781.** — Déterminer une fonction $f(x)$ telle que l'on ait $f(x)f(y)=f(xy)$; quelles que soient les valeurs de $x$ et de $y$.

**2782.** — Discuter les équations suivantes :

$x^{10} - 3x^5 + 2 = 0$, $\quad x^5 + 1 = 0$, $\quad x^5 + px^3 + qx + r = 0$,

$x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$, $\quad x^6 + 1 = 0$, $\quad x^4 + \lambda x^3 + px^2 + r = 0$,

$2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, $\quad x^{10} - 1 = 0$; $\quad x^5 + 5ax^4 + 10bx^3 + 1 = 0$,

$x^5 - 7x + 1 = 0$, $\quad x^m + px^2 + qx + r = 0$, $\quad x^2 + p + \dfrac{q}{x} = 0$;

$x^5 - 10x^4 + 20x^3 + 1000 = 0$, $\quad x^9 + px^5 + q = 0$,

$x - 2\sin x = 0$, $\quad x + \cos x = 0$, $\quad e^x + e^{-x} + 2x - 3 = 0$, $\quad L(1+x) + 3x^2 - 4x + 1 = 0$,

$a\sin x + bx = 0$, $\quad x - \sin x + \cos 2x = 0$, $\quad L(1-x) + x^2 + x + 1 = 0$, $\quad L\,\mathrm{tg}\,x + \cos x - 1 = 0$,

$x - \sin x + \cos x - 1 = 0$, $\quad e^x(x^2 - 3x + 2) - 1 = 0$, $\quad xLx - 2x^2 + 1 = 0$, $\quad L(1+2x) + x^2 - 2x + 1 = 0$,

$\sin 2x - 4\cos x + 1 = 0$, $\quad e^x(x^2 - 2x + 3) - 5 = 0$, $\quad ax^2 + 2bx + c + L(\alpha x + \beta) = 0$, $\quad L(1+\cos x) - \sin x + 1 = 0$,

$x - \mathrm{tg}\,x = 0$, $\quad e^x - ax - b = 0$, $\quad L(1-\cos x) + \sin x - 1 = 0$, $\quad xLx - 2x + 3Lx + 1 = 0$.

**2783.** — Résoudre l'équation $(1+ix)^m + (1-ix)^m = 0$.

**2784.** — Résoudre l'équation $\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{b}$ en dirigeant le calcul symétriquement.

**2785.** — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x^3 + xy(x+y) + y^3 = a^3, \\ xy = a^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = axy, \\ (x^2+y^2)\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right) = b^2. \end{cases}$$

**2786** — Calculer $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[3]{i-1}$, $\sqrt[m]{1+i}$.

**2787.** — Calculer par la méthode d'approximation de Newton la racine réelle de l'équation $x^5 - 3 = 0$.

**2788.** — Calculer la fonction symétrique $\varphi(a) + \varphi(b) + \ldots + \varphi(l)$, $a, b, \ldots, l$ étant les racines de l'équation $f(x) = 0$, et $\varphi(x)$ désignant un polynome.

**2789.** — Calculer la somme des carrés des inverses des racines de l'équation $x^3 - 2x + 1 = 0$.

**2790.** — Calculer $\Sigma a^2b^2$ pour l'équation $x^3 - 2x - 3 = 0$, $\Sigma a^2b^2$ et $\Sigma \dfrac{a^2}{b}$ pour $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

**2791.** — Etant donnée l'équation $A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$, calculer $\Sigma \dfrac{a}{b}$. Vérifier la formule trouvée au moyen du poids et de l'homogénéité.

**2792.** — Calculer la fonction symétrique $\Sigma \dfrac{1}{(x-a)^2}$, $a$ désignant une racine de l'équation $f(x) = 0$.

**2793.** — Soient $a, b, \ldots, l$ les racines de l'équation binome $x^m - 1 = 0$ et $\psi(x)$ un polynome de degré au plus égal à $m - 1$. Calculer $\psi(a) + \psi(b) + \ldots + \psi(l)$.

**2794.** — Eliminer $x$ entre les équations $x^3 - 3x + 2 = 0$, $x^4 + px^2 - 1 = 0$.

**2795.** — Eliminer $x$ entre les équations $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, $x^2 + ax + b = 0$.

**2796.** — Equations aux carrés des différences des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

**2797.** — Démontrer que la dérivée d'ordre $n$ de $(x^2 - a^2)^n$ est un polynome qui a toutes ses racines réelles.

**2798.** — Sous quelles conditions le polynome $f(x) \equiv ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e$ peut-il se mettre sous la forme $p(x+\alpha)^4 + q(x+\beta)^4$ ? Dans ce cas résoudre l'équation $f(x) = 0$.

**2799.** — Etant donné un polynome $f(x) \equiv A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$, on considère les fonctions $f_1(x) \equiv A_0x + A_1$, $f_2(x) \equiv A_0x^2 + A_1x + A_2$, $\ldots$, $f_{m-1}(x) \equiv A_0x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}$. Démontrer que si $A_0$ est positif et si un nombre $a$ rend positifs les polynomes $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{m-1}(x), f(x)$, $a$ est limite supérieure des racines de l'équation $f(x) = 0$.

**2800.** — Que peut-on dire sur les racines de l'équation $\dfrac{x-a}{2}\,[f'(x) + f'(a)] - f(x) + f(a) = 0$, où $f(x)$ désigne un polynome ?

**2801.** — Déterminer $\lambda$ de façon que l'équation $x^5 + \lambda x^3 - 1 = 0$ ait une racine double et calculer cette racine.

**2802.** — Résoudre l'équation $ax^5 + bx^4 + cx^2 + d = 0$ sachant qu'elle a une racine double et une racine triple.

**2803.** — Résoudre l'équation $x^4 - 2x^3 + 5x + h = 0$ sachant qu'elle admet deux racines inverses l'une de l'autre.

**2804.** — On sait que l'équation $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0$ a une racine double et une racine triple. Résoudre cette équation.

**2805.** — Ecrire que l'équation $x^4 + 6px^2 + 4qx + r = 0$ n'a que deux racines distinctes.

**2806.** — Résoudre l'équation du cinquième degré $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, sachant qu'entre ses coefficients on a les relations $ad - bc = af - be = cf - de = 0$.

**2807.** — Si $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $f(x) + \lambda f'(x) = 0$, quelle que soit la constante $\lambda$.

**2808.** — Etant donnée l'équation $x^4 - x^2 - 2x + \lambda = 0$, déterminer $\lambda$ de façon que la somme de deux racines soit égale à 1 ; puis résoudre l'équation.

**2809.** — Résoudre l'équation $x^3 + ax^2 - 1 = 0$ sachant que l'une de ses racines est double d'une autre.

**2810.** — Trouver un polynome de degré au plus égal à 6 qui prenne mêmes valeurs que $\sin x$ pour les valeurs de $x$ : $0, \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\dfrac{3\pi}{2}$.

**2811.** — Déterminer un polynome $f(x)$ tel que, pour $x = 1$, $f(x) = 2$, $f'(x) = 3$, et pour $x = 2$, $f(x) = 5$, $f'(x) = 2$. Degré du polynome le plus simple satisfaisant à ces conditions.

**2812.** — Déterminer un polynome du troisième degré qui, pour les valeurs de $x$, $-1, 0, 1, 2$, prenne respectivement les valeurs $2, 1, -1, 0$. Méthodes de Lagrange et de Newton.

**2813.** — Appliquer la formule d'interpolation de Newton au développement de $x^n$ sous la forme

$$A_0 + A_1x + A_2x(x-1) + \ldots + A_nx(x-1)\ldots(x-n+1).$$

En déduire la somme des puissances semblables des $n$ premiers nombres.

## II. — Trigonométrie.

**2814.** — Calculer $\sin 1''$, $\sin 1'$, $\sin 1^\circ$, $\sin 46^\circ$.

**2815.** — Calculer les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$ et de $\frac{\pi}{12}$.

**2816.** — Calculer $\sin\frac{a}{3}$ connaissant $\operatorname{tg}\frac{a}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{2}{3}a$ connaissant $\cos\frac{a}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{6}$ connaissant $\sin\frac{a}{2}$.

**2817.** — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{m} = x$ en fonction de $\operatorname{tg} a = b$. On arrive à une équation de la forme $b = \frac{f(x)}{F(x)}$, $f(x)$ et $F(x)$ désignant des polynomes. Démontrer que les racines des équations $f(x) = 0$, $F(x) = 0$ sont toutes réelles et se séparent mutuellement.

**2818.** — Calculer $\cos 2x$ sachant que l'on a $\sin x = 1 - \cos 3x$.

**2819.** — Mettre sous la forme d'un carré $2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$. On trouve $(1 + \sin x + \cos x)^2$. Interprétation géométrique.

**2820.** — Calculer l'angle $x$ tel que $x = 4 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$ et l'angle $y$ tel que $y = 2 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$.

**2821.** — Rendre calculable $(1 + i)^m + (1 - i)^m$, $m$ désignant un entier quelconque.

**2822.** — Rendre calculable $\sin p + \cos q$.

**2823.** — Sachant que l'on a $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$, calculer $\cos m\theta$, $m$ désignant un nombre entier positif.

**2824.** — On donne un angle $a$. Construire l'angle $x$ tel que $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}}$. Déterminer cet angle géométriquement et analytiquement.

**2825.** — Sachant que $a + b + c = \frac{\pi}{2}$, rendre calculable $\cos a + \cos b + \cos c$.

**2826.** — Démontrer que toute fonction entière de $\sin x$ et de $\cos x$ peut se mettre sous la forme d'une fonction linéaire des sinus et cosinus des multiples de $x$.

**2827.** — Résoudre les équations suivantes :

$$4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0; \qquad \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} 2x = \frac{\pi}{2}; \qquad \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 4; \qquad \frac{\operatorname{tg}(x+a)}{\operatorname{tg}(x-a)} = m;$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}; \qquad \sin x \sin 3x = \sin 5x \sin 7x; \qquad \sin\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{8} - x\right); \qquad 2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{cotg} x = a$$

**2828.** — Déterminer la forme d'un triangle dans lequel on a

$$1^\circ\ \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}; \qquad 2^\circ\ \sin C = \cos A + \cos B.$$

**2829.** — Résoudre un triangle connaissant : 1° le périmètre et les angles ; 2° les trois hauteurs.

**2830.** — On donne un triangle OAB et un point $\omega$ situé sur la perpendiculaire menée par le point O au plan du triangle. On connaît les angles $O\omega B$, $O\omega A$ et $A\omega B$. Calculer l'angle AOB.

**2831.** — Dans les triangles ABC et A'B'C', l'angle B est égal à l'angle B' et l'angle A est supplémentaire de A'. Démontrer que l'on a $aa' = bb' + cc'$.

**2832.** — Dans un triangle ABC calculer l'angle de la médiane AM et du côté BC.

**2833.** — Dans tout triangle on a $\cos A = \frac{2R + r - r_a}{2R}$, $R$, $r$, $r_a$ désignant les rayons des cercles circonscrit, inscrit, exinscrit dans l'angle A.

## III. — Géométrie analytique à deux dimensions.

**2834.** — Construire les courbes qui ont pour équations, en coordonnées rectilignes :

$$y = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x+1)}, \quad y = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-l}, \quad y = x + \sqrt{\frac{x^3+1}{x+2}}, \quad y^2 = x^3 - x, \quad y = x\sqrt{a-x},$$

$$y = 4x^3 - 5x + 1, \quad y = xe^{\frac{3x^2-p}{(3x^2+p)q}}, \quad y = e^{\frac{2x}{x^2-1}}, \quad y = ax + \frac{b}{\sqrt{x}}, \quad y = e^{\sqrt{x^2-1}},$$

$$y = \frac{x^m - 1}{x^2 - 1}, \quad y = \frac{4x(1-x^2)}{1 - 6x^2 + x^4}, \quad y = e^{\operatorname{tg} x}, \quad y^4 - y^2 + x^2 = 0, \quad 2x^3y^2 - y^3 - x^3 = 0,$$

$$x^2(y+a)^2 + 2ay(xy - y^2) = 0, \quad (x^2+y^2)^2 - x^2(ax+by) = 0, \quad y^3 + y + x^5 - 5x^3 = 0, \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad (2x+y)^2(x-y) + x(y+2x) + 2y = 0,$$

$$(x^2-y^2)^2 - a^2(x^2+y^2) = 0, \quad x^3y - x^4 + y^2 = 0, \quad x^3y + x^2 + y^2 = 0, \quad x^2y - 2y^3 + 3xy + 1 = 0, \quad x^3 - y^4 + x - y = 0,$$

$$x^3 + y^3 - y^2 + 6x - 1 = 0, \quad xy^4 - 2x^3y^2 + x^2 - 1 = 0, \quad x^7 + x^4y^3 - 6y = 0, \quad x^3 - 2xy^2 + 2y^2 - y = 0, \quad x^5 - y^5 - 5a^3xy = 0,$$

$$4x^3y^2 - x^2 + 8y^2 = 0, \quad x^4 + y^4 - 3xy^2 + 2x - 1 = 0, \quad xy^2 - y^3 + 2x^2 - 1 = 0, \quad 2x^3y^2 - xy^3 - 1 = 0, \quad x^2y^2 - 2(x-2)y + 4x - 7 = 0$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad x^5 - y^5 - 4y = 0, \quad x^4y + y^4 - x^2 = 0, \quad x^3y^2 - 2y^3 + 8x^2 = 0, \quad x^2y + y^3 - 4x^2 + x = 0.$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t^3}, \\ y = \dfrac{t^2}{(1-t)^3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3}, \\ y = \dfrac{1+t}{2+t}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t^3-1}, \\ y = \dfrac{t-1}{t^3+1}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t^3}{1-t^3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t^3}{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t+1}{t^2+1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t+1}{t^4-1}, \\ y = \dfrac{t^2}{t^4-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{t^3}{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t-2}{(1-t)^2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2+t}{1-t}, \\ y = \dfrac{2-t}{1+t}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1-t}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{1-t+t^2}{1-t}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1-t^3}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{1+t^3}{1-t^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{L}t-t-1}{t^2+1}, \\ y = \dfrac{t+1}{t^2+1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1+\mathrm{L}t+2t^2}{1-\mathrm{L}t} \\ y = \dfrac{2t}{1+\mathrm{L}t}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{L}t-t^2-1}{t}, \\ y = \dfrac{2t^2+1}{t}. \end{cases}$$

**2835.** — Points d'inflexion des courbes $y^2 = x^3 - x$, $y = e^{\operatorname{tg} x}$.

**2836.** — Construire les courbes qui ont pour équations en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{\cos 3\omega}{\cos\omega}, \quad \rho = \frac{1+2\sin\omega}{1-2\cos\omega}, \quad \rho = \frac{\sqrt{3}-2\sin\omega}{\sqrt{3}+2\cos\omega}, \quad \rho = \cos\omega + \cos 2\omega, \quad \rho = \operatorname{tg}\frac{2\omega}{3},$$

$$\rho = \operatorname{tg}\omega + \operatorname{cotg}\omega, \quad \rho = \cos\omega + \operatorname{tg}\omega, \quad \rho = \cos\omega + \frac{1}{\cos\omega}, \quad \rho = \frac{1}{\cos 3\omega}, \quad \rho = \sin\omega + \frac{1}{\sin\omega},$$

$$\rho = \frac{1+\sin\omega}{\cos\frac{\omega}{2}}, \quad \rho = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1+2\cos\omega}, \quad \rho = a\cos 3\omega, \quad \rho = \frac{\sin\omega}{1-2\cos\omega}, \quad \rho = a\cos\omega\sin^2\omega,$$

$$\rho = \sin\frac{2}{3}\omega, \quad \rho = a^2\sin 2\omega, \quad \rho = \frac{\sqrt{1+\sin\omega}}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}, \quad \rho = \frac{\sqrt{1-2\cos\omega}}{\sin\frac{\omega}{2}}, \quad \rho = \frac{\sqrt{1+\sin\omega}}{\cos\frac{\omega}{2}},$$

$$\rho = \mathrm{L}(\omega^2-3\omega+2), \quad \rho = \frac{\sin\omega}{\omega}, \quad \rho = \frac{\cos\omega}{\omega}, \quad \rho = \frac{\sin^2\omega}{\omega^3}, \quad \rho = \frac{\sin\omega}{\omega-\alpha},$$

$$\frac{m}{\rho} = e^{\omega}+e^{-\omega}, \quad \frac{m}{\rho} = \omega\cos\omega - \sin\omega, \quad \frac{m}{\rho} = \omega^3+p\omega+q, \quad (4\cos^2\omega-3)\rho^2 - 4\rho\sin\frac{\omega}{2} - 1 = 0, \quad \rho^2(1+2\cos\omega) - 2\rho\cos\frac{\omega}{2} + 1 = 0,$$

$$\rho^2\cos\omega - 4\rho\sin\frac{\omega}{2} + \sin\omega = 0, \quad \rho^2(1+\cos\omega) - 2\rho\sin\frac{\omega}{2} + 1 = 0, \quad \rho^2\operatorname{tg}\omega - 2\rho\sin\frac{\omega}{2} + 1 = 0, \quad \rho^2(1+2\sin\omega) - 4\rho\cos\frac{\omega}{2} - 1 = 0,$$

$$\rho^4\cos\frac{\omega}{2} - 2\rho^2 + \sin\omega = 0, \quad \rho^2(1+2\cos\omega) - 3\rho\sin\omega + 2 = 0, \quad \rho^3(1-2\sin\omega) - 2\rho + 1 = 0, \quad \rho^3\operatorname{tg}\omega - 2\rho\cos^2\omega + \sin\omega = 0.$$

**2837.** — Démontrer que les asymptotes de la courbe $\dfrac{m}{\rho} = \omega\cos\omega - \sin\omega$ sont tangentes à une courbe algébrique.

**2838.** — La courbe $\rho = \dfrac{\cos\omega}{\omega}$ rencontre un rayon vecteur donné en une infinité de points. Démontrer que les tangentes en tous ces points sont tangentes à une courbe algébrique.

**2839.** — Aire d'un parallélogramme en fonction des coordonnées de ses sommets.

**2840.** — On donne deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$ et deux droites D et $\Delta$ dans leur plan. Par le point O on mène une sécante rencontrant D en A et $\Delta$ en B. Par le point A on mène une parallèle à $Ox$ et par le point B une parallèle à $Oy$; les deux droites se coupent en un point dont on demande le lieu.

**2841.** — On donne un cercle et un point P. Par ce point on mène une sécante PAB et sur AB comme diagonale on construit un rectangle dont les côtés ont des directions données. Lieu des sommets de ce rectangle.

**2842.** — On donne un cercle ayant son centre à l'origine des coordonnées et rapporté à deux axes rectangulaires. D'un point M quelconque du cercle on abaisse MP perpendiculaire sur $Ox$, et à partir du point M sur le rayon OM on porte une longueur MN égale à MP. Lieu du point N. Le cercle de diamètre MP rencontre OM au point Q. Lieu du point Q.

**2843.** — On donne un triangle ABC; trouver le lieu des points M tels que MA = MB + MC. Cas où le triangle est équilatéral.

**2844.** — Calculer les coordonnées des points de rencontre des tangentes communes aux deux cercles

$$(x-a)^2+(y-b)^2-\mathrm{R}^2=0, \qquad (x-a')^2+(y-b')^2-\mathrm{R}'^2=0.$$

**2845.** — Équation de la figure inverse du cercle $x^2+y^2-\mathrm{R}^2=0$ par rapport au point $(\alpha, \beta)$. Expliquer le facteur $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$.

**2846.** — Lieu des projections d'un point sur les cordes d'un cercle qui sont vues de ce point sous un angle droit.

**2847.** — Soient $p, q, r, \ldots$ les distances d'un point M à des points fixes P, Q, R,.... Si on a une certaine relation $f(p, q, r, \ldots) = 0$, le point M décrit une courbe. Démontrer que la normale à cette courbe est la résultante des segments portés sur les droites MP, MQ, MR,... et respectivement égaux à $f'_p$, $f'_q$, $f'_r$,.... Application aux courbes $p+q=2a$ (ellipse) et $p-q=2a$ (hyperbole).

**2848.** — On donne la courbe $y^2 = x^3 - x$; lieux des milieux des cordes parallèles à la bissectrice des axes $x-y=0$.

**2849.** — Lieu du centre d'un cercle tangent à un cercle et à un diamètre de ce dernier cercle.

**2850.** — On donne la courbe $(x^2+y^2)(ax+by)+y^2-x^2=0$. Une sécante menée par le point double O coupe la courbe en un point M. Trouver l'enveloppe de la droite menée par M perpendiculaire à MO.

**2851.** — On considère la courbe $x = a(1+3t^2)$, $y = at^3$. Une tangente à cette courbe rencontre $Ox$ en A. On prend sur $Ox$ un point B tel que le segment $\overline{AB}$ soit constant, puis par le point B on mène une parallèle à $Oy$ qui rencontre la tangente au point M. Lieu du point M.

**2852.** — On donne deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, deux points A et A' sur $Ox$ et un point B sur $Oy$. Par le point O on mène une sécante variable qui rencontre AB en C et A'B en C'. Lieu du point d'intersection des circonférences circonscrites aux triangles OAC, OA'C'.

**2853.** — Si une courbe a deux axes de symétrie non rectangulaires, elle en admet au moins un troisième.

**2854.** — Mener à la courbe $x^4y^2 = 1$ des normales par l'origine. Équation de la normale en fonction du coefficient angulaire.

**2855.** — On donne deux cercles égaux et tangents, et on demande le lieu du point de rencontre de la polaire d'un point M d'un des cercles par rapport à l'autre avec la parallèle à la ligne des centres menée par le point M.

**2856.** — Courbe diamétrale d'une cubique. Cas où la direction est asymptotique. Points de rencontre de la courbe diamétrale et de la cubique.

**2857.** — Courbe diamétrale de la courbe $x^4 - y^4 = a^4$.

**2858.** — Mener par un point du plan des tangentes à la courbe $x^3y^2 = a^5$. Discuter.

**2859.** — Même problème pour la courbe $y^5 - a^2x^3 = 0$. Courbe diamétrale relative à la direction $y = 2x$.

**2860.** — Intersection de la courbe $x^5 - y^5 - a^5 = 0$ et de la droite $ax + vy + w = 0$. Discuter. Même question pour la courbe $x^7 - a^3y^4 = 0$.

**2861.** — Soient $Ox$ et $Oy$ deux diamètres rectangulaires d'un cercle. On mène les rayons OA et OB faisant les angles $\omega$ et $2\omega$ avec $Ox$. Lieu du point M de rencontre des parallèles à $Oy$ et $Ox$ menées par A et B.

**2862.** — Lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes est constant.

**2863.** — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe $y^2 = x^3$.

**2864.** — Lieu des centres des cercles tangents à un cercle fixe et tels que la distance du centre du cercle variable à une droite fixe soit proportionnelle au rayon.

**2865.** — Lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux cercles tangents à deux droites données.

**2866.** — Courbe diamétrale d'une courbe du quatrième degré. Intersection des deux courbes. Expliquer le résultat.

**2867.** — Construire les coniques représentées par les équations :

$$5x^2 + 6xy + y^2 - 4 = 0 \quad \text{(axes en grandeur et en position)}, \quad y = x^2 - 3x + 2, \quad y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 5x + 4},$$
$$x^2 - 3xy + 3y^2 - 4 = 0, \qquad y = x \pm \sqrt{x^2 - 3x + 2}, \qquad y + x \pm \sqrt{x + 1} = 0 \quad \text{(sommet, axe, foyer)};$$
$$x^2 + xy + 2y^2 + 3y = 0 \quad \text{(points où les tangentes sont parallèles à } Ox \text{ et } Oy), \quad y = 1 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 3},$$
$$y = x^2 - 7x + 12 \quad \text{(foyer)}, \qquad x = y - 2 \pm \sqrt{4 - y^2} \quad \text{(sommets)}.$$

**2868.** — Mener à l'hyperbole $xy = k^2$ les normales parallèles à une direction donnée.

**2869.** — Les axes de coordonnées étant obliques, trouver le foyer et la directrice de la parabole $y^2 - 2px = 0$. Equation focale.

**2870.** — Construire une conique connaissant un foyer et trois points. Solution géométrique et analytique.

**2871.** — Lieu des projections du foyer d'une ellipse sur les tangentes, géométriquement et par le calcul.

**2872.** — On projette un foyer d'une ellipse sur une tangente et sur la normale au point de contact. Montrer que la droite qui joint ces deux points passe par le centre.

**2873.** — Trouver les foyers de la conique $4x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$.

**2874.** — Ecrire que la conique $f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + \ldots = 0$ admet pour directrice la droite $ux + vy + w = 0$ (axes de coordonnées obliques).

**2875.** — Lieu des centres des hyperboles dont les sommets décrivent chacun une droite fixe, dont une asymptote passe par un point fixe et dont l'autre est parallèle à une direction fixe.

**2876.** — On donne une parabole et un point P. Par ce point on mène une sécante rencontrant la parabole aux points A et B. Lieu du point de rencontre des normales aux points A et B. Cas où le point P est le foyer.

**2877.** — Démontrer que le produit des distances d'un point d'une hyperbole aux asymptotes est constant.

**2878.** — Etant donnée la conique $2x^2 - 4xy = 1$, trouver l'équation d'une conique semblable à la conique donnée et ayant pour sommets l'origine et le point $x = 1$, $y = 1$.

**2879.** — Former l'équation générale des hyperboles admettant pour asymptote une droite donnée, pour foyer un point qui décrit une droite donnée, pour directrice correspondante une droite passant par un point donné. Lieu du deuxième foyer.

**2880.** — Trouver l'enveloppe des droites coupant une conique suivant des cordes ayant leurs milieux sur une droite donnée. Cas où la droite est parallèle à l'un des axes de la conique.

**2881.** — Enveloppe des cordes de longueur constante d'une ellipse.

**2882.** — Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse fixe et à un cercle variable tangent à l'ellipse et de rayon constant.

**2883.** — Lieu des foyers des paraboles de grandeur constante tangentes à une ellipse fixe et ayant leur axes parallèles au petit axe de l'ellipse.

**2884.** — Lieu du centre d'un cercle tangent à une conique et passant par un point fixe.

**2885.** — Equation générale des coniques qui ont un foyer donné et qui sont normales aux axes de coordonnées.

**2886.** — Lieu des points d'où l'on voit une conique sous un angle donné. Application au cercle et à la parabole. Solution géométrique.

**2887.** — Lieu du centre d'une ellipse de grandeur constante assujettie à rester tangente à une droite donnée en un point donné.

**2888.** — Trouver l'enveloppe de la polaire d'un point fixe par rapport à un cercle de rayon constant dont le centre décrit une parabole.

**2889.** — Lieu du sommet d'une parabole de grandeur constante qui se déplace en restant tangente à deux cercles.

**2890.** — On donne une ellipse, et on demande le lieu d'un point M tel que le triangle formé par les tangentes à l'ellipse issues du point M et par le grand axe de l'ellipse ait une aire constante.

**2891.** — Lieu des foyers des coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés. Solution géométrique.

**2892.** — Lieu des points de rencontre des tangentes issues de deux points fixes à des cercles concentriques. Solution géométrique.

**2893.** — Équation des paraboles passant par les points de rencontre des axes de coordonnées et des droites

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{c} + \frac{y}{d} - 1 = 0.$$

Construire ces paraboles.

**2894.** — Lieu du foyer d'une parabole de grandeur constante dont l'axe a une direction fixe et qui se déplace en restant tangente à un cercle donné.

**2895.** — La normale en un point d'une ellipse divise l'aire de l'ellipse en deux segments ; on demande le rapport des aires de ces deux segments.

**2896.** — Lieu des centres des hyperboles équilatères de grandeur constante dont une asymptote passe par un point fixe et dont un foyer décrit une droite fixe.

**2897.** — Lieu des centres des cercles tangents à une ellipse et à deux tangentes parallèles à l'ellipse.

**2898.** — Lieu des foyers des paraboles ayant un sommet donné et tangentes à une droite.

**2899.** — Trouver l'équation de l'ensemble des diamètres conjugués égaux d'une ellipse définie par l'équation générale $Ax^2 + 2Bxy + \ldots = 0$.

**2900.** — Lieu des symétriques d'un point par rapport aux tangentes à une conique.

**2901.** — On donne deux coniques C et C' ; une corde variable AB de la conique C est tangente à C'. Par les points A et B on mène des tangentes à C', lieu de leur point de rencontre.

**2902.** — Lieu des centres des cercles tangents à une ellipse et à deux diamètres conjugués de l'ellipse.

Lieu des centres des cercles passant par le centre d'une ellipse et par les extrémités de deux diamètres conjugués.

**2903.** — On joint un point fixe O à un point M d'une parabole ; dire *a priori* la classe de l'enveloppe de la perpendiculaire MT à OM.

**2904.** — Discuter les paraboles passant par l'intersection de deux coniques. Condition de réalité. Si les deux coniques ont une direction asymptotique commune, les deux paraboles sont confondues.

**2905.** — Lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à une conique.

**2906.** — On considère les deux coniques $2x^2 - 4xy = 1$, $x^2 + 6xy - 2y + 1 = 0$ ; trouver l'équation du cercle passant par les trois points à distance finie de ces coniques.

**2907.** — Lieu du centre de la conique

$$3x^2 - 6(a-1)xy + (a+1)y^2 - 4x - 2ay + 1 = 0,$$

quand $a$ varie.

**2908.** — Equation générale des coniques ayant pour directrice la droite $2x + y - 1 = 0$, normales à $Oy$ et passant par l'origine.

**2909.** — Lieu des centres des ellipses de grandeur constante tangentes à deux droites fixes.

**2910.** — On donne une ellipse et deux diamètres conjugués AB et CD. Les normales en A et C se coupent en M, es normates en B et D se coupent en N. Enveloppe de la droite MN quand les diamètres se déplacent.

**2911.** — Enveloppe des axes des paraboles passant par l'intersection d'une ellipse fixe et d'un cercle de centre fixe dont le rayon est variable.

**2912.** — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique définie par l'équation générale, les axes de coordonnées étant obliques.

**2913.** — Equation générale des coniques passant par les pieds des normales issues d'un point à une parabole. Hyperboles équilatères du réseau ; lieu de leurs centres.

**2914.** — On considère les coniques passant par trois points et conjuguées par rapport à deux points. Elles forment un faisceau. Trouver le quatrième point commun. Cas où les deux derniers points sont les points cycliques.

**2915.** — Lieu des sommets des coniques ayant un foyer donné et tangentes à une droite donnée en un point donné.

**2916.** — Lieu d'un point tel que les pieds des normales issues de ce point à une parabole soient les sommets d'un triangle rectangle.

**2917.** — Lieu des sommets et des foyers des paraboles passant par deux points et dont l'axe a une direction donnée.

**2918.** — Lieu des milieux des cordes de longueur constante d'une parabole.

**2919.** — Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse et à un cercle variable qui lui est tangent en un point fixe.

**2920.** — Déterminer dans une ellipse deux diamètres conjugués OM et OM' tels que l'angle OMM' soit droit.

**2921.** — Etant donnée une ellipse, on considère un polygone régulier ayant son centre au centre de l'ellipse. On joint ce centre aux sommets du polygone et on désigne par $\rho_k$ la longueur interceptée sur chaque droite entre le centre et l'ellipse. Démontrer que $\Sigma \frac{1}{\rho_k^2}$ est constante.

**2922.** — Un cercle variable touche une ellipse en un point fixe et la rencontre en deux autres points A et B. Lieu du milieu de AB. Solution géométrique.

**2923.** — Lieu des foyers des coniques passant par quatre points.

**2924.** — Un cercle quelconque passant par les foyers d'une ellipse rencontre les tangentes aux sommets du grand axe, en quatre points. En joignant convenablement ces points, on obtient deux tangentes à l'ellipse. Réciproque.

**2925.** — Lieu des foyers des paraboles de grandeur constante et touchant deux droites fixes.

**2926.** — Dans une ellipse les deux foyers réels décrivent deux droites données et les deux sommets du petit axe décrivent aussi deux droites données. Lieu du centre de cette ellipse.

**2927.** — Lieu des pôles des normales à une ellipse par rapport à un cercle ayant son centre sur le petit axe.

**2928.** — Lieu des sommets des paraboles de grandeur constante passant par un point fixe et dont l'axe a une direction donnée.

**2929.** — Equation générale des hyperboles asymptotes à une droite donnée, tangentes à une droite donnée et ayant un foyer sur une droite donnée. Construire l'hyperbole quand on se donne le foyer.

**2930.** — Lieu des foyers des paraboles qui ont un sommet donné et qui passent par un point donné.

**2931.** — Lieu des centres des coniques ayant un sommet donné et passant par deux points donnés.

**2932.** — On donne une conique définie par son équation générale et une droite; condition pour que la droite intercepte dans la conique une corde vue de l'origine sous un angle constant. Lieu des projections de l'origine sur la droite. Comment varie ce lieu quand la conique varie en passant par quatre points fixes ?

**2933.** — Lieu des foyers des paraboles dont le sommet reste fixe et qui sont tangentes à une ellipse donnée.

**2934.** — Par un point fixe d'une conique on mène deux cordes rectangulaires variables rencontrant la conique en A et B. Lieu du point de rencontre des tangentes en A et B.

**2935.** — On considère les deux paraboles qui passent par les quatre points d'intersection d'une ellipse fixe avec deux droites rectangulaires issues d'un point fixe. Lieu du point de rencontre des axes de ces paraboles.

**2936.** — Lieu des centres des coniques passant par trois points et tangentes à une droite.

**2937.** — Equation générale des coniques tangentes à $Ox$ en un point donné et admettant pour directrice la droite $y = 2x$. Lieu des foyers.

**2938.** — On donne deux coniques homofocales, on mène une tangente à l'une, puis une tangente perpendiculaire à l'autre. Lieu du point de rencontre de ces tangentes. Cas où les deux coniques coïncident ; cas où l'une d'elles se réduit aux foyers de l'autre.

**2939.** — Enveloppe des ellipses d'aire constante qui ont pour axes $Ox$ et $Oy$.

**2940.** — Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds des normales menées à une ellipse par un point variable de la courbe.

**2941.** — Mener par un point deux droites conjuguées par rapport à une conique et rectangulaires. Cas où le point est foyer. Généraliser en remplaçant la condition d'être perpendiculaires par celle d'être parallèles à deux diamètres conjugués d'une deuxième conique.

**2942.** — Equation générale des coniques circonscrites à un triangle et passant par le centre de gravité.

**2943.** — Etant donnée une conique $f(x, y) = 0$ et un point $(x_0, y_0)$ reconnaître si ce point est extérieur ou intérieur à la conique.

**2944.** — Construire une conique connaissant 1° quatre tangentes et un point du cercle orthoptique, 2° deux tangentes et trois points du cercle orthoptique.

**2945.** — On coupe la conique $x^2 - 2Bxy - y^2 + 2Cx + 2Dy = 0$ par deux droites rectangulaires passant par l'origine. Ces droites rencontrent la conique aux points A et B. Démontrer que la droite AB est parallèle à une droite fixe.

**2946.** — On donne une parabole $y^2 - 2px = 0$ et un cercle $(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0$ ; on mène au cercle deux tangentes parallèles qui rencontrent la parabole en quatre points. Lieu des points de rencontre des droites qui joignent ces points deux à deux.

**2947.** — Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites. Incidemment construire une parabole tangente à quatre droites.

**2948.** — On considère les paraboles tangentes à $Oy$ et passant par deux points de $Ox$. Lieu des pôles d'une droite donnée par rapport à ces paraboles. Lieu des foyers.

**2949.** — Normales issues du point $(a, b)$ à la courbe $y^2 = 2px + qx^2$.

**2950.** — Construire une hyperbole connaissant une asymptote et trois points.

**2951.** — Lieu du point de rencontre des normales aux extrémités d'une corde d'une hyperbole, quand cette corde se déplace parallèlement à elle-même.

**2952.** — Lieu des pôles des normales à une hyperbole par rapport à un cercle ayant son centre sur l'axe non transverse.

**2953.** — On considère la courbe $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\omega}$ ; trouver le lieu des points de contact des tangentes issues d'un point de l'axe polaire à cette courbe quand $e$ varie. Construire le lieu et déterminer géométriquement les points à l'infini.

**2954.** — Déterminer les tangentes menées du point $(\rho_0, \omega_0)$ à la courbe $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\omega}$. Discuter.

**2955.** — Une parabole de grandeur constante tourne autour de son foyer supposé fixe. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction fixe. Traiter la question en coordonnées polaires.

**2956.** — On donne une courbe $\rho = f(\omega)$, un point $M(r, \alpha)$ de cette courbe et on demande l'équation du cercle passant par le pôle, par le point M et tangent (ou orthogonal) à la courbe en ce point.

**2957.** — Trouver par rapport à un point de l'axe polaire la podaire du cercle $\rho = a\cos\omega + b\sin\omega$. Enveloppe de ces podaires quand le point considéré se déplace sur l'axe polaire.

**2958.** — Etant donnée l'équation d'une conique en coordonnées polaires, le foyer étant au pôle et l'axe focal étant l'axe polaire, démontrer que la somme des inverses des $n$ rayons vecteurs correspondant aux valeurs de l'angle polaire $\omega_0$, $\omega_0 + \dfrac{2\pi}{n}$, $\omega_0 + \dfrac{4\pi}{n}$, ..., $\omega_0 + \dfrac{2(n-1)\pi}{n}$ est indépendante de $\omega$. Démontrer ensuite que la somme des carrés des inverses des $n$ rayons vecteurs relatifs aux valeurs $\omega_0$, $\omega_0 + \dfrac{\pi}{n}$, $\omega_0 + \dfrac{2\pi}{n}$, ..., $\omega_0 + \dfrac{(n-1)\pi}{n}$ est aussi constante.

**2959.** — Construire la courbe $\rho = a^\omega$, et démontrer que l'angle du rayon vecteur et de la tangente est constant.

**2960.** — On donne un cercle de centre O et un point A. On joint le point A à un point quelconque B du cercle, on joint BO et par le point O on mène une perpendiculaire à OB; cette perpendiculaire rencontre AB en un point M dont on demande le lieu. Traiter la question en coordonnées polaires.

## IV. — Géométrie analytique à trois dimensions.

**2961.** — Trouver la perpendiculaire commune à deux droites en cherchant le minimum de la distance d'un point de l'une à un point de l'autre.

**2962.** — On donne un système d'axes rectangulaires, et une droite $\Delta$ passant par l'origine et ayant pour cosinus directeurs $a$, $b$, $c$. On fait tourner un point $M(x, y, z)$ autour de $\Delta$ d'un angle $\theta$. Calculer les coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ de sa nouvelle position.

**2963.** — Equation générale des surfaces égales à la surface $xyz = a^3$, les axes de coordonnées étant rectangulaires.

**2964.** — P, Q, R désignant des fonctions linéaires indépendantes, démontrer qu'un plan quelconque peut être représenté par une équation de la forme $\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta = 0$.

**2965.** — On donne les coordonnées de trois points dans l'espace, calculer les coordonnées du point de concours des hauteurs du triangle formé par ces trois points. Aire du triangle.

**2966.** — Trouver les coordonnées du symétrique d'un point par rapport à un plan ou par rapport à une droite. En déduire l'équation de la symétrique d'une surface donnée ou les équations de la symétrique d'une courbe donnée par rapport à un plan ou à une droite.

**2967.** — Etant données les cosinus directeurs de trois droites $D_1$, $D_2$, $D_3$ passant par l'origine, calculer le cosinus de l'angle des plans $D_1D_2$ et $D_1D_3$. En déduire la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

**2968.** — Condition pour que l'équation générale du deuxième degré à trois variables représente un système de deux plans : 1° sécants ; 2° perpendiculaires ; 3° parallèles.

**2969.** — Etant donnée l'équation d'un système de deux plans, trouver les équations de chacun de ces plans.

**2970.** — Equation des bissectrices des deux droites $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0$ et $2(x - x_0) = 3(y - y_0) = 4(z - z_0)$.

**2971.** — Etant donnés deux points $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$, calculer les coordonnées d'un point C tel que le triangle ABC soit équilatéral et que son plan soit parallèle à $Oz$.

**2972.** — Etant donné un point $\omega(x_0, y_0, z_0)$ et un point $M(x, y, z)$ trouver les coordonnées du point M' situé sur la droite $\omega M$ et tel que l'on ait $\overline{\omega M}.\overline{\omega M'} = k$.

**2973.** — Perpendiculaire commune aux deux droites $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ et $z = 0$, $ax + by + c = 0$.

**2974.** — Equation de la surface engendrée par une circonférence qui rencontre $Oz$ en un point, dont le plan reste parallèle à un plan fixe et qui rencontre en deux points une circonférence située dans le plan des $xy$. Cas où cette dernière circonférence passe par l'origine.

**2975.** — Surface de révolution engendrée par la courbe $x^2 + y^2 + z^2 - k^2 = 0$, $ux + vy + wz = 0$ tournant autour de $Oz$.

**2976.** — On donne dans le plan des $xy$ la circonférence $z = 0$, $x^2 + y^2 - 2ax + b = 0$ et sur l'axe des $z$ un point M de cote $h$. Trouver la figure inverse de la circonférence par rapport au point M, la puissance d'inversion étant égale à $k^2$.

**2977.** — On considère une hélice tracée sur un cylindre de révolution dont une génératrice est $Oz$ et dont l'axe rencontre $Ox$. Trouver l'équation de la surface de révolution engendrée par cette hélice tournant autour de $Oz$. Déterminer la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la surface obtenue. Montrer que par cette courbe passe un cylindre algébrique.

**2978.** — Lieu du milieu d'une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites données.

**2979.** — On donne une sphère et deux droites, on considère une droite variable s'appuyant sur les deux droites et tangente à la sphère. Lieu du point de contact.

**2980.** — Lieu des segments de longueur constante s'appuyant sur deux droites.

**2981.** — Equation du tore dont l'axe est $Oz$. Courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à une direction donnée. Étudier la projection de cette courbe sur le plan des $xy$ en coordonnées polaires.

**2982.** — Equation d'une surface de révolution circonscrite à une surface donnée et ayant un axe donné.

**2983.** — Surface diamétrale de la surface $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ pour la direction $x = y = z$.

**2984.** — On projette la courbe $x = 0$, $f(y, z) = 0$ sur un plan variable passant par $Oz$ ; lieu de cette projection. La surface obtenue est coupée par le plan $z = h$ suivant un cercle. Démontrer que les plans tangents en tous les points de ce cercle rencontrent $Oz$ au même point.

**2985.** — Circonscrire un cône du second degré aux deux surfaces de révolution ayant pour axe $Oz$ et engendrées par les courbes $x^2 - 2pz = 0$, $z^2 - 2px = 0$ situées dans le plan des $zx$.

**2986.** — Diamètres conjugués égaux de l'ellipse définie par les équations $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $ux + vy + wz = 0$.

**2987.** — Sommet de la parabole $y^2 - 2px = 0$, $ux + vy + wz + h = 0$.

**2988.** — Sommet de la parabole $xy - az = 0$, $ux + vy = 0$.

**2989.** — On donne deux cercles dans l'espace et dans chacun d'eux un rayon fixe OA et O'A'. On mène dans les deux cercles des rayons variables OB et O'B' tels que $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$. Lieu engendré par la droite BB'.

**2990.** — Equation de la surface engendrée par une droite qui reste parallèle au plan des $xy$ et s'appuie sur $Oz$ et sur l'ellipse $x = a$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Volume de la surface limitée à l'axe des $z$ et à la conique donnée.

**2991.** — Equation générale des surfaces de révolution circonscrites à la surface $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ et admettant pour axe une droite donnée.

**2992.** — Lieu de l'intersection de deux plans rectangulaires passant chacun par une droite fixe. Montrer géométriquement que les sections par des plans perpendiculaires à chacune des droites fixes sont des cercles. Cas où les droites données se rencontrent.

**2993.** — Lieu des droites rencontrant le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ et rencontrant $Oz$ sous un angle constant. Cas particulier où l'angle est égal à $\frac{\pi}{4}$.

**2994.** — Etudier la courbe $x = \frac{t}{1-t}$, $y = \frac{1-t}{1+t}$, $z = \frac{1+t}{t}$. Asymptotes. Equation du cône s'appuyant sur cette courbe et ayant pour sommet le point de la courbe dont le paramètre est $t_0$.

**2995.** — Equation du cône ayant pour sommet un point de $Oz$ et s'appuyant sur la courbe $z = 0$, $y = e^{x^3+px+q}$. Couper ce cône par un plan de façon que la section n'ait pas de point à l'infini.

**2996.** — En chaque point de la section du cylindre $y^2 - 2px = 0$ par le plan $ux + vy + wz + r = 0$ on mène la normale au cylindre. Equation de la surface formée par ces normales.

**2997**. — Démontrer qu'une quadrique est de révolution quand son équation est symétrique par rapport à $x, y, z$. Exemple : que représente l'équation $yz + zx + xy = 1$?

**2998** — Etudier les quadriques :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 2ayz - 2bzx - 2cxy = 1 \quad (a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad abc = k, \quad a + b + c = 0).$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 - (z - x)^2 + 2x - 2y = 0, \qquad PQ + R = 0 \quad (P, Q, R \text{ fonctions linéaires}),$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 + 2x - 2y = 0 \quad (\text{éléments de la section droite}),$$

$$(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 = 1 \quad (\text{section par le plan } ax + by + cz = \lambda),$$

$$(x - y)^2 + (z - x)^2 - 2x = 0 \quad (\text{paramètres des paraboles principales}),$$

$$ayz + bzx + cxy = 1 \quad (a^2 + b^2 + c^2 = 1), \qquad abc = k^2 \quad (\text{lieu des sommets}).$$

$$(-x + y + z)^2 + (x - y + z)^2 + (x + y - z)^2 = 1 \quad (\text{axes de la surface}), \quad (x - y)^2 + (z - 2x)^2 - y = 0 \quad (\text{sections circulaires}),$$

$$2yz + 4zx - 2xy - 2x - 1 = 0, \qquad x^2 - 2yz - 2x - 2y - 2z = 0 \quad (\text{axes}), \quad (x + y + z)^2 + (x + y)^2 - 2z = 0,$$

$$z = 3x + y - 1 \pm \sqrt{y^2 - 2xy + 2x}, \qquad x^2 + y^2 + 2yz - 2x = 0, \qquad x^2 - y^2 + 3z^2 + 2\lambda xy - 1 = 0 \quad (\text{plans principaux}),$$

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2yz - 4zx + 4xy + 4x + 2y - 2z = 0 \quad (\text{éléments}), \quad 2x^2 + 2y^2 - z^2 - 6xy + 2x - y = 0,$$

$$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1,$$

$$(2x - y + 3z)^2 + (3x + 2y - 3z)^2 + (3x + y)^2 = 1 \quad (\text{section droite}), \quad (x + y)(y - z) + z - x = 1 \quad (\text{paramètres des paraboles principales})$$

$$PQ + \lambda RS = 0 \quad (\text{discuter}).$$

**2999**. — Lieu des axes des cônes du deuxième degré passant par une ellipse et dont les sommets décrivent une droite donnée.

**3000**. — Etant donné le paraboloïde $x^2 - y^2 - 2z = 0$, et le point $x', y', z'$ de la surface, trouver l'angle des génératrices déterminées par le plan tangent en ce point.

**3001**. — Lieu des sommets des ellipses déterminées dans un ellipsoïde par les plans tangents à un cône de révolution ayant son sommet au centre de l'ellipsoïde.

**3002**. — Lieu des sommets des paraboloïdes de révolution passant par une ellipse.

**3003**. — On donne un hyperboloïde à une nappe de centre O; par un point A de l'ellipse de gorge on mène une génératrice AG sur laquelle on prend un point M tel que AM soit égal au demi-diamètre conjugué de OA dans l'ellipse de gorge. Lieu du point M.

**3004**. — Démontrer que les normales menées d'un point à un ellipsoïde sont sur un cône du deuxième degré. Dans quel cas ce cône se décompose-t-il en deux plans? Pourrait-on déduire de la l'équation de l'ensemble des plans principaux d'une quadrique définie par l'équation générale?

**3005**. — On donne un ellipsoïde E et une droite D. Par la droite on mène des plans coupant la surface suivant des ellipses. Lieu des sommets de ces ellipses.

**3006**. — On donne un ellipsoïde et un point A; par ce point on mène une sécante rencontrant la surface en deux points B et C. Est-il possible que les normales en B et C se rencontrent? Lieu des sécantes qui jouissent de cette propriété.

**3007** — Lieu des axes des hyperboloïdes de révolution passant par deux droites données.

**3008**. — Etudier les quadriques passant par deux paraboles qui ont deux points communs.

**3009**. — Trouver l'équation du cylindre circonscrit à un paraboloïde parallèlement à une direction donnée. Nature de ce cylindre.

**3010**. — Lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes rencontrent une parabole. Solution géométrique.

**3011**. — Equation générale des quadriques circonscrites à une quadrique donnée et tangentes au plan des $xy$.

**3012**. — Lieu des sommets des coniques sections planes d'une quadrique par des plans passant par une normale fixe de la quadrique.

**3013**. — Lieu des centres des ellipsoïdes de grandeur donnée passant par une ellipse.

**3014**. — On considère un cône ayant pour sommet un point de l'axe des $z$ et pour directrices une conique variable passant par les quatre points de rencontre des deux coniques fixes $z = 0$, $ax^2 + by^2 - 1 = 0$ et $z = 0$, $a'x^2 + b'y^2 - 1 = 0$. Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les plans principaux de ces cônes.

**3015**. — On considère l'hyperboloïde engendré par la droite $\Delta$ $(x = a, \ y = mz)$ tournant autour de $Oz$ et le cylindre engendré par une droite parallèle à $\Delta$ et passant par le point $(\alpha, \beta, 0)$ tournant autour de $\Delta$. Déterminer les équations de ces surfaces et celle de la projection de l'intersection sur le plan des $xy$.

**3016**. — Condition pour que le cône $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$ contienne trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

**3017**. — Condition pour que deux cônes ayant pour sommets l'origine soient égaux. Déduire de là les conditions pour qu'un cône soit de révolution.

**3018**. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les génératrices d'un hyperboloïde. Cas particulier où le point est le centre de la surface.

**3019**. — Lieu des sommets des cônes de grandeur donnée circonscrits à un ellipsoïde.

**3020**. — On donne trois axes de coordonnées $Ox$, $Oy$, $Oz$ et trois points A, B, C respectivement situés sur $Ox$, $Oy$, $Oz$. Former l'équation d'un ellipsoïde ayant pour diamètres conjugués en grandeur et en position AO, AB, AC.

**3201**. — Equation d'un cylindre circonscrit à un ellipsoïde dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée. Trouver les axes de ce cylindre.

**3022**. — On donne une quadrique $f(x, y, z) = 0$ et deux plans $ux + vy + wz + r = 0$, $u'x + v'y + w'z + r' = 0$. Exprimer que l'un est parallèle au diamètre conjugué de l'autre. Montrer qu'il y a réciprocité.

**3023**. — Lieu des projections d'un point sur les plans tangents à un paraboloïde hyperbolique équilatère. Vérifier que la surface obtenue contient des cercles.

**3024**. — Condition pour qu'un plan coupe un cône du deuxième degré suivant deux génératrices rectangulaires.

**3025**. — Lieu des sommets des paraboloïdes passant par deux droites qui ne se rencontrent pas.

**3026**. — Démontrer que lorsque deux quadriques sont inscrites dans un même cône, elles sont inscrites dans un second.

**3027.** — On donne un paraboloïde de révolution ayant pour axe $Oz$, on le coupe par un plan, et on demande l'équation du cône ayant pour sommet le foyer du paraboloïde et pour base la section du paraboloïde par le plan. Démontrer que le cône est de révolution. Même question pour un ellipsoïde de révolution.

**3028.** — On fait tourner un ellipsoïde autour d'un de ses axes, et par un point on mène des normales à cet ellipsoïde, lieu des pieds de ces normales.

**3029.** — Trouver les plans cycliques d'un cône dont on donne les coordonnées du sommet et la base qui est une ellipse dans le plan des $xy$.

**3030.** — Lieu des milieux des cordes d'une quadrique passant par un point.

**3031.** — En un point d'un hyperboloïde à une nappe on mène les bissectrices des deux génératrices de ce point. Trouver les équations de ces bissectrices. Engendrent-elles une surface quand le point se déplace sur l'hyperboloïde ?

**3032.** — Condition pour que la droite $\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$ soit tangente à la quadrique définie par l'équation générale $f(x,y,z)=0$. Que représente la condition obtenue si on y considère $x_0, y_0, z_0$ comme des coordonnées courantes.

**3033.** — Trouver l'aire de la courbe de contact de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ et du cône circonscrit de sommet $(x_0, y_0, z_0)$.

**3034.** — Lieu des foyers des sections centrales d'un ellipsoïde.

**3035.** — Lieu des perpendiculaires communes à une génératrice fixe d'un paraboloïde et à une génératrice variable.

**3036.** — Lieu des centres des sphères de rayon donné bitangentes à un ellipsoïde. Cas où le rayon est nul.

**3037.** — On coupe l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ par les plans $z=h$, $z=h'$. Démontrer que les deux sections sont homothétiques. Trouver le rapport et le centre d'homothétie.

**3038.** — Conditions pour que la surface $(az-bx)(cz-by)-z^2=0$ soit de révolution. Les conditions étant remplies, trouver l'axe.

**3039.** — Combien passe-t-il de cônes par l'intersection de deux quadriques ? Cas où les deux surfaces ont une génératrice commune. Démontrer qu'alors l'équation en $\lambda$ a deux racines doubles.

**3040.** — On assujettit une conique à rencontrer $p$ droites de l'espace. Quelle est la valeur de $p$ pour que la conique soit déterminée ? Construire cette conique.

**3041.** — Combien faut-il de conditions pour écrire qu'une droite (ou une conique) est située sur une surface du troisième degré ?

**3042.** — Lieu des normales à un hyperboloïde aux divers points d'une même génératrice.

**3043.** — Equation générale des quadriques ayant pour plan principal le plan $x=y$ et bitangentes à la sphère $x_2+y_2+z_2+4y=0$. Incidemment équation générale de quadriques bitangentes à une quadrique donnée.

**3044.** — Former l'équation d'un ellipsoïde de révolution ayant pour foyers deux points donnés F et F′ situés sur $Ox$ et symétriques par rapport au point O.

**3045.** — On donne une quadrique $f(x,y,z)=0$ et un plan $ux+vy+wz+h=0$, et on demande l'équation du cône ayant pour sommet l'origine et pour base la section de la surface par le plan. On suppose la quadrique fixe et le plan variable ; comment varie le cône ? Cas particulier où la surface passe par l'origine.

**3046.** — Etant donné un cône $Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0$ ayant pour sommet l'origine, trouver la condition pour que le plan $ux+vy+wz=0$ coupe ce cône suivant deux droites perpendiculaires.

**3047.** — On donne dans une quadrique huit plans tangents dont cinq passent par un même point et deux plans conjugués par rapport à la quadrique. On prend un point sur la droite intersection de ces deux derniers plans ; déterminer le cône circonscrit à la quadrique ayant ce point pour sommet.

**3048.** — On donne le plan de Monge d'un paraboloïde hyperbolique et une génératrice. Combien faut-il de conditions pour déterminer le paraboloïde ? On donne une deuxième génératrice rencontrant la première. Équation du paraboloïde. Construire son axe et son sommet.

**3049.** — Construire un paraboloïde de révolution connaissant l'axe et deux plans tangents.

**3050.** — Dans un paraboloïde on donne une génératrice, un point de l'axe et trois points. Equation de la surface.

**3051.** — Déterminer une quadrique de révolution connaissant un plan tangent et le point de contact, deux plans tangents et un point de l'axe.

**3052.** — Dans un paraboloïde on donne un plan directeur, une génératrice parallèle à ce plan et un plan principal. Le paraboloïde est-il déterminé ? On suppose le plan directeur horizontal et le plan principal défini par deux droites ; on donne en outre un point de la surface, construire l'axe et le sommet.

**3053.** — On donne une parabole qui est la section d'un paraboloïde hyperbolique par le deuxième bissecteur, puis une génératrice et un point. Le paraboloïde est-il déterminé ? Plan tangent au point donné.

**3054.** — On donne dans un paraboloïde une génératrice, la direction de l'axe, deux points et on assujettit les plans directeurs à être rectangulaires. Equation du paraboloïde. Construire les plans directeurs, l'axe et le sommet.

**3055.** — On donne dans une quadrique un axe en grandeur et en position. Combien faut-il donner de points pour achever de déterminer la quadrique ? On donne trois points : équation de la quadrique. Discuter.

**3056.** — Existe-t-il une quadrique tangente à trois plans en des points donnés ?

**3057.** — Dans un paraboloïde on donne un diamètre D, une génératrice rectiligne G, un plan tangent et son point de contact. Equation de la surface. Construire géométriquement le sommet.

**3058.** — Equation générale des quadriques ayant pour ombilic l'origine des coordonnées.

**3059.** — Equation de la surface engendrée par une droite variable s'appuyant sur les trois droites $x=0$, $z=k$; $y=0$, $z=k'$; $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Discuter la nature de la surface.

**3060.** — A combien de conditions assujettit-t-on une quadrique en donnant un cône circonscrit ? Solution analytique et géométrique. Equation générale des quadriques inscrites dans un cône. Et si l'on donne deux cônes circonscrits ? montrer qu'ils doivent être bitangents.

**3061.** — Démontrer que toute génératrice de la surface est tangente à un cône circonscrit quelconque.

**3062.** — On donne trois points d'un cylindre hyperbolique équilatère et un plan asymptote. La surface est-elle déterminée ? Trouver son équation et construire son axe.

**3063.** — On donne deux points d'un cylindre hyperbolique, un plan tangent et son point de contact et un point de l'axe du cylindre, le cylindre est-il déterminé ? Trouver ses équations et construire le cylindre.

**3064.** — On donne un cercle, une droite rencontrant ce cercle et deux points. Existe-t-il une quadrique passant par le cercle, la droite et les deux points? Construire le centre de cette surface.

**3065** — On donne un foyer de la méridienne d'une surface du second degré de révolution et quatre points de la surface La surface est-elle déterminée ? Trouver son équation et construire géométriquement le plan directeur correspondant au foyer donné.

**3066.** — Déterminer une quadrique connaissant une parabole de la surface et deux génératrices de même système.

**3067.** — On donne dans un cylindre de révolution deux points, un plan tangent et le point de contact, le cylindre est-il déterminé? Trouver son équation, et le construire.

**3068.** — On donne un cercle, une droite D passant par son centre et non située dans son plan et une droite Δ rencontrant le cercle. Existe-t-il une quadrique contenant le cercle, la droite Δ et admettant D comme diamètre conjugué de la direction du plan du cercle ?

**3069.** — On donne un diamètre d'un paraboloïde et une génératrice. Combien cela fait-il de conditions ? On donne une deuxième génératrice ne rencontrant pas la première. Le paraboloïde est-il déterminé ? On donne un point. Déterminer le paraboloïde.

**3070.** — Déterminer un hyperboloïde de révolution connaissant deux génératrices de même système et un point.

**3071.** — On donne un plan asymptote d'une quadrique, combien cela fait-il de conditions ? Combien faut-il de plans asymptotes pour déterminer une quadrique ? On donne cinq plans asymptotes et un point, déterminer la quadrique.

**3072.** — Équation d'un paraboloïde dont on donne une génératrice, l'axe et le plan de Monge. Construire géométriquement le sommet.

**3073.** — Déterminer une quadrique connaissant deux cônes circonscrits et un plan tangent.

**3074.** — Trouver l'équation d'un cylindre de révolution connaissant un plan tangent et le point de contact et un point de l'axe. Déterminer le cylindre géométriquement.

**3075.** — Etant donné un quadrilatère gauche et un plan ; on considère la quadrique ayant pour génératrices les côtés du quadrilatère et tangente au plan. Trouver les génératrices contenues dans le plan. Etant donné un point de ce plan, trouver le cône circonscrit à la quadrique ayant ce point pour sommet.

**3076.** — On donne dans une quadrique un système de trois diamètres conjugués égaux, combien cela fait-il de conditions?

**3077.** — Trouver l'équation de la quadrique engendrée par une parabole ayant l'origine pour sommet, l'axe $Oz$ pour axe et assujettie à rencontrer une droite donnée.

**3078.** — Une quadrique de révolution est-elle déterminée par une section plane et deux points? La construire géométriquement et former son équation.

**3079.** — Dans un paraboloïde on donne le sommet, un plan directeur et une génératrice non parallèle à ce plan. Déterminer le paraboloïde.

**3080.** — Trouver l'équation d'un hyperboloïde de révolution à une nappe connaissant un point de l'axe, un plan tangent et le point de contact et deux autres plans tangents.

**3081.** — Construire un paraboloïde de révolution connaissant une ellipse tracée sur la surface et un point.

**3082.** — Déterminer un cône de révolution connaissant un plan tangent et le point de contact et une génératrice.

**3083.** — Déterminer un paraboloïde de révolution connaissant le plan directeur et trois points.

**3084.** — Construire une quadrique connaissant le cône asymptote et un point (ou un plan tangent).

**3085.** — On donne dans une quadrique un axe en grandeur et en position ; combien cela fait-il de conditions? On assujettit en outre la quadrique à passer par trois points. Equation de la surface.

**3086.** — On donne un diamètre d'un paraboloïde, deux génératrices et un point ; combien cela fait-il de conditions ? en supposant que les deux génératrices se rencontrent, trouver l'équation du paraboloïde ainsi défini. Construire le sommet.

**3087.** — Existe-t-il une quadrique inscrite dans trois trièdres trirectangles ?

**3088.** — Construire l'axe d'un hyperboloïde de révolution connaissant deux plans tangents et leurs points de contact et un autre point.

**3089.** — On donne deux cercles C et C' dans des plans horizontaux différents. Une quadrique passant par ces deux cercles est-elle déterminée? On donne en outre un point de la section de cette surface par le deuxième bissecteur.

**3090.** — On donne un point du plan principal d'un cylindre parabolique, la direction des génératrices et trois points. Equation du cylindre.

**3091.** — On donne dans une quadrique un plan asymptote et un plan tangent. Combien cela fait-il de conditions ?

**3092.** — Déterminer une quadrique connaissant un cône circonscrit, une génératrice et un plan tangent. Construire le cône circonscrit à cette surface ayant pour sommet un point donné.

**3093.** — On donne dans une quadrique un axe et une section plane. La quadrique est-elle déterminée ?

**3094.** — On donne l'axe d'une quadrique de révolution et sur cet axe un foyer de la méridienne. Combien cela fait-il de conditions ? Equation générale des surfaces correspondantes.

**3095.** — On donne dans une quadrique un axe, un sommet situé sur cet axe et un sommet en dehors. Combien cela fait-il de conditions ? Equation générale de ces surfaces.

**3096.** — On donne les trois droites

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1},\qquad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2},\qquad \frac{x-x_3}{a_3}=\frac{y-y_3}{b_3}=\frac{z-z_3}{c_3}.$$

Trouver l'équation de l'hyperboloïde qu'elles définissent. Centre de cette surface.

**3097.** — Equation générale des quadriques passant par deux droites et ayant un plan principal donné.

**3098.** — Ecrire que la quadrique $f(x, y, z) = 0$ est de révolution autour de la droite $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$.

**3099**. — Etant donnée la quadrique $f(x, y, z) = 0$, écrire que le point $(a, b, c)$ est : 1° ombilic, 2° sommet, 3° foyer de la méridienne de la surface supposée de révolution.

**3100**. — Etant donnée la quadrique $f(x, y, z) = 0$, écrire que le plan $ux + vy + wz + r = 0$ est : 1° plan cyclique, 2° plan d'équateur de la surface supposée de révolution, 3° plan principal.

**3101**. — Etant donnée la quadrique $f(x, y, z) = 0$ et la droite définie par les équations $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ ou $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, écrire que cette droite est : 1° axe, 2° diamètre conjugué d'une direction de plan cyclique, 3° axe de révolution de la surface supposée de révolution.

**3102**. — Etant donnée la quadrique $f(x, y, z) = 0$, écrire que l'axe $Ox$ fait partie d'un des systèmes de diamètres conjugués égaux de la surface.

**3103**. — Etant donnée la quadrique $f(x, y, z) = 0$, écrire que les deux points $(a, b, c)$ et $(a', b', c')$ sont deux ombilics non situés sur le même diamètre.

**3104**. — Ecrire que l'axe $Oz$ est diamètre conjugué de plan cyclique pour la quadrique $f(x, y, z) = 0$.

**3105**. — Comment se coupent deux quadriques qui se raccordent en tous les points d'une génératrice ? Traiter la question géométriquement et par le calcul.

**3106**. — Intersection de deux quadriques ayant une génératrice commune et un point de contact en dehors. Une cubique gauche peut-elle avoir un point double ?

**3107**. — Deux quadriques sont telles qu'il existe deux points admettant un même plan P pour plan polaire par rapport aux deux quadriques. Quelle est l'intersection de ces deux surfaces?

**3108**. — Intersection de deux paraboloïdes qui ont un plan directeur commun et une génératrice commune.

**3109**. — Intersection de deux quadriques qui se touchent en trois points d'une même génératrice.

**3110**. — Intersection de deux quadriques bitangentes. Traiter la question par la géométrie et par le calcul.

**3111**. — On considère deux quadriques passant par les droites $P = 0$, $Q = 0$, et $R = 0$, $S = 0$ qui ne se rencontrent pas ; trouver le reste de l'intersection.

**3112**. — Comment se coupent deux quadriques tangentes en un point et telles qu'un point donné ait même plan polaire par rapport à ces deux quadriques.

(*A suivre.*)

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1148**. — Il existe quatre cercles tangents à une ellipse et à deux quelconques de ses tangentes. Les points de contact de ces cercles avec l'ellipse sont sur l'hyperbole homofocale à cette ellipse qui passe par le point de rencontre des deux tangentes. M. D'OCAGNE.

**1149**. — Soient deux triangles homologiques ABC, $\alpha\beta\gamma$ dont l'un, ABC, est fixe, et dont l'autre se déplace de façon que ses sommets décrivent respectivement trois droites données $a$, $b$, $c$.

1° Quand les droites $a$, $b$, $c$ forment un véritable triangle, trouver la loi de correspondance qui existe entre le centre et l'axe d'homologie.

2° Quand les droites $a$, $b$, $c$ sont concourantes, montrer que l'axe d'homologie touche une courbe indépendante du déplacement du centre d'homologie. Cette courbe est une conique. Dans quel cas est-ce une parabole ?

3° Supposant ce cas réalisé, déterminer la directrice de cette parabole et dire ce qu'elle est quand $a$, $b$, $c$ sont perpendiculaires aux milieux des côtés de ABC. L. BICKART.

**1150**. — L'indice de réfraction de l'eau pour le rouge est 1,33, pour le violet 1,34. L'indice de réfraction de l'air est en moyenne 1,000293. En supposant que le pouvoir dispersif de l'air soit les $\frac{11}{20}$ de celui de l'eau, calculer approximativement la différence des vitesses de la lumière rouge et de la lumière violette dans l'air.

# DEUXIÈME PARTIE

## ALGÈBRE

**1089**. — *Trouver un polynome du troisième degré tel qu'en le multipliant par un polynome du premier degré on obtienne le carré de sa dérivée. — Expliquer le résultat obtenu.*

Soit $ax^3 + bx^2 + cx + d$ le polynome cherché ; si nous le multiplions par $\alpha x + \beta$ nous obtenons

un polynome du quatrième degré qui doit être le carré de la dérivée

$$3ax^2 + 2bx + c.$$

Nous devons donc obtenir l'identité

$$(\alpha x + \beta)(ax^3 + bx^2 + cx + d) \equiv (3ax^2 + 2bx + c)^2,$$

qui se traduit par les égalités

$$a\alpha = 9a^2, \qquad a\beta + b\alpha = 12ab, \qquad c\alpha + b\beta = 4b^2 + 6ac,$$
$$d\alpha + c\beta = 4bc, \qquad d\beta = c^2.$$

La première donne $\alpha = 9a$, la seconde, $\beta = 3b$, et, en portant dans les autres, nous obtenons les relations

$$b^2 = 3ac \qquad bc = 9ad, \qquad c^2 = 3bd;$$

elles donnent successivement $\frac{b^2}{a^2} = \frac{3c}{a}$ et $\frac{b^3}{a^3} = 27\frac{d}{a}$. Par suite le polynome cherché est $a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3}\right)$, ou $a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3$. C'est donc un cube parfait et un cube quelconque, puisque $a$ et $b$ ont des valeurs quelconques.

Cette solution pouvait se prévoir *a priori*, car de l'égalité

$$(\alpha x + \beta)f(x) \equiv [f'(x)]^2,$$

il résulte évidemment que $f(x)$ ne peut avoir de racine qui n'appartienne à la dérivée ; par conséquent $f(x)$ ne peut avoir aucune racine simple, il ne peut donc avoir qu'une racine triple. D'ailleurs si cela est, l'identité est évidemment possible : il n'y a qu'à prendre pour $\alpha x + \beta$ le facteur primaire correspondant à la racine et multiplié par un nombre convenable $\alpha$.

M. Laisant, qui s'est occupé de cette question malgré sa simplicité, fait remarquer que le problème est susceptible de généralisation : on peut se proposer de trouver dans quel cas on a $\varphi(x)f(x) \equiv [f'(x)]^2$, c'est-à-dire dans quel cas un polynome entier divise le carré de sa dérivée. La solution est immédiate : on voit de suite en effet que le polynome n'ayant aucune racine qui n'appartienne à la dérivée, ne doit avoir que des racines multiples ; il est donc de la forme $X_2^2 . X_3^3 \ldots X_p^p$, en employant les notations usuelles, et, par suite, on a

$$\frac{f'}{f} \equiv \frac{2X_2'}{X_2} + \frac{3X_3'}{X_3} + \frac{4X_4'}{X_4} + \ldots;$$

donc aussi

$$\frac{f'^2}{f} \equiv \frac{2Xf_2'}{X_2} + \frac{3X_3'f'}{X_3} + \frac{4X_4'f'}{X_4} + \ldots,$$

et par conséquent le quotient de $f'^2$ par $f$ est un polynome entier, ce qui montre que la condition énoncée est suffisante.

Très bonnes solutions : MM. J. Haag, lycée de Nancy ; R. Javelot.
Bonnes solutions : MM. J. Marchal ; Odou, pensionnat de Valbenoite ; P. Tribier ; R. Bouvaist ; R. Manen, petit séminaire de Massals ; Th. Souls ; E.-N. Barisien ; A. Godain, à Bougie.

---

**1099**. — *On considère les déterminants de la forme*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & a & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & a \end{vmatrix},$$

*où $a$ désigne un nombre entier quelconque et $n$ l'ordre du déterminant ; démontrer que l'on a*

$$\Delta_{n+1} = (a-1)\Delta_n + (a-1)^n.$$

Considérons le déterminant $\Delta_{n+1}$, et dans ce déterminant retranchons les éléments de la deuxième colonne de ceux de la première ; nous avons

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-a & a & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Développons ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne. Le coefficient du premier élément $a-1$ est le déterminant $\Delta_n$, celui du second élément $1-a$ est au signe près le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix},$$

et nous avons

$$\Delta_{n+1} = (a-1)\Delta_n + (1-a)D_n.$$

Dans le déterminant $D_n$ retranchons les éléments de la première colonne de ceux de toutes les autres colonnes ; cela fait, on voit aisément que dans le déterminant obtenu, tous les éléments sont nuls d'un même côté de la diagonale principale, par suite ce déterminant se réduit à son terme principal qui est $(a-1)^{n-1}$. On a donc

$$D_n = (a-1)^{n-1},$$

et par suite

$$(1) \qquad \Delta_{n+1} = (a-1)\Delta_n + (a-1)^n.$$

Remarque. — Cette formule pourrait servir à calculer $\Delta_n$, mais il est plus aisé d'opérer de la manière suivante.

Ajoutons aux éléments de la première ligne les éléments de toutes les autres lignes; nous avons

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+n-1 & a+n-1 & a+n-1 & \dots & a+n-1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta_n = (a+n-1)D_n$$

et

$$\Delta_n = (a+n-1)(a-1)^{n-1},$$

ce qui permet de vérifier immédiatement la formule (1).

J. MARCHAL.

Bonnes solutions par : MM. R. Bouvaist ; A. Duron, lycée de Rouen ; A. Godain, commis des ponts et chaussées, à Bougie ; J. Haag, lycée de Nancy ; L. Messent ; M Rebeix ; L. Sade, lycée de Marseille ; Souls ; P. Thonet.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1098.** — *On considère deux ellipses homofocales et on les coupe par une hyperbole variable homofocale ; on appelle points correspondants les points ainsi obtenus sur les deux ellipses et on demande de démontrer :*

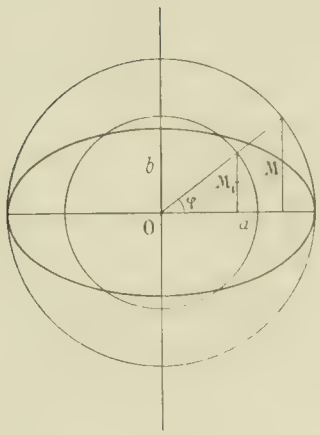
1° *Que les coordonnées de deux points correspondants sont proportionnelles aux axes des deux ellipses fixes;*

2° *Que les carrés des diamètres qui aboutissent à deux points correspondants ont leur différence constante;*

3° *Que les cordes qui joignent diagonalement deux couples de points correspondants ont des longueurs égales.*

Soit M un point d'une ellipse dont les coordonnées sont

$$(1)\quad \begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi. \end{cases}$$




Faisons varier les axes de l'ellipse de façon que les foyers soient fixes et cherchons le lieu du point M correspondant à une valeur donnée $\varphi$ de l'angle excentrique.

Il suffira d'éliminer $a$ et $b$ entre les relations (1) et la condition

$$a^2 - b^2 = c^2;$$

on trouve ainsi

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2\varphi} - \frac{y^2}{c^2\sin^2\varphi} - 1 = 0.$$

C'est une hyperbole ayant mêmes foyers que les ellipses et passant par le point M.

**1.** Il en résulte que deux points correspondants sont deux points pris sur deux ellipses de la famille et correspondant à la même valeur de l'angle excentrique.

Soient alors $a$ et $b$ et $a_1, b_1$ les axes de deux ellipses. Les coordonnées de deux points correspondants seront

$$\mathrm{M}\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi; \end{cases} \qquad \mathrm{M}_1\begin{cases} x_1 = a_1\cos\varphi, \\ y_1 = b_1\sin\varphi. \end{cases}$$

D'où on déduit immédiatement

$$\frac{x}{a} = \frac{x_1}{a_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{y}{b} = \frac{y_1}{b_1}.$$

**2.** On a

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 = x^2 + y^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$

ou, en tenant compte de la relation $a^2 - b^2 = c^2$,

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 = a^2 - c^2\sin^2\varphi;$$

de même,

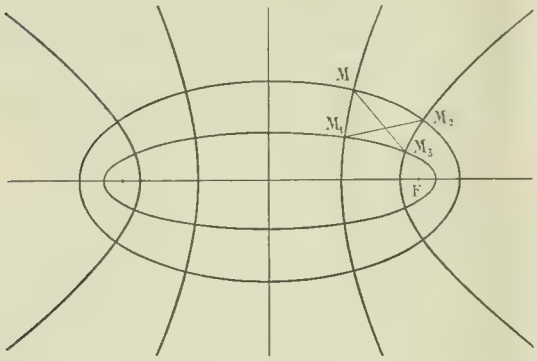
$$\overline{\mathrm{OM}}_1^2 = a_1^2 - c^2\sin^2\varphi;$$

par suite,

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 - \overline{\mathrm{OM}}_1^2 = a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2.$$

La différence des carrés de deux diamètres aboutissant à deux points correspondants est donc constante et égale à la différence des carrés des axes de même nom des deux ellipses.

**3.** Soient sur les mêmes ellipses deux couples de points correspondants relatifs aux valeurs $\varphi$ et $\varphi_1$




de l'angle excentrique.

Leurs coordonnées sont

$$M \begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi; \end{cases} \qquad M_1 \begin{cases} x_1 = a_1\cos\varphi, \\ y_1 = b_1\sin\varphi; \end{cases}$$

$$M_2 \begin{cases} x_2 = a\cos\varphi_1, \\ y_2 = b\sin\varphi_1; \end{cases} \qquad M_3 \begin{cases} x_3 = a_1\cos\varphi_1, \\ y_3 = b_1\sin\varphi_1; \end{cases}$$

et l'on aura

$$\overline{MM_3}^2 = (a\cos\varphi - a_1\cos\varphi_1)^2 + (b\sin\varphi - b_1\sin\varphi_1)^2,$$

ou $\overline{MM_3}^2 = a^2 + a_1^2 - c^2(\sin^2\varphi + \sin^2\varphi_1)$

$$- 2aa_1\cos\varphi\cos\varphi_1 - 2bb_1\sin\varphi\sin\varphi_1.$$

On aura de même

$$\overline{M_1M_2}^2 = a^2 + a_1^2 - c^2(\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi) - 2aa_1\cos\varphi\cos\varphi_1 - 2bb_1\sin\varphi\sin\varphi_1.$$

Donc

$$\overline{MM_3}^2 = \overline{M_1M_2}^2;$$

et les deux longueurs $MM_3$ et $M_1M_2$ sont égales.

J. MARCHAL.

Bonnes solutions : MM. J. Haag, lycée de Nancy : M. Laurence, lycée de Bordeaux.

**Deuxième solution.** — Ce problème peut se traiter très simplement par une méthode directe qui consiste à trouver les coordonnées des points de rencontre d'une ellipse de la famille avec une hyperbole de cette même famille.

Les équations de ces coniques sont

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0,$$

avec les relations $a^2 - b^2 = \alpha^2 + \beta^2 = c^2$.

On trouve aussi immédiatement

$$x^2 = \frac{a^2\alpha^2}{c^2}, \qquad y^2 = \frac{b^2\beta^2}{c^2}$$

et le problème s'achève sans peine.

E.-N. BARISIEN.

Solutions analogues : MM P. Verjus, lycée de Marseille ; H. Janois, à Châlons-sur-Marne ; A. Duron, lycée de Rouen.

**Troisième solution.** — Mais l'une des plus jolies solutions est la suivante :

Considérons le faisceau des coniques homofocales à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, le système

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - 1 = 0.$$

Il passe deux de ces coniques par un point $(x, y)$ du plan ; ce sont les coniques qui correspondent aux racines de l'équation en $\lambda$,

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - 1 = 0;$$

les deux racines de cette équation sont réelles, l'une, $\alpha$, est comprise entre $-b^2$ et $+\infty$, l'autre, $\beta$, entre $-a^2$ et $-b^2$ ; à la racine $\alpha$ correspond une ellipse réelle, à la racine $\beta$, une hyperbole. D'autre part, on a identiquement

$$(b^2+\lambda)x^2+(a^2+\lambda)y^2-(b^2+\lambda)(a^2+\lambda)\equiv-(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta);$$

pour $\lambda=-a^2$, on a $$x^2=\frac{(a^2+\alpha)(a^2+\beta)}{c^2},$$

et pour $\lambda=-b^2$, $$y^2=-\frac{b^2+\alpha)(b^2+\beta)}{c^2}.$$

Prenons deux valeurs plus grandes que $-b^2$, $\alpha$ et $\alpha'$, et un nombre $\beta$ compris entre $-a^2$ et $-b^2$, nous aurons des points correspondants sur les ellipses $\alpha$ et $\alpha'$; nous les aurons tous en faisant varier $\beta$; nous aurons deux couples de points correspondants en considérant deux valeurs particulières de $\beta$, $\beta$ et $\beta'$.

Le problème s'achève ensuite sans aucune peine.

M. Paul Verjus fait d'ailleurs remarquer avec juste raison que les propriétés énoncées ne sont que des cas particuliers de propriétés analogues dues à Chasles.

---

**1107**. — *On considère une parabole fixe* (P) *et un cercle* (C) *quelconque. Former l'équation de la courbe polaire réciproque du cercle par rapport à la parabole et trouver quel doit être le rayon du cercle* (C) *pour que cette conique soit une hyperbole équilatère.*

*Trouver le centre de cette hyperbole.*

Rapportons la parabole (P) à ses axes ordinaires et désignons par

$$y^2-2px=0$$

son équation. Représentons de même par

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$$

le cercle envisagé.

On sait que la condition de contact d'une droite $ux+vy+w=0$ avec le cercle est

$$R^2(u^2+v^2)-(au+bv+w)^2=0;$$

elle se retrouve d'ailleurs immédiatement en écrivant que la distance du centre à la droite est égale au rayon. Nous aurons alors la courbe polaire réciproque du cercle en prenant la polaire par rapport à la parabole d'un point $(x, y)$ du plan et en écrivant qu'elle est tangente au cercle, c'est-à-dire qu'elle vérifie la relation rappelée antérieurement. Or la polaire d'un point $(x, y)$ par rapport à la parabole a pour équation

$$-pX+yY-px=0;$$

l'équation demandée est donc

$$R^2(y^2+p^2)-(px-by+ap)^2=0;$$

elle représente une hyperbole quels que soient $a$, $b$ et R; ce sera une hyperbole équilatère si la somme des coefficients de $x^2$ et de $y^2$ est nulle, c'est-à-dire si l'on a

(1) $$R^2=p^2+b^2.$$

Le centre est donné par les deux équations

$$-pP=0,\qquad bP+R^2y=0,$$

où l'on pose $P\equiv px-by+ap$; il est donc donné par les deux équations $P=0$, $y=0$; ses coordonnées sont

$$x=-a,\qquad y=0.$$

Ce point est indépendant du rayon du cercle et décrit l'axe de la parabole.

Géométriquement tous ces résultats sont évidents. En effet, envisageons la courbe polaire réciproque du cercle comme étant le lieu des pôles des tangentes au cercle; il y en a deux parmi elles dont les pôles sont à l'infini, ce sont celles qui sont parallèles à l'axe et leurs pôles sont situés sur les directions conjuguées correspondantes; par conséquent la polaire réciproque du cercle est une hyperbole. Nous aurons les asymptotes de

cette hyperbole en prenant les polaires par rapport à la parabole des points de contact avec le cercle des deux tangentes parallèles à l'axe, c'est-à-dire les polaires des deux extrémités du diamètre perpendiculaire à l'axe; leur point de rencontre est donc le pôle du diamètre indiqué, par suite le centre de l'hyperbole est le symétrique du centre du cercle par rapport au sommet de la parabole; il n'y a rien à ajouter sur cette question.

Quant au rayon, il est facile de le déterminer à l'aide des coordonnées du centre par les considérations suivantes : les directions asymptotiques sont les tangentes à la parabole aux points où les deux tangentes au cercle parallèles à l'axe rencontrent cette ligne; pour qu'elles soient rectangulaires, il faut qu'elles se coupent sur la directrice; par conséquent la droite qui joint les deux points de la parabole situés sur les tangentes au cercle parallèles à l'axe doit passer au foyer; donc le diamètre du cercle est la projection sur une perpendiculaire à l'axe de la parabole d'une corde focale.

J. HAAG, lycée de Nancy.

Bonnes solutions : MM. H. Janois, à Châlons-sur-Marne, E.-N. Barisien; Y. Collin, à Laval.

## GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

**1076.** — *On demande de déterminer la projection horizontale de l'intersection d'un cylindre oblique avec un cylindre de révolution, les deux surfaces étant définies de la manière suivante :*

1° *Le cylindre oblique a pour base une circonférence* C *du plan horizontal (centre* O, *rayon* R = 40mm*) ; les génératrices inclinées à 45° sur le plan horizontal sont parallèles au plan vertical donné* VG *; le cylindre est limité par un plan horizontal supérieur de cote* $h = 100^{mm}$.

2° *Le cylindre de révolution est tangent au plan horizontal de projection. Son rayon est de* 40mm *et son axe est projeté horizontalement en* $\omega s \omega_1$. *Cette droite passe par le point* s *défini sur la figure et elle est perpendiculaire à la direction* VG. *Ce cylindre est limité à deux sections droites* N *et* $N_1$ *de positions données.*

*Cette première partie de l'épure s'exécutera complètement à l'encre. On admettra que les deux surfaces cylindriques sont opaques et qu'elles forment un seul solide. Les lignes cachées se représenteront par des traits pointillés. Cela fait, on supposera les solides éclairés par un point lumineux* S *donné par sa projection horizontale et sa cote* $h' = 150^{mm}$ *et on déterminera en projection horizontale les courbes d'ombres propres et celles d'ombres portées soit par les surfaces entre elles soit par les surfaces sur le plan horizontal.*

*Ces courbes se traceront au crayon d'un trait noir continu pour les parties vues et d'un trait noir pointillé pour les parties cachées.*

*Données numériques :* OI = 110mm ; OD = 65mm ; OB = Bs = 40mm ; $s\omega = s\omega_1 = 70^{mm}$.

(*Ecole centrale. 2e session, 1901.*)

*Intersection des deux cylindres.* — Prenons pour plan vertical de projection le plan vertical VG, en sorte que VG sera ligne de terre. Pour avoir l'intersection des deux surfaces nous emploierons des plans de bout inclinés à 45° sur le plan horizontal. Le plan limite $\delta\delta' d'$ donne $d$ en projection horizontale ; la tangente en $d$ est $d\delta$. Le plan auxiliaire contenant les génératrices de contour apparent horizontal du cylindre oblique donne $e$ et $f$. Au point $e$ il y a rebroussement, car c'est un point d'intersection des contours apparents des deux surfaces ; la tangente en $e$ est $es$ donnée par les sections circulaires en E, car $es$ est perpendiculaire à B$f$ qui joint les centres de ces sections.

La courbe, en projection horizontale, admet OB comme axe de symétrie ; on a en $k$ et $l$ les points sur cet axe à l'aide du plan auxiliaire B$k'l'$ ; elle est $edflf_1d_1e_1$.

*Ombres propres des deux surfaces.* — Le point lumineux est $s, s'$. Les plans tangents menés par ce point au cylindre oblique ont pour génératrices de contact C$\gamma$ et $C_1\gamma_1$ qui sont les séparatrices d'ombre et de lumière sur cette surface ; on en déduit l'ombre propre sur ce cylindre.

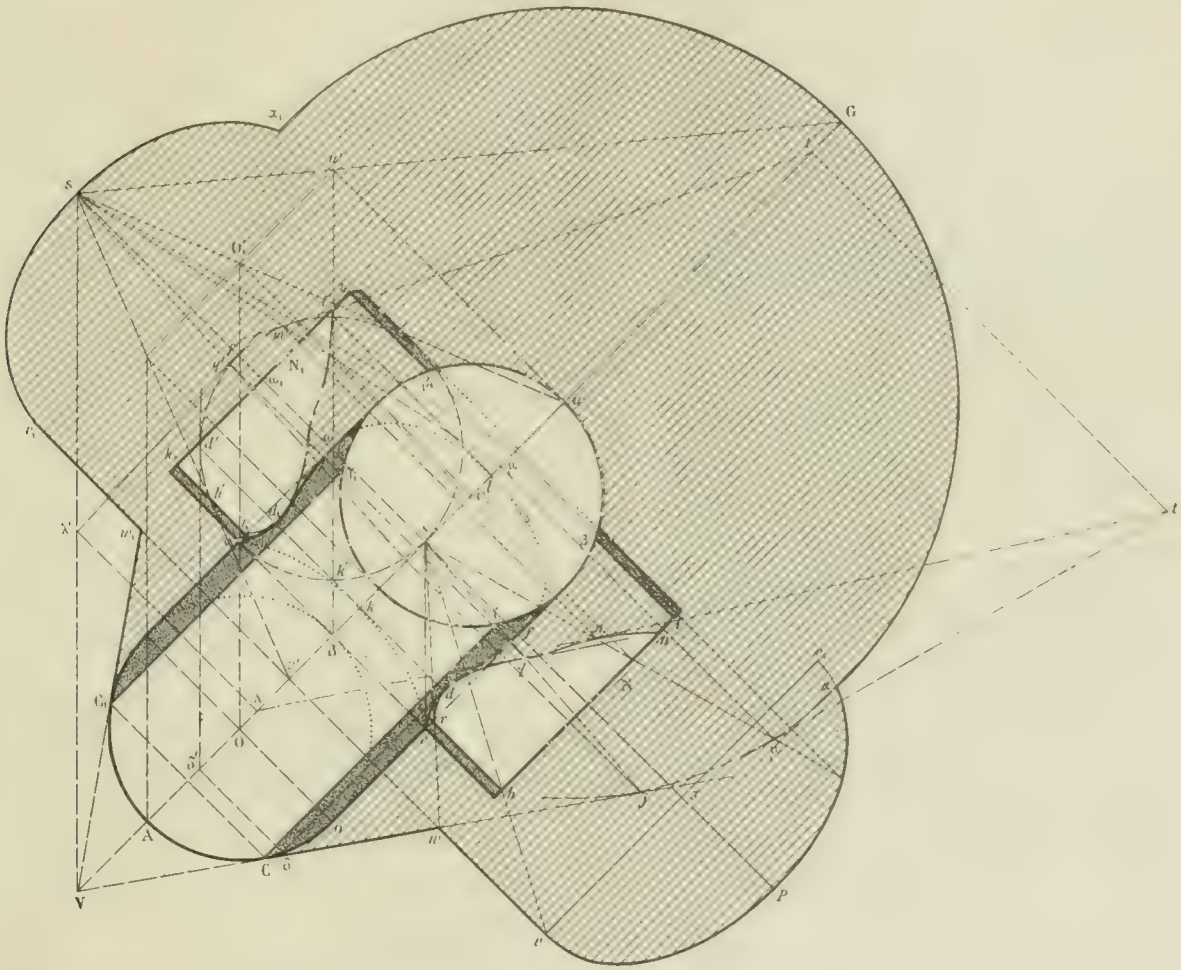
Pour le cylindre de révolution les génératrices de contact des plans tangents sont projetées en $hh_1$ et $ii_1$, d'où l'ombre propre sur cette surface.

*Ombres portées sur le plan horizontal.* — L'ombre portée par le cylindre oblique est la partie du plan horizontal comprise entre les traces horizontales des plans tangents issus de $s, s'$ et la circonférence, trace horizontale du cône qui a pour sommet S et pour directrice la base circulaire supérieure de ce cylindre. La trace d'un plan tangent est C$j$ ; la trace du cône est le cercle de centre $u$, trace horizontale de $sO_1, s'O'_1$, et qui passe par G, trace horizontale de $su, s'u'$. L'ombre portée est C$j$G et la partie symétrique par rapport à VG.

L'ombre portée par le cylindre de révolution est limitée par les traces horizontales des plans tangents issus de S ; l'un de ces plans est $s'v'v$, dont $v'v$ est la trace horizontale. L'autre est symétrique par rapport à $s\omega$.

Cette ombre est limitée d'autre part par les ellipses traces horizontales des cônes qui ont pour sommet le point lumineux S et pour directrices les bases circulaires de ce cylindre. L'une de ces ellipses est $vpv_1$ de grand axe $v\tau v_1$ et de demi-petit axe $\sigma p$; les sommets s'obtiennent en prenant les traces horizontales des génératrices du cône aboutissant l'une au point $h$, $h'$ qui est dans le plan tangent issu de S et l'autre au point le plus haut de la circonférence du cylindre.

La limite de l'ombre portée sur le plan horizontal est donc le contour exterieur formé par les deux ombres précédentes. C'est $Cuvp\alpha G\alpha_1 s' v_1 u_1 C_1$.




*Ombre portée par le cylindre oblique sur le cylindre de révolution.* — L'ombre portée en avant du plan vertical VG par le cylindre oblique est limitée par la portion de plan SC$j$ et par la portion de cône S$j$G ; l'ombre portée par le cylindre sur le cylindre de révolution sera donc limitée par l'intersection de ce cylindre de révolution avec cette portion de plan et cette portion de cône. Le plan SC$j$ coupe le cylindre suivant l'arc d'ellipse projetée en $rdq$. Le point $r$ sur $hh_1$ est donné par $s\omega$; en $d$ cette ellipse est tangente à l'arc de courbe d'intersection des deux surfaces; en $q$ la tangente est $q\lambda$.

L'intersection du cylindre et du cône S$\gamma$G est l'arc $qmn$ tangent en $q$ à $q\lambda$, c'est-à-dire à l'ellipse précédente. Nous avons construit un point quelconque $m$ en prenant une génératrice $s\mu$, $s'\mu'$ du cône et déterminant son intersection $m$, $m'$ avec le cylindre. La tangente en ce point est $mt$, $m't'$.

L'ombre portée est alors comprise entre les génératrices d'ombre, l'arc $rdqmn$, la droite $ni$ et le contour $edf\beta$ du cylindre oblique.

La seconde partie de cette ombre portée est symétrique de la précédente par rapport à VG.

Nous avons représenté par des hachures les ombres portées et par du grisé les ombres propres.

N. C.

## CONCOURS DE 1902

### CONCOURS GÉNÉRAUX DE BELGIQUE (athénées)

**Rhétorique des Humanités : anciennes** (*Section latine*), **modernes** (*Section scientifique*).

MATHÉMATIQUES (*Vendredi 25 juillet.*)

Les axes de coordonnées étant rectangulaires, que représente l'équation

$$(3y + 4x)(5y + 13x) + 2y + 8x - 8 = 0\,?$$

Quelle propriété de la courbe peut-on déduire de cette équation ?

Quelles valeurs faut-il donner à K, K', L pour que l'équation puisse s'écrire

$$(3y + 4x + K)(5y + 13x + K') + L = 0\,?$$

Que sont par rapport à la courbe les droites $3y + 4x + K = 0$, $5y + 12x + K' = 0$ ?

Quelles sont les coordonnées du centre de la courbe ? Déterminer les équations des axes et rapporter la courbe à ses axes.

Deux droites qui se coupent étant données, trouver sur une droite non située dans leur plan et qui ne les rencontre pas un point également distant de ces deux droites.

Démontrer que si la somme des angles d'un triangle sphérique ABC est égale à 4 angles droits,

$$\cos C = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}b.$$

Le côté AC d'un triangle ABC étant divisé au point M en moyenne et extrême raison, AM étant le plus grand segment, si on joint le point M au milieu D de BC par une droite qui rencontre AB en N, que vaudra la somme des triangles CDM, DBN ?

N.-B. — Les élèves ont 6 heures pour répondre à ces questions

**Rhétorique des Humanités anciennes** (*section grecque-latine*).

MATHÉMATIQUES (*Vendredi 25 juillet.*)

Qu'appelle-t-on logarithme d'un nombre ; base d'un système de logarithmes ? Faire voir que le rapport des logarithmes de deux nombres est constant, quelle que soit la base du système de logarithmes ; est encore constant le rapport des logarithmes d'un nombre pris dans deux systèmes différents, quel que soit le nombre.

Démontrer que les sections parallèles aux bases faites à la même distance des bases dans deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme les bases.

Démontrer que si on coupe une sphère O par un plan perpendiculaire au diamètre AOB, la section sera un cercle dont les pôles sont A et B. — Quel sera : 1° le rayon de cette section, si le plan passe par le milieu de OA ; 2° la surface de chacune des deux zones ; 3° le volume de chacun des segments qu'il détermine ?

Résoudre un triangle connaissant la base $a$, la hauteur $h$, et l'angle au sommet A. Que faut-il pour que le triangle existe ?

N.-B. — Les élèves ont 6 heures pour répondre à ces questions.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1151.** — On donne un triangle $A_1A_2A_3$ et l'on désigne par $H_1, H_2, H_3$ les pieds des hauteurs issues des points $A_1, A_2, A_3$; on décrit sur $A_1H_1$ comme diamètre un cercle $(C_1)$ et on considère le cercle $(\Gamma_1)$ ayant pour centre le point $A_1$ et passant aux points de rencontre du cercle $(C_1)$ avec la parallèle au côté $A_2A_3$ menée par l'orthocentre H du triangle; on considère de même les deux cercles analogues $(\Gamma_2)$ et $(\Gamma_3)$ relatifs aux deux autres sommets $A_2$ et $A_3$. Montrer que ces cercles sont deux à deux orthogonaux et se coupent deux à deux sur les hauteurs du triangle $A_1A_2A_3$. VASNIER.

**1152.** — Le lieu des foyers des coniques normales aux deux côtés égaux d'un triangle isocèle, en chacun des sommets adjacents à la base du triangle, est un cercle. Le lieu des sommets est une parabole.

E.-N. BARISIEN.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

13e Année. N° 2 Novembre 1902.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LA MÉTHODE DES RACINES ÉGALES

par M. **A. Tresse**, professeur au collège Rollin.

La décomposition d'un polynome entier en $x$ par la méthode des racines égales peut s'établir indépendamment du théorème de d'Alembert, et, par suite, de la décomposition de ce polynome en ses facteurs premiers. C'est ce qu'a établi M. Friedrich Engel, professeur à l'Université de Leipzig (*Leipziger Berichte*, 6 Déc. 97). En voici une démonstration qui s'écarte un peu de la sienne, mais qui se rapproche davantage de la forme sous laquelle nous présentons, en France, la méthode des racines égales.

Nous n'empruntons donc aux lois du calcul algébrique que la théorie du p. g. c. d. et celle de la dérivée d'un polynome entier.

Soit un polynome entier en $x$ quelconque, $f(x)$. On peut toujours calculer la suite des polynomes suivants :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$, | p. g. c. d entre | $f(x)$ | et sa dérivée, | |
| $f_2(x)$, | — | $f_1(x)$ | — | , |
| . . . . . | | | | , |
| $f_{p-1}(x)$, | — | $f_{p-2}(x)$ | — | , |
| $f_p(x)$, | — | $f_{p-1}(x)$ | — | . |

Ces opérations sont nécessairement limitées, les degrés des polynomes allant en décroissant, et le dernier polynome auquel on s'arrête, soit $f_p(x)$, est une constante que l'on sait réduire à l'unité ; on peut donc poser

$$f_p(x) \equiv 1.$$

Dans cette suite, chaque polynome est divisible par le suivant, conséquence de sa définition même. Donc on peut calculer une nouvelle suite de polynomes, savoir :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1(x)$, | quotient de | $f$ | par | $f_1$, |
| $\varphi_2(x)$, | — | $f_1$ | — | $f_2$, |
| . . . . . | | | | , |
| $\varphi_{p-1}(x)$, | — | $f_{p-2}$ | — | $f_{p-1}$, |
| $\varphi_p(x)$, | — | $f_{p-1}$ | — | $f_p$. |

Cela posé, je dis que dans cette nouvelle suite chaque polynome est encore divisible par le suivant : il suffit de montrer, par exemple, que $\varphi_1$ est divisible par $\varphi_2$.

En effet, les définitions précédentes donnent

$$f \equiv f_1\varphi_1, \qquad f' \equiv f_1 g_1$$

où $g_1$ est un polynome ; d'où l'identité

$$f_1\varphi_1' + \varphi_1 f_1' \equiv f_1 g_1.$$

Pareillement on a

$$f_1 \equiv f_2\varphi_2, \qquad f_1' \equiv f_2 g_2$$

où $g_2$ est un polynome premier avec $\varphi_2$, d'où la nouvelle identité

$$f_2\varphi_2\varphi_1' + \varphi_1 f_2 g_2 \equiv f_2\varphi_2 g_1,$$

d'où encore

$$\varphi_2\varphi_1' + \varphi_1 g_2 \equiv \varphi_2 g_1,$$

identité qui montre que $\varphi_2$ divise le produit $\varphi_1 g_2$, et par suite $\varphi_1$, puisqu'il est premier avec $g_2$.

Nous pouvons donc former une troisième suite de polynomes, savoir :

$$\begin{array}{llll} \theta_1, & \text{quotient de } \varphi_1 & \text{par } \varphi_2, \\ \theta_2, & \quad\text{—} \quad \varphi_2 & \quad\text{—} \quad \varphi_3, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{p-1}, & \quad\text{—} \quad \varphi_{p-1} & \quad\text{—} \quad \varphi_p, \end{array}$$

à laquelle nous ajoutons

$$\theta_p, \quad \text{polynome identique à } \varphi_p.$$

Cela posé, on peut exprimer tous les polynomes formés en fonction des polynomes $\theta$. Pour la seconde suite, on trouve, par définition de la troisième,

$$\begin{aligned} \varphi_p &\equiv \theta_p, \\ \varphi_{p-1} &\equiv \varphi_p\theta_{p-1} \equiv \theta_p\theta_{p-1}, \\ \varphi_{p-2} &\equiv \varphi_{p-1}\theta_{p-2} \equiv \theta_p\theta_{p-1}\theta_{p-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \varphi_2 &\equiv \varphi_3\theta_2 \equiv \theta_p\theta_{p-1}\ldots\theta_3\theta_2, \\ \varphi_1 &\equiv \varphi_2\theta_1 \equiv \theta_p\theta_{p-1}\ldots\theta_2\theta_1\ ; \end{aligned}$$

puis, pour la première suite, par définition de la seconde,

$$\begin{aligned} f_p &\equiv 1, \\ f_{p-1} &\equiv f_p\varphi_p \equiv \varphi_p \equiv \theta_p, \\ f_{p-2} &\equiv f_{p-1}\varphi_{p-1} \equiv \theta_p^2\theta_{p-1}, \\ f_{p-3} &\equiv f_{p-2}\varphi_{p-2} \equiv \theta_p^3\theta_{p-1}^2\theta_{p-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ f_1 &\equiv f_2\varphi_2 \equiv \theta_p^{p-1}\theta_{p-1}^{p-2}\ldots\theta_3^2\theta_2, \\ f &\equiv f_1\varphi_1 \equiv \theta_p^p\theta_{p-1}^{p-1}\ldots\theta_3^3\theta_2^2\theta_1. \end{aligned}$$

On a ainsi une décomposition du polynome $f$ ; si on l'emploie pour calculer $f'$ on trouve

$$f' \equiv \theta_p^{p-1}\theta_{p-1}^{p-2}\ldots\theta_3^2\theta_2^2[p\theta_p'\theta_{p-1}\ldots\theta_2\theta_1 + (p-1)\theta_p\theta_{p-1}'\ldots\theta_2\theta_1 + \ldots + 2\theta_p\theta_{p-1}\ldots\theta_2'\theta_1 + \theta_p\theta_{p-1}\ldots\theta_2\theta_1'],$$

de sorte que les quotients premiers entre eux de $f$ et $f'$ par leur p. g. c. d. $f_1$ sont

$$\varphi_1 \equiv \theta_p\theta_{p-1}\ldots\theta_2\theta_1,$$

$$g_1 \equiv p\theta_p'\theta_{p-1}\ldots\theta_2\theta_1 + (p-1)\theta_p\theta_{p-1}'\ldots\theta_2\theta_1 + \ldots + 2\theta_p\theta_{p-1}\ldots\theta_2'\theta_1 + \theta_p\theta_{p-1}\ldots\theta_2\theta_1'.$$

Il en résulte :

1° que *les polynomes $\theta$ sont premiers entre eux deux à deux*, car tout diviseur commun à deux quelconques d'entre eux serait diviseur commun à $\varphi_1$ et $g_1$ ;

2° que *chacun des polynomes $\theta$ est premier avec sa dérivée*, car tout diviseur commun à $\theta_1$ et $\theta_1'$, par exemple, serait encore diviseur à $\varphi_1$ et $g_1$. Concluons :

Théorème. — *Tout polynome entier en $x$ est décomposable en un produit de puissances à exposants distincts de polynomes premiers entre eux deux à deux et tous premiers avec leurs dérivées.*

*Inversement*, si partant d'une décomposition quelconque satisfaisant à ces conditions, on calcule *a posteriori* les polynomes $f$, $\varphi$ et $\theta$, on retrouve immédiatement pour ces polynomes les expressions trouvées *a priori* ; chacun de ces polynomes étant bien déterminé par sa définition même, il en résulte que *cette décomposition est unique.*

## ALGÈBRE

**1091.** — *Résoudre le système*

$$\begin{cases} X + Y = a_0, \\ Xx + Yy = a_1, \\ Xx^2 + Yy^2 = a_2, \\ Xx^3 + Yy^3 = a_3, \end{cases}$$

*où* X, Y, $x$, $y$, *sont les inconnues. Former l'équation du second degré dont $x$ et $y$ sont racines.*

*De même, résoudre le système*

$$\begin{cases} X + Y + Z = a_0, \\ Xx + Yy + Zz = a_1, \\ Xx^2 + Yy^2 + Zz^2 = a_2, \\ Xx^3 + Yy^3 + Zz^3 = a_3, \\ Xx^4 + Yy^4 + Zz^4 = a_4, \\ Xx^5 + Yy^5 + Zz^5 = a_5. \end{cases}$$

*Former l'équation dont $x, y, z$ sont les co-racines. Généralisation.*

Application. — *Mettre un polynome entier en $x$ de degré impair $2n+1$ sous la forme d'une somme de $n+1$ puissances $(2n+1)^{\text{mes}}$ de binomes du premier degré.*

*Résolution de l'équation du troisième degré.*

Occupons-nous d'abord du premier système et éliminons X et Y successivement entre les trois premières équations, puis entre les trois dernières ; nous aurons les deux équations nouvelles

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a_0 \\ x & y & a_1 \\ x^2 & y^2 & a_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_1 \\ x & y & a_2 \\ x^2 & y^2 & a_3 \end{vmatrix} xy = 0.$$

Dans le cas général, $x$ et $y$ ne sont nuls ni l'un ni l'autre, $x$ est différent de $y$, et ces deux équations se développent de la même manière et se simplifient également par suppression du facteur $x-y$; elles deviennent ainsi

$$a_0xy - a_1(x+y) + a_2 = 0,$$
$$a_1xy - a_2(x+y) + a_3 = 0;$$

elles donnent la somme et le produit des deux nombres $x$ et $y$, et ceux-ci sont dès lors les racines de l'équation du second degré

$$(a_1^2 - a_0a_2)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)x + a_2^2 - a_1a_3 = 0.$$

Lorsqu'on a $x$ et $y$, les deux premières équations du système proposé donnent X et Y,

$$X = \frac{a_1 - a_0y}{x-y}, \qquad Y = \frac{a_0x - a_1}{x-y}.$$

Nous pouvons prendre pour $x$ n'importe laquelle des racines de l'équation du second degré, car si nous échangeons $x$ et $y$, X et Y s'échangent aussi l'un dans l'autre et nous retrouvons au fond la même solution.

Voyons ce qui arrive dans les cas particuliers que nous avons écartés.

Si $x$ est nul, les trois dernières équations du système se réduisent à $Yy = a_1$, $Yy^2 = a_2$, $Yy^3 = a_3$; elles entraînent la condition $a_2^2 - a_1a_3 = 0$, puis elles donnent $y = \frac{a_2}{a_1}$ et $Y = \frac{a_1^2}{a_2}$; la première

donne ensuite $X = a_0 - Y$. Mais ce cas, que nous venons de traiter, rentre dans le cas général, car lorsque $a_2^2 - a_1 a_3 = 0$, l'équation du second degré qui donne $x$ et $y$ a une racine nulle et l'autre, comme il est facile de le voir, a pour valeur $\frac{a_2}{a_1}$; nous retrouvons donc ainsi la solution donnée plus haut et directement.

Si $x = y$, le système proposé se réduit à $Z = a_0$, $Zx = a_1$, $Zx^2 = a_2$, $Zx^3 = a_3$, Z désignant la somme $X + Y$, et les constantes $a_0, a_1, a_2, a_3$ sont reliées par les relations

$$a_1^2 - a_0 a_2 = 0, \qquad a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0, \qquad a_2^2 - a_1 a_3 = 0\ ;$$

l'équation qui fournit $x$ et $y$ devient identiquement nulle et le calcul général n'est plus applicable. La solution est d'ailleurs immédiate : c'est $x = \frac{a_1}{a_0}$ et $Z = a_0$.

Passons maintenant au second système et plaçons-nous, pour le résoudre, dans le cas le plus général où les nombres $x, y, z$ sont différents et où aucun d'eux n'est nul. Nous éliminerons encore X, Y, Z entre quatre équations consécutives et nous aurons ainsi les trois nouvelles équations

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ x & y & z & a_1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & a_2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a_1 \\ x & y & z & a_2 \\ x^2 & y^2 & z^2 & a_3 \\ x^3 & y^3 & z^3 & a_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a_2 \\ x & y & z & a_3 \\ x^2 & y^2 & z^2 & a_4 \\ x^3 & y^3 & z^3 & a_5 \end{vmatrix} = 0,$$

qui se développent de la même façon et qui vont nous donner $x, y, z$. Pour développer la première, nous posons symboliquement $a_0 = t^0$, $a_1 = t^1$, $a_2 = t^2$, $a_3 = t^3$, et nous aurons

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & t^0 \\ x & y & z & t^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix} = 0\ ;$$

Cette équation, entière et du troisième degré en $t$, a pour racines $x, y, z$ ; donc elle se met sous la forme

$$\Delta(t - x)(t - y)(t - z) = 0,$$

$\Delta$ étant le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

En supprimant ce facteur qui n'est pas nul, puisque nous supposons $x, y, z$ différents, il reste l'équation

$$(t - x)(t - y)(t - z) = 0,$$

qui s'écrit

$$t^3 - pt^2 + qt^1 - rt^0 = 0,$$

$p, q, r$ désignant les fonctions symétriques fondamentales de $x, y, z$ :

$$p = x + y + z, \qquad q = yz + zx + xy, \qquad r = xyz.$$

Remplaçons maintenant $t^3$ par $a_3$, $t^2$ par $a_2$, $t^1$ par $a_1$ et $t^0$ par $a_0$; nous aurons la première équation entre $x, y, z$ :

$$a_3 - pa_2 + qa_1 - ra_0 = 0;$$

nous obtenons de même

$$a_4 - pa_3 + qa_2 - ra_1 = 0,$$

$$a_5 - pa_4 + qa_3 - ra_2 = 0.$$

Il nous suffit de joindre à ces équations l'équation

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

et d'éliminer $p, q, r$ entre elles pour avoir l'équation du troisième degré qui donne les valeurs de $x, y, z$,

$$\begin{vmatrix} x^4 & x^2 & x & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ayant calculé ainsi $x, y, z$, nous porterons leurs valeurs dans les trois premières équations du système et nous en déduirons X, Y, Z, à condition toutefois de supposer que $x, y, z$ soient distincts, c'est-à-dire de se placer dans le cas général.

Rien n'est plus aisé que de généraliser le problème proposé et de l'étendre au cas de $n$ inconnues pour chacune des deux espèces.

Considérons alors un polynome entier en $x$ de degré $2n+1$ ou entier et homogène en $u$ et $v$ de degré $2n+1$ et proposons-nous de le mettre sous la forme d'une somme de $n+1$ puissances $(2n+1)^{es}$ de binomes linéaires et homogènes en $u$ et $v$, c'est-à-dire de l'écrire sous la forme

$$X(u+vx)^{2n+1} + Y(u+vy)^{2n+1} + \ldots + T(u+vt)^{2n+1}.$$

Si nous supposons que ce polynome est donné sous la forme

$$a_0u^{2n+1} + \frac{2n+1}{1}a_1u^{2n}v + \frac{(2n+1)2n}{1.2}a_2u^{2n-1}v^2 + \ldots,$$

il suffira d'identifier les deux formes pour obtenir le système général que nous avons indiqué. Par conséquent le problème que nous nous sommes proposé n'est au fond que la traduction finale de celui-ci; le premier système est relatif à la décomposition d'un polynome du troisième degré en une somme de deux cubes, le second, à la décomposition d'un polynome du cinquième degré en une somme de trois puissances cinquièmes.

Le premier problème renferme la résolution d'une équation générale du troisième degré : car, lorsqu'on a mis le polynome

$$f(u, v) = a_0u^3 + 3a_1u^2v + 3a_2uv^2 + a_3v^3$$

sous la forme

$$X(u+vx)^3 + Y(u+vy)^3,$$

il suffit d'égaler ce dernier à 0 pour avoir les valeurs du rapport $\frac{u}{v}$ qui vérifient l'équation $f(u, v) = 0$. On trouve ainsi

$$\frac{u+vx}{u+vy} = \sqrt[3]{\frac{-Y}{X}}.$$

En appelant $\alpha$ l'une des valeurs du second membre et $j, j^2$ les racines cubiques imaginaires de l'unité, les trois valeurs de $\frac{u}{v}$ ou de $\frac{v}{u}$ sont fournies par les équations du premier degré

$$\frac{u+vx}{u+vy} = \alpha, \qquad \frac{u+vx}{u+vy} = \alpha j, \qquad \frac{u+vx}{u+vy} \alpha j^2.$$

Pour une étude plus ample nous renverrons le lecteur à un article paru dans le n° d'avril 1896 de la *Revue*.

G. DULIMBERT.

**Autre solution.** — M. Thonet étant parvenu dans le second cas, comme cela a été fait antérieure-

ment, aux trois équations

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ x & y & z & a_1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & a_2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a_1 \\ x & y & z & a_2 \\ x^2 & y^2 & z^2 & a_3 \\ x^3 & y^3 & z^3 & a_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a_2 \\ x & y & z & a_3 \\ x^2 & y^2 & z^2 & a_4 \\ x^3 & y^3 & z^3 & a_5 \end{vmatrix} = 0,$$

poursuit de la manière suivante : il établit entre les éléments des colonnes de chaque déterminant une même relation linéaire qui lui fournit dans chaque déterminant les trois équations

$$\lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x + \rho = 0,$$
$$\lambda y^3 + \mu y^2 + \nu y + \rho = 0,$$
$$\lambda z^3 + \mu z^2 + \nu z + \rho = 0,$$

pour calculer des quantités proportionnelles à $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$, coefficients de cette relation. Il en conclut que pour ces valeurs de $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ on a aussi, entre les éléments des dernières colonnes,

$$\lambda a_3 + \mu a_2 + \nu a_1 + \rho a_0 = 0,$$
$$\lambda a_4 + \mu a_3 + \nu a_2 + \rho a_1 = 0,$$
$$\lambda a_5 + \mu a_4 + \nu a_3 + \rho a_2 = 0,$$

et comme d'autre part $x$, $y$, $z$ sont d'après les trois premières relations les racines de l'équation

$$\lambda t^3 + \mu t^2 + \nu t + \rho = 0,$$

il obtient immédiatement l'équation qui donne $x$, $y$, $z$, en éliminant $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ entre les quatre dernières équations qui les contiennent :

$$\begin{vmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ a_1 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

P. THONET.

Très bonnes solutions : MM. M. Rebeix ; J. Marchal.
Bonne solution : M. J. Haag, à Nancy.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1104**. — *On considère une parabole et un cercle variable passant par le foyer de cette parabole et tangent à la courbe.*

1° *Trouver le lieu du centre de ce cercle et le lieu du point de rencontre de la tangente commune au point où les deux lignes se touchent avec la droite qui joint les deux autres points de rencontre.*

2° *Trouver le lieu du point de rencontre de cette tangente commune avec la tangente au cercle menée par le foyer.*

3° *Trouver le lieu du point de concours des deux autres tangentes communes au cercle et à la parabole.*

**1**. Rapportons la parabole à son axe et à sa tangente au sommet et désignons par $y^2 - 2px = 0$ son équation ainsi réduite. La tangente en un de ses points, $(\alpha, \beta)$, a pour équation

$$-px + \beta y - p\alpha = 0$$

avec la relation $\beta^2 - 2p\alpha = 0$ ; la seconde sécante commune à la parabole et au cercle, associée avec

celle-ci, fait avec l'axe le même angle que la précédente et en sens contraire ; elle a donc pour équation

$$px + \beta y + \lambda = 0,$$

et le cercle indiqué est représenté par l'équation

$$\mu(y^2 - 2px) + (px + \beta y + \lambda)(-px + \beta y - p\alpha) = 0,$$

pour certaines valeurs de $\mu$ et de $\lambda$.

Exprimons que les coefficients de $x^2$ et de $y^2$ sont égaux, nous avons

$$\mu = -p^2 - \beta^2 ;$$

puis, que le cercle passe au foyer, nous avons alors $\lambda = \frac{3p^2}{2}$.

L'équation du cercle est donc connue complètement en fonction de $\alpha$ et de $\beta$, ou de $\beta$ seulement, puisque $\alpha = \frac{\beta^2}{2p}$, et nous connaissons aussi celles de la tangente commune et de la droite qui joint les deux autres points de rencontre ; ces trois équations sont, dans l'ordre où nous les avons signalées,

$$x^2 + y^2 - \frac{p^2 + 3\beta^2}{2p}x - \frac{\beta(3p^2 - \beta^2)}{2p^2}y + \frac{3\beta^2}{4} = 0,$$

$$px - \beta y + \frac{\beta^2}{2} = 0,$$

$$px + \beta y + \frac{3p^2}{2} = 0.$$

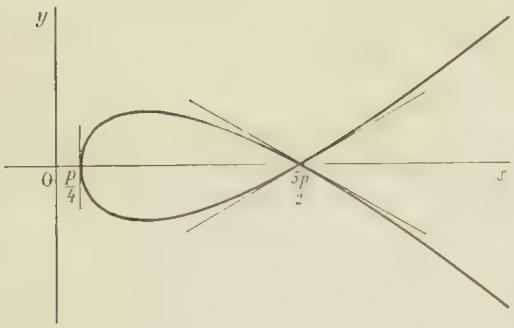



Fig. 1.

Par conséquent le lieu du centre du cercle a pour équations paramétriques

$$(1) \qquad x = \frac{p^2 - 3\beta^2}{4p}, \qquad y = \frac{\beta(3p^2 - \beta^2)}{4p^2};$$

l'élimination de $\beta$ entre elles est immédiate, car la première donne $\beta^2 = \frac{4px - p^2}{3}$, puis la seconde donne $\beta = \frac{6py}{5p - 2x}$, et il suffit d'égaler son carré à la valeur de $\beta^2$ pour avoir l'équation cartésienne du lieu ; nous trouvons ainsi

$$(2) \qquad 108py^2 = (4x - p)(5p - 2x)^2.$$

Cette courbe se construit à vue : elle admet $Ox$ pour axe de symétrie, le point de cet axe d'abscisse $\frac{p}{4}$ pour sommet, celui d'abscisse $\frac{5p}{2}$ pour point double, et deux branches paraboliques dans la direction $Oy$ ; les tangentes au point double ont pour coefficients angulaires $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire sont inclinées à 30° sur $Ox$ (*fig.* 1).

Pour avoir le lieu du point de rencontre de la tangente commune avec la sécante qui passe aux deux autres points de rencontre, il suffit d'ajouter et de retrancher les équations de ces deux droites, ce qui donne immédiatement les deux équations paramétriques du lieu :

$$(3) \qquad x = -\frac{\beta^2 + 3p^2}{4p}, \qquad y = \frac{\beta^2 - 3p^2}{4\beta}.$$

L'élimination de $\beta$ entre ces deux équations se fait par une méthode semblable à celle qui vient d'être employée et donne

$$(4) \qquad 4y^2(4x + 3p) + p(2x + 3p)^2 = 0.$$

Cette courbe aussi se construit à vue : elle admet pour axe de symétrie l'axe des $x$, pour asymptote parallèle à $Oy$ la droite $x = -\frac{3p}{4}$, pour point double le point de $Ox$ d'abscisse $\frac{-3p}{2}$, et

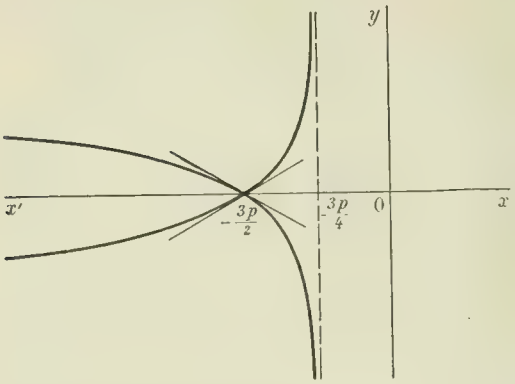


Fig. 2.

deux branches infinies paraboliques dans la direction $Ox$ ; les tangentes au point double ont aussi pour coefficients angulaires $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ (*fig.* 2).

2. La tangente au cercle au foyer s'obtient facilement en formant les trois dérivées partielles du premier membre de l'équation du cercle et en y remplaçant $x$ par $\frac{p}{2}$, $y$ par 0 ; elle a pour équation

$$2px(3\beta^2 - p^2) + 2\beta y(3p^2 - \beta^2) + p^2(p^2 - 3\beta^2) = 0 ;$$

d'autre part, la tangente au point $(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$2px - 2\beta y + \beta^2 = 0,$$

elle donne $2\beta y = 2px + \beta^2$ et, en portant cette valeur dans l'équation précédente nous avons, après suppression du facteur $\beta^2 + p^2$, $x = \frac{\beta^2 - p^2}{4p}$ ; $y$ se calcule alors immédiatement et les deux équations paramétriques du lieu demandé sont

$$(5) \qquad x = \frac{\beta^2 - p^2}{4p}, \qquad y = \frac{3\beta^2 - p^2}{4\beta} ;$$

dès lors $\beta$ s'élimine aisément par le procédé que nous avons déjà indiqué, et nous obtenons de suite l'équation cartésienne du lieu :

$$(6) \qquad 4y^2(4x + p) - p(6x + p)^2 = 0.$$

Cette courbe, comme les deux précédentes, se construit à vue : elle admet pour axe de symétrie l'axe des $x$, pour asymptote parallèle à $Ox$ la droite $x = -\frac{p}{4}$, pour point double le point de $Ox$ dont l'abscisse est $\frac{-p}{6}$ et deux branches infinies paraboliques dans la direction de $Ox$ (*fig.* 3).

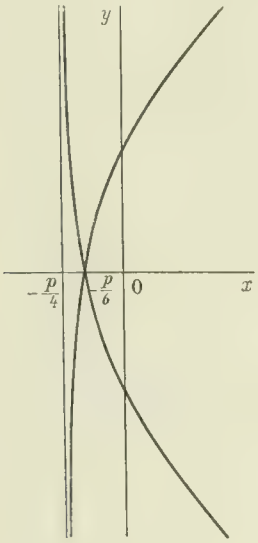


Fig. 3.

Il nous reste à expliquer pourquoi $x$ devient indéterminé pour $\beta^2 + p^2 = 0$, c'est-à-dire pour $\beta = \pm pi$. Le point $(\alpha, \beta)$ est alors l'un des deux points de rencontre de la parabole avec la directrice ; en ce point la tangente est isotrope et passe au foyer ; le cercle de l'énoncé se décompose alors en cette droite et une droite isotrope de l'autre série qui rencontre la première sur la directrice. Tout ceci se vérifie immédiatement en remplaçant $\beta$ par $pi$ dans l'équation trouvée pour le cercle.

3. Pour traiter la dernière partie, il y a diverses méthodes que nous allons indiquer.

On peut d'abord exprimer qu'une tangente au cercle en un point $(x, y)$ est tangente à la parabole ; on obtient ainsi une relation du second degré en $x$ et $y$ qui représente une conique passant aux points de contact du cercle avec les tangentes communes au cercle et à la parabole ; cette conique est d'ailleurs, comme il est facile de s'en assurer, la polaire réciproque du cercle par rapport à la parabole ; elle coupe le cercle en quatre points dont deux sont confondus avec le point $(\alpha, \beta)$, par conséquent, il y a un système de sécantes communes au cercle et à cette conique qui se compose de la tangente en ce point $(\alpha, \beta)$ et de la polaire du point de concours des deux autres tangentes communes par rapport au cercle ; cette droite étant trouvée, il n'y aura plus qu'à chercher le lieu de son pôle par rapport au cercle. Les calculs se font aisément en gardant toujours le paramètre $\beta$ et en cherchant les coordonnées du pôle en fonction de $\beta$.

On peut aussi former l'équation tangentielle du cercle et celle de la parabole et éliminer $w$ entre elles afin d'avoir l'équation aux coefficients angulaires des tangentes communes au cercle et à la

parabole ; cette équation admet deux fois la racine $\frac{p}{\beta}$, qui est le coefficient angulaire de la tangente au point $(\alpha, \beta)$, et, en supprimant deux fois le facteur primaire $m - \frac{p}{\beta}$ qui lui correspond on a une équation du second degré en $m$ qui donne les deux autres coefficients angulaires ; le lieu du point de rencontre des deux autres tangentes communes s'en déduit aisément.

Enfin une troisième méthode consiste à former les deux équations tangentielles du cercle et de la parabole et à exprimer qu'une combinaison linéaire de ces deux équations se décompose en un produit de deux facteurs du premier degré représentant : l'un, le point $(\alpha, \beta)$, l'autre le point de rencontre $(x, y)$ des deux autres tangentes communes. C'est cette méthode que nous allons suivre.

L'équation tangentielle du cercle est

$$(a^2 + b^2 - c^2)(u^2 + v^2) - (au + bv + w)^2 = 0,$$

avec les notations habituelles ; ici

$$a = \frac{p^2 + 3\beta^2}{4p}, \qquad b = \frac{\beta(3p^2 - \beta^2)}{4p^2}, \qquad c = \frac{3\beta^2}{4};$$

cette équation est

$$\beta^2(\beta^2 - 6p^2\beta^2 - 3p^4)u^2 + p^2(p^2 - 3\beta^2)^2v^2 - 2p\beta(p^2 - 3\beta^2)(3p^2 - \beta^2)uv$$
$$-8p^2(p^2 + 3\beta^2)uw + 8p^2\beta(3p^2 - \beta^2)vw - 16p^4w^2 = 0.$$

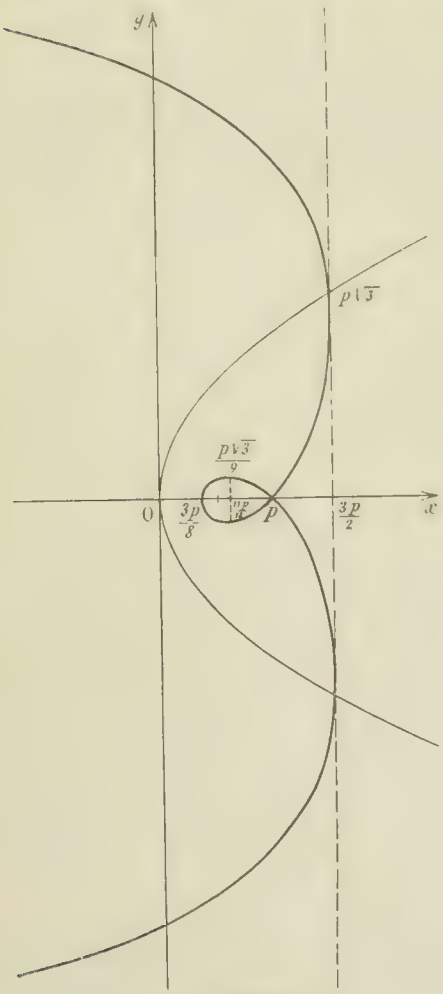


Fig. 4.

Celle de la parabole est $pv^2 - 2uw = 0$.

Il suffit alors de multiplier la seconde par $\rho$, de l'ajouter à la première et d'identifier le premier membre avec le produit $k(\beta^2u + 2p\beta v + 2pw)(ux + vy + w)$ pour obtenir les coordonnées $x$ et $y$ du point de concours des deux autres tangentes communes. On a de suite, $k = -8p^3$, puis la valeur de $x$,

$$x = -\frac{\beta^2 - 6p^2\beta^2 - 3p^4}{8p^3};$$

celle de $y$ s'obtient ensuite en égalant les termes en $uv$ :

$$\beta^2y + 2p\beta x = \frac{\beta(p^2 + 3\beta^2)(3p^2 - \beta^2)}{4p^2},$$

et remplaçant $x$ par sa valeur. On trouve ainsi

$$y = \frac{\beta(p^2 - \beta^2)}{2p^2}.$$

La courbe cherchée est donc une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à $Ox$ et qui se construit aisément en faisant varier $\beta$ de $0$ à $+\infty$ dans les deux formules que nous venons d'obtenir.

Pour $\beta = 0$, $x = \frac{3p}{8}$, $y = 0$ ; à partir de ce moment $y$ est positif et augmente jusqu'à la valeur $\beta = \frac{p}{\sqrt{3}}$, puis il diminue, devient nul pour $\beta = p$ et décroît ensuite indéfiniment en restant négatif ; de $0$ à $p\sqrt{3}$, $x$ augmente, puis il diminue, reprend la valeur initiale $x = \frac{3p}{8}$ pour $\beta = p\sqrt{6}$, devient nul pour

$$\beta = p\sqrt{3 + \sqrt{12}},$$

et diminue ensuite indéfiniment en restant négatif. Pour $\beta$ infini, $x$ et $y$ sont infinis, mais le rapport

$\frac{y}{x}$ tend vers 0 ; donc la courbe présente une branche infinie parabolique dans la direction $Ox$. La branche ainsi décrite se trace sans difficulté et il n'y a plus qu'à achever la courbe par symétrie (*fig.* 4).

C. SAUVAGEON, élève au pensionnat Saint-Louis, à Saint-Étienne.

*Bonnes solutions :* MM. J. Haag, lycée de Nancy ; E.-N. Barisien.
*Assez bonne solution :* M. G. Dulimbert.

## PHYSIQUE

**1113.** — *Un kilogramme d'eau à* 100° *est placé dans un vase dont on supposera les parois absolument imperméables à la chaleur ; il s'y vaporise très lentement et la vapeur d'eau formée est enlevée, par un moyen quelconque, au fur et à mesure de sa production. Quand l'eau qui reste dans le vase sera entièrement congelée, quel sera son poids ?*

*On supposera la chaleur latente de fusion égale à* 80 *et la chaleur latente de vaporisation de l'eau représentée, en fonction de la température, par la formule*

$$\lambda = 606{,}5 - \frac{2}{3}t.$$

Calculons d'abord le poids d'eau qui restera à 0° à l'état liquide.

Soit $m$ le poids d'eau existant dans le vase à un moment donné et supposons négligeable le poids de la vapeur vis-à-vis du poids du liquide. L'absorption de chaleur produite par la vaporisation d'un poids d'eau infiniment petit $-dm$ abaisse la température de $-dt$ ; on peut donc écrire

$$\lambda dm = m dt,$$

ou bien, en remplaçant $\lambda$ par sa valeur et séparant les variables,

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{1}{606{,}5 - \frac{2}{3}t}.$$

Remontons aux fonctions primitives

$$\log. m = -\frac{3}{2}\log.\left(606{,}5 - \frac{2}{3}t\right) + \text{C}^{\text{te}}.$$

Dans les conditions initiales, $m = 1000$ et $t = 100$, donc

$$\log. 1000 = -\frac{3}{2}\log. 539{,}8 + \text{C}^{\text{te}}.$$

Retranchons membre à membre :

$$\log.\frac{m}{1000} = -\frac{3}{2}\log.\frac{606{,}5 - \frac{2}{3}t}{539{,}8}.$$

d'où

$$m = 1000\left(\frac{539{,}8}{606{,}5 - \frac{2}{3}t}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Si on fait en particulier $t = 0$, on trouve

$$m_0 = 1000\left(\frac{539{,}8}{606{,}5}\right)^{\frac{3}{2}} = 839^{\text{gr}},6.$$

Désignons maintenant par $x$ le poids d'eau qui restera congelé dans le vase à 0° ; sa congélation

a dégagé une quantité de chaleur qui a servi à vaporiser à 0° un poids d'eau $m_0 - x$. Donc

$$606,5(m_0 - x) = 80x,$$

d'où l'on tire, en remplaçant $m_0$ par sa valeur,

$$x = 741^{gr},7.$$

Bonnes solutions : MM. J. Franceschini, lycée de Marseille, J. Haag, lycée de Nancy, M. Laurence, lycée de Bordeaux.

## QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*suite*).

### ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1902 *suite et fin*).

#### V. — Géométrie descriptive.

**3113.** — On donne un segment de droite par ses deux projections. Construire un tétraèdre régulier ayant ce segment pour côté.

**3114.** — On donne un segment de droite par ses deux projections, construire un cube ayant ce segment pour arête ou pour diagonale.

**3115.** — Connaissant les longueurs des arêtes d'un tétraèdre, construire la plus courte distance de deux arêtes opposées.

**3116.** — Angle d'une horizontale et d'une ligne de front.

**3117.** — On donne un axe vertical, un plan par ses traces et une droite quelconque. Peut-on faire tourner le plan autour de l'axe pour l'amener à être parallèle à la droite?

**3118.** — Projection d'un tétraèdre régulier dont une arête est verticale.

**3119.** — Construire un trièdre trirectangle dont les arêtes passent par trois points donnés. Discussion.

**3120.** — Projection d'un octaèdre régulier dont une face est dans le plan horizontal.

**3121.** — On donne un triangle et un point par leurs projections; voir si le point est vu ou caché par le triangle supposé opaque.

**3122.** — On donne les projections de trois points F, F', M. Déterminer un point de l'ellipse qui a pour foyers F et F' et qui passe par M.

**3123.** — On donne les projections de deux diamètres conjugués d'une ellipse. Construire les projections du cercle de Monge.

**3124.** — On donne les projections d'une droite D et celles d'un point F. Déterminer un point de la parabole ayant le point F pour foyer et la droite D pour directrice. Tangente en ce point.

**3125.** — Projection verticale d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution à axe vertical.

**3126.** — On donne les projections de quatre points A, B, C, D. Représenter l'un des cônes passant par les deux cercles ABC et ABD.

**3127.** — Mener à un cône défini par son sommet et un cercle donné par trois points un plan tangent perpendiculaire au plan du cercle de base.

**3128.** — Mener par un point donné une tangente commune à deux cônes définis par leurs sommets et leurs bases qui sont des cercles dans le plan horizontal.

**3129.** — Trouver le contour apparent vertical d'un cône défini par son sommet et dont la directrice située dans un plan donné par deux droites est définie par sa projection horizontale. Ponctuation des projections horizontales des génératrices de contour apparent vertical.

**3130.** — On donne la base d'un cylindre quelconque, algébrique ou non, combien faut-il de points pour achever de le déterminer? Construire le cylindre dans le cas où la base est une ellipse en se donnant deux points. Nombre de solutions.

**3131.** — On donne la base d'un cône quelconque, combien faut-il de points pour achever de le déterminer? On donne dans le plan horizontal un cercle et trois points quelconques. Construire un cône passant par le cercle et les trois points.

**3132.** — On donne un plan par deux droites qui se coupent; une conique située dans ce plan est définie par sa projection verticale; c'est la base d'un cylindre dont on donne la direction des génératrices. On donne la projection horizontale d'un point du cylindre; trouver sa projection verticale et le plan tangent en ce point.

**3133.** — On donne un cône défini par son sommet et sa directrice qui est une conique dans le plan horizontal, et on considère le cône supplémentaire C. Construire les contours apparents de ce cône. Intersection du cône C et d'une droite. Construire les projections d'un point du même cône, connaissant l'une d'elles; plan tangent en ce point.

**3134.** — On coupe un cylindre de révolution à axe vertical par un plan de bout. Développer la section sur le plan tangent le long d'une génératrice de contour apparent vertical. Trouver l'équation de la courbe développée.

**3135.** — Intersection d'un cône défini par son sommet et une base circulaire horizontale avec un plan passant par la ligne de terre et un point.

**3136.** — On donne un cylindre dont la directrice est une parabole dans le plan horizontal. On coupe ce cylindre par un plan vertical. Sommet de la section.

**3137.** — On donne quatre points par leurs projections S, A, B, C et on considère le cône ayant pour sommet le point S et pour directrice le cercle circonscrit au triangle ABC. Trouver une section parabolique de ce cône et construire un point quelconque et la tangente.

**3138.** — On donne un cône défini par son sommet et par sa directrice située dans un plan donné par deux droites et

se projetant horizontalement suivant un cercle. Trouver les autres directions de sections planes qui se projettent horizontalement suivant des cercles.

**3139.** — Contours apparents d'un cylindre de révolution tangent au plan horizontal. Intersection de ce cylindre avec un cône de révolution à axe vertical.

**3140.** — On donne un quadrilatère convexe *abcd* dans le plan horizontal. On demande l'intersection du cône engendré par *ab* en tournant autour de la bissectrice de l'angle *a* et du cône engendré par *bc* en tournant autour de la bissectrice de l'angle *c*

**3141.** — Intersection d'un cône de révolution dont l'axe est dans le plan horizontal avec un cylindre dont la directrice est une ellipse située dans un plan vertical ayant son grand axe dans le plan horizontal, et dont les génératrices sont horizontales. Nature de la projection horizontale de l'intersection.

**3142.** — Intersection de deux cylindres de révolution dont l'un a pour axe la ligne de terre et dont l'autre a son axe horizontal.

**3143.** — Intersection de deux cylindres de révolution tangents au plan horizontal. Tangentes au point double.

**3144.** — Dans le plan horizontal on donne une hyperbole et un cercle. L'hyperbole est la directrice d'un cylindre dont on donne la direction des génératrices; le cercle est la base d'un cône dont on demande de déterminer le sommet, sachant que dans l'intersection des deux surfaces il y a deux asymptotes parallèles.

**3145.** — On donne deux cercles l'un dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical. Le centre de chacun d'eux est le sommet d'un cône qui a l'autre cercle pour base. Intersection des deux cônes.

**3146.** — On donne un cône à base circulaire dans le plan horizontal; on le coupe par un plan de bout, et on éclaire le tronc de cône obtenu par des rayons lumineux parallèles à une direction donnée ; courbe d'ombre à l'intérieur du tronc de cône.

**3147.** — Intersection de deux cônes de révolution ayant leurs axes l'un dans le plan horizontal et l'autre dans le plan vertical.

**3148.** — Intersection d'un cylindre dont la base est dans le plan horizontal avec un cône de révolution dont l'axe est de front, le sommet étant sur le cylindre.

**3149.** — On donne un cylindre de révolution par sa base qui est un cercle C dans le plan horizontal; on fait passer par une droite AB tangente à C un plan faisant 45° avec le plan horizontal. Trouver l'intersection du cylindre et du plan. On enlève la portion du cylindre qui est en dessous du plan et on demande l'ombre au soleil du solide restant.

**3150.** — Soit S le centre de similitude de deux circonférences données dans le plan horizontal. Par le point S on mène une droite quelconque sur laquelle on prend deux points T et U qui sont les sommets de deux cônes ayant pour bases les circonférences. Intersection de ces deux cônes.

**3151.** — Un cône a pour sommet un point S du plan vertical et pour directrice un cercle C du plan horizontal ayant son centre sur la ligne de terre. Un cylindre ayant ses génératrices horizontales inclinées à 45° sur le plan vertical a pour base le même cercle considéré comme appartenant au plan vertical. Intersection des deux surfaces.

**3152.** — Intersection d'un cylindre hyperbolique ayant pour base dans le plan horizontal une hyperbole dont une asymptote est parallèle à la ligne de terre, les génératrices étant de front, avec un cône dont la directrice est une parabole dans le plan vertical et dont le sommet est sur le cylindre

**3153.** — Deux cônes se raccordent le long d'une génératrice verticale et ont pour bases respectives dans le plan horizontal un cercle et une ellipse tangents. Intersection.

**3154.** — Intersection de deux cônes dont les sommets sont sur la ligne de terre et dont les bases sont des cercles situés dans un même plan de profil.

**3155.** — Intersection de deux cônes de révolution tangents au plan horizontal.

**3156.** — On donne une hyperbole dans le plan horizontal, base d'un premier cône. D'autre part on donne le sommet d'un second cône et deux génératrices ; on sait que les deux cônes sont parallèles. Le sommet du premier est-il déterminé ? On donne en outre une asymptote de la courbe plane qui leur est commune, construire le sommet du premier cône.

**3157.** — Intersection de deux cônes ayant pour directrice commune une conique située dans le deuxième bissecteur.

**3158.** — On donne un cylindre hyperbolique par sa base dans un plan horizontal et la direction des génératrices, et un cône à base circulaire horizontale. Comment doit être le cône pour que l'intersection présente deux asymptotes parallèles ?

**3159.** — Ombres d'un tronc de cône creux de révolution reposant par sa petite base sur le plan horizontal.

**3160.** — On donne dans un plan horizontal une hyperbole dont une asymptote est de front : c'est la base d'un cylindre à génératrices de front. On donne en outre un cône dont le sommet est dans le plan asymptote de front du cylindre et dont la base est un cercle du plan horizontal tangent à l'asymptote de front. Intersection des deux surfaces.

**3161.** — On fait tourner la ligne de terre autour d'une droite du plan horizontal et une droite du plan vertical. Intersection des cônes obtenus.

**3162.** — On donne un cylindre vertical dont la directrice est une parabole dans le plan horizontal. On coupe ce cylindre par un plan de bout, et on prend la section comme directrice d'un cône de sommet donné. Intersection du cône et du cylindre.

**3163.** — On considère un tronc de pyramide dont les bases sont deux triangles équilatéraux parallèles au plan horizontal. Sur la base supérieure repose une sphère. Ombres au flambeau de ce système.

**3164.** — Etant donnée une sphère et une direction de rayons lumineux, trouver un rayon se réfléchissant sur la sphère de manière à ce que le rayon réfléchi soit vertical.

**3165.** — On donne une sphère et on demande de construire un cercle coupant à angle droit la sphère, un plan horizontal donné et le deuxième bissecteur.

**3166.** — Mener par un point un plan tangent à une sphère faisant un angle donné avec le plan horizontal.

**3167.** — Mener à une sphère un plan tangent faisant des angles donnés avec les plans de projection.

**3168.** — On donne une sphère et un plan défini par deux droites. Trouver les plans horizontaux limites dans l'intersection de cette sphère et de ce plan.

**3169.** — On donne une sphère de 25 cent. de rayon. Faire passer par un point donné un plan coupant la sphère suivant un cercle de rayon 15 cent.

**3170.** — On donne une pyramide triangulaire ayant sa base dans le plan horizontal ; on la coupe par un plan horizontal. A quelle condition peut-on faire passer une sphère par les sommets du tronc de pyramide ? Construire cette sphère en supposant les conditions remplies.

**3171.** — Construire une sphère passant par trois points et tangente à un plan.

**3172.** — Construire une sphère passant par trois points et tangente à une droite.

**3173.** — Point brillant d'une sphère polie (étudier la question par le calcul).

**3174.** — Épure de la section du tore par un plan bitangent.

**3175.** — Normales communes à deux cylindres de révolution définis par leurs axes et leurs rayons.

**3176.** — On donne un cylindre de révolution défini par son axe et un point. Intersection avec une droite donnée.

**3177.** — On donne un cylindre de révolution à axe horizontal ; on le coupe par deux plans verticaux ; représenter la partie du corps comprise entre ces deux plans. On donne ensuite un point lumineux, représenter l'ombre propre et l'ombre portée.

**3178.** — Mener par un point donné une droite qui soit à des distances données de deux droites données.

**3179.** — Mener par un point un plan faisant des angles donnés avec deux droites données, non situées dans un même plan. Examiner en particulier le cas où l'une des droites est verticale et l'autre horizontale.

**3180.** — On donne un cône de révolution par son axe et une génératrice, et on demande de lui mener un plan tangent par un point quelconque.

**3181.** — Mener par un point une droite s'appuyant sur une droite donnée et faisant un angle donné avec un plan donné.

**3182.** — Plus courte distance d'une droite à un cône de révolution.

**3183.** — On donne un cône de révolution à axe vertical, une droite D et un point T sur D. Construire un cône de révolution d'axe D, de sommet T et tangent au cône donné.

**3184.** — Etant donné un cône de révolution et un point à l'intérieur, mener par ce point un plan tel que la section du cône par le plan admette ce point pour foyer.

**3185.** — Etant donnée une conique et un point $f$ du plan de cette conique, peut-on déterminer un cône de révolution passant par la conique et tel qu'un plan passant par $f$ coupe le cône suivant une hyperbole équilatère ayant le point $f$ pour foyer ?

**3186.** — On donne dans un plan horizontal la base d'un cône de révolution à axe vertical, et un point sur cette base ; mener par ce point un plan coupant le cône suivant une hyperbole équilatère.

**3187.** — Etant donnés un cône de révolution à axe de bout et deux points sur la base, mener par ces deux points un plan coupant le cône suivant une ellipse dont l'un des axes soit double de l'autre.

**3188.** — Etant données les projections de deux droites A et B qui se coupent, faire tourner B autour de A de façon à l'amener dans un plan de front.

**3189.** — On donne deux droites en projection horizontale ; elles forment le contour apparent horizontal d'un cône de révolution dont on assujettit l'axe à être dans un plan de bout donné : le cône est-il déterminé ? Trouver l'angle au sommet.

**3190.** — Normales communes à un cône et à un cylindre tous deux de révolution.

**3191.** — Construire deux cônes de révolution connaissant leurs sommets, leurs axes et sachant qu'ils sont égaux et tangents.

**3192.** — Construire une droite s'appuyant sur deux droites données et satisfaisant à l'une des conditions suivantes : 1° faire des angles donnés avec les deux droites ; 2° être horizontale et faire avec les deux droites des angles égaux ; 3° être horizontale et faire avec l'une des droites un angle donné.

**3193.** — Intersection d'une droite et d'un cône de révolution défini par son axe et son angle au sommet.

**3194.** — On donne deux droites A et B. Mener par A un plan faisant avec B un angle donné.

**3195.** — Une droite tournant autour d'un axe de front engendre un hyperboloïde de révolution. Mener à cette surface un plan tangent horizontal.

**3196.** — Ombre propre et ombre portée d'une surface gauche de révolution, les rayons lumineux étant parallèles à une direction donnée.

**3197.** — Etant donné un hyperboloïde de révolution à axe vertical, déterminer les génératrices ayant leurs projections verticales parallèles à une direction donnée.

**3198.** — Etant donné un hyperboloïde de révolution à axe vertical et une droite située dans le plan du cercle de gorge, mener par cette droite un plan coupant l'hyperboloïde suivant une conique semblable à une conique donnée.

**3199.** — Section d'une surface gauche de révolution à axe vertical par un plan passant par la ligne de terre.

**3200.** — Un segment de droite tournant autour d'un axe vertical engendre un segment d'hyperboloïde. On éclaire ce volume par des rayons lumineux de direction quelconque ; trouver l'ombre du système.

**3201.** — Etant donnée une surface gauche à axe vertical et définie par une génératrice de front, mener à cette surface un plan tangent passant par un point ou parallèle à une droite de façon que le point de contact soit sur un parallèle ou sur un méridien donné. Discussion ; déterminer les parallèles ou les méridiens limites.

**3202.** — On donne deux droites dont l'une est verticale ; on fait tourner la verticale autour de l'autre droite. Contour apparent vertical de la surface engendrée. On donne la projection verticale d'un point de la surface, trouver la projection horizontale et le plan tangent en ce point.

**3203.** — On donne deux droites quelconques dont l'une tourne autour de l'autre. Mener à la surface un plan tangent par un point extérieur qui ait son point de contact sur un parallèle donné.

**3204.** — Plan polaire d'un point par rapport à une surface gauche de révolution ; pôle d'un plan.

**3205.** — Mener par la ligne de terre un plan coupant suivant une parabole un hyperboloïde de révolution défini par un axe vertical et une génératrice de front.

**3206.** — Ombre portée par un segment de droite sur un hyperboloïde de révolution à axe vertical.

**3207.** — On donne les projections de deux droites A et B ; la droite B tourne autour de la droite A et engendre une surface de révolution Sur la projection verticale de A on donne un point $m'$, c'est la projection verticale d'un point de la surface, trouver sa projection horizontale.

**3208.** — Déterminer la trace sur le plan du cercle de gorge du cône de sommet donné circonscrit à un hyperboloïde de révolution à axe vertical.

**3209.** — On donne deux droites quelconques ; une de ces droites en tournant autour de l'autre engendre une surface. Section de cette surface par un plan de bout. Asymptotes de la section.

**3210.** — On considère un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal. Déterminer : 1° le sommet ; 2° le plan polaire d'un point ; 3° le point de contact d'un plan tangent parallèle au deuxième bissecteur ; 4° la trace horizontale d'un cône circonscrit de sommet donné ; 5° les asymptotes d'une section plane ; 6° le lieu des projections d'un point sur les génératrices horizontales.

**3211.** — On considère un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur parallèle au deuxième bissecteur. On demande : 1° la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à une direction donnée ; 2° le contour apparent horizontal ; 3° les asymptotes d'une section plane.

**3212.** — Intersection d'un hémisphère reposant par sa base sur le plan horizontal et d'un cylindre de révolution ayant son axe dans le plan horizontal.

**3213.** — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical et une sphère dont le centre est dans le plan de front de l'axe. La sphère opaque est éclairée par des rayons lumineux de front inclinés à 45° sur le plan horizontal. Ombre portée sur l'hyperboloïde. Asymptotes de l'intersection.

**3214.** — On donne un hyperboloïde de révolution défini par son axe vertical et une génératrice de front G. On considère un cône de révolution engendré par une droite parallèle à G et tournant autour d'un axe vertical. Intersection des deux surfaces.

**3215.** — Intersection d'une surface gauche de révolution et d'une sphère tangente à la surface en un point donné.

**3216.** — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et une circonférence dans un plan horizontal. Ombre portée par le cercle sur le paraboloïde, la source lumineuse étant un point à distance finie. Asymptotes de la courbe qui limite l'ombre.

**3217.** — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical ; on fait tourner cet axe autour d'une droite de front passant par le foyer ; intersection du cône engendré avec le paraboloïde.

**3218.** — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical et un point S sur une génératrice de front, et on considère le cône de révolution engendré par la ligne de bout du point S tournant autour de la droite joignant le point S au centre de la surface gauche. Intersection des deux surfaces.

**3219.** — Ombre propre et ombre portée (rayons lumineux de front) d'une demi-sphère creuse tangente au plan horizontal.

**3220.** — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical avec une sphère tangente dont le centre est dans le plan de front de l'axe.

**3221.** — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical et une droite de front, axe d'un cône dont on donne une génératrice de front. Intersection des deux surfaces.

**3222.** — Intersection d'un tore à axe vertical et d'un cône ayant pour sommet un point de la méridienne principale et pour directrice le parallèle maximum du tore.

**3223.** — Intersection d'un cylindre de révolution à axe vertical et d'un hyperboloïde à axe de front déterminé par une génératrice.

**3224.** — Construire la courbe lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les génératrices (ou sur les plans tangents) d'un cône défini par son sommet et sa base qui est un cercle dans le plan horizontal. Déterminer un point et la tangente.

**3225.** — On donne un cône de révolution défini par son axe (supposé de front) et les génératrices de contour apparent vertical. Intersection de ce cône avec une sphère tangente dont le centre est dans le plan de front de l'axe.

**3226.** — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical avec un cône ayant une génératrice de front commune.

**3227.** — Déterminer la courbe d'ombre au flambeau à l'intérieur d'une sphère reposant sur le plan horizontal et dont on a enlevé une calotte par un plan horizontal de cote plus grande que le rayon de la sphère.

**3228.** — On a un paraboloïde de révolution à axe vertical ; on fait tourner l'axe du paraboloïde autour d'une droite de front ne le rencontrant pas. Intersection de l'hyperboloïde de révolution ainsi défini et du paraboloïde.

**3229.** — Intersection d'un tore à axe vertical et d'un cône dont la directrice est un cercle dans le plan horizontal.

**3230.** — On donne une droite et deux points. Mener par l'un des points une droite qui soit à des distances données du second point et de la droite.

**3231.** — On donne deux droites D et Δ. Intersection de la surface engendrée par D tournant autour de Δ et de la surface engendrée par Δ tournant autour de D.

**3232.** — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical avec un cône ayant son sommet sur la méridienne de front de la surface et pour base un cercle dans le plan horizontal. Tangentes au point double.

**3233.** — On donne un tétraèdre ayant une face horizontale ; on considère les cercles circonscrits à deux des faces non horizontales. On fait tourner chacun d'eux autour du côté horizontal de la face à laquelle il est circonscrit. Intersection des tores ainsi engendrés. Tangente en un point.

**3234.** — On donne un cône par son sommet et sa directrice qui est une ellipse horizontale. C'est le cône asymptote d'un hyperboloïde. On donne un point de cet hyperboloïde ; construire le plan tangent.

**3235.** — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde de révolution dont l'axe est de front.

**3236.** — On donne un paraboloïde à plan directeur horizontal et défini par deux génératrices. On fait tourner l'une d'elles autour d'un axe vertical ne la rencontrant pas. Trouver l'intersection des deux surfaces.

**3237.** — On donne une surface gauche de révolution définie par son axe vertical et une génératrice de front G ayant pour trace horizontale le point A. Un cône a son sommet sur G et sa directrice est un cercle du plan horizontal passant par le point A et ayant en ce point une tangente de bout. Intersection des deux surfaces. Points à l'infini.

**3238.** — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un paraboloïde hyperbolique ayant un plan directeur horizontal et passant par deux génératrices de front de l'hyperboloïde.

**3239.** — Ombre portée d'une sphère sur un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal. Les rayons lumineux sont de front et font 45° avec le plan horizontal.

## VI. — Statique.

**3240.** — On considère un cercle de centre A parcouru par un poids mobile M et une droite AB fixe pesante non homogène. Trouver le lieu du centre de gravité du système.

**3241.** — Centre de gravité d'un segment de parabole limité par une perpendiculaire à l'axe

**3242.** — Etant donné un système de forces, montrer qu'il est possible de le réduire à deux forces égales et perpendiculaires et ceci d'une infinité de manières.

**3243.** — Trois points sont donnés sur un cercle et se repoussent proportionnellement à la distance qui les sépare. Y a-t-il une position d'équilibre ?

**3244.** — On donne un triangle ABC dans lequel $BC = 1^m$, $AC = 0^m,8$, $AB = 0^m,6$. En A on applique un poids de $5^{kg}$, en B un poids de $4^{kg}$ et en C un poids de $3^{kg}$. Calculer le centre de gravité du système.

**3245.** — On a une barre métallique de $1^m$ de long et pesant $5^{kg}$. Aux points de division 1, 2, 3,..., 10 de la barre divisée en 10 parties égales, on applique des poids de 1, 2, 3,..., $10^{kg}$. Centre de gravité du système.

**3246.** — Lieu des droites passant par un point donné et qui sont de moment constant par rapport à un système de forces. Cas où le moment est nul.

**3247.** — Etant donné un système de forces, on demande s'il existe un point tel que dans la réduction relative à ce point l'axe du couple résultant soit situé sur la droite $z = 0$, $ux + vy + w = 0$. Cela n'est possible que si la droite enveloppe une parabole. Démontrer que si l'on fait la réduction par rapport au foyer de cette parabole, le moment résultant est parallèle à $Oz$.

**3248.** — Un triangle est formé de trois tiges homogènes pesantes; on le suspend par un de ses sommets A ; trouver la position d'équilibre. Traiter le même problème en remplaçant le triangle par un polygone de $n$ côtés.

**3249.** — On considère le cadran d'une horloge et on applique à chacune des divisions horaires un poids égal à l'heure correspondante. Trouver le centre de gravité de ce système.

**3250.** — On applique aux sommets d'un tétraèdre des forces parallèles proportionnelles à la face opposée. Centre de ces forces.

**3251.** — On donne deux cercles, l'un dans le plan des $xy$, l'autre dans le plan des $zx$. On prend deux points M et M' sur ces cercles auxquels on suspend des poids $p$ et $p'$. Lieu du centre de gravité de ces poids, en supposant que M et M' décrivent les cercles dans le même temps.

**3252.** — On donne trois forces égales non situées dans un même plan $OF_1$, $OF_2$, $OF_3$. La résultante OR rencontre le plan $F_1F_2F_3$ en un point E. Calculer le rapport $\frac{OE}{OR}$ et déterminer la position du point E par rapport au triangle $F_1F_2F_3$.

**3253.** — Etant donné un polygone, on applique perpendiculairement au milieu des côtés des forces proportionnelles à ces côtés. Démontrer que le système est en équilibre. On suppose ensuite que les forces sont appliquées suivant les côtés, qu'arrive-t-il ?

**3254.** — Etant donné un système de forces on demande le lieu des points tels que le moment résultant du système par rapport à une parallèle à une direction fixe menée par le point du lieu ait une grandeur donnée.

**3255.** — Les sommets d'un tétraèdre repoussent un point de l'espace proportionnellement à leurs distances au point. Position d'équilibre.

**3256.** — Etant donnés un triangle ABC et un point M, trouver la position du point M pour qu'il soit en équilibre sous l'action des forces MA, MB, MC.

**3257.** — On donne un tétraèdre SABC et on considère les six forces représentées en grandeur et en position par les segments SA, SB, SC, BC, CA, AB. Réduction de ce système. Peut-il y avoir équilibre ?

**3258.** — Le moment résultant d'un système de forces par rapport à un point O est un vecteur OA. Si le point O décrit un plan P, le point A décrit un plan P'. Position de P' par rapport à P.

**3259.** — Equilibre d'une barre pesante dont les extrémités reposent sur une parabole dont l'axe est vertical et dont la concavité est tournée vers le haut.

**3260.** — Peut-on réduire les forces appliquées à un corps solide à deux qui aient pour lignes d'action deux génératrices de même système d'un hyperboloïde donné ?

**3261.** — Un disque semi-circulaire pesant situé dans un plan vertical repose sur un plan horizontal. Un poids P est attaché à l'une des extrémités du diamètre qui limite le disque. Position d'équilibre.

**3262.** — Une droite donnée a ses extrémités sollicitées par les sommets d'un tétraèdre proportionnellement à leurs distances aux sommets. Position d'équilibre.

**3263.** — Une tige AB de longueur $a + b$ repose par ses extrémités sur une parabole dont l'axe est vertical et dont la concavité est tournée vers le haut. Au point C de la tige tel que $CA = a$, $CB = b$ est attaché un poids $p$. Condition d'équilibre.

**3264.** — Un levier coudé mobile autour d'un point O est formé de deux tiges rectangulaires OA et OB dont les poids sont respectivement $p$ et $p'$. Au point A on applique un poids $q$. Position d'équilibre.

**3265.** — On donne un paraboloïde à axe vertical $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$ ; une barre de longueur $l$ qui porte des poids égaux à ses deux extrémités peut glisser sur la surface. Position d'équilibre.

**3266.** — Position d'équilibre d'un tétraèdre dont les sommets sont attirés par un point fixe proportionnellement à la distance.

**3267.** — Deux sphères de même rayon ($20^{cm}$) et de poids respectivement égaux à $50^k$ et $15^k$ sont suspendues par des fils de même longueur partant d'un même point. Position du centre de gravité de l'ensemble des deux sphères et position d'équilibre.

**3268.** — Les différents points d'un corps solide sont attirés par un plan par une force qui est une fonction donnée de la distance au plan. Condition d'équilibre.

**3269.** — Soit OA une barre pesante mobile autour du point O ; sa longueur est $5^m$ et elle pèse $10^k$ au mètre courant. En un point B ($OB = 1^m,5$) on applique une force $F = 50^k$ toujours horizontale. Position d'équilibre du système et réaction du point O.

**3270.** — On considère un cercle dans un plan vertical et une barre pesante de longueur $l$ dont les extrémités A et B reposent sur le cercle. Aux points A et B sont appliquées des forces verticales. Position d'équilibre de la barre.

**3271.** — A l'intérieur d'une sphère creuse de rayon R repose un triangle de poids P, aux sommets duquel sont appliqués des poids $p$, $p'$, $p''$. Position d'équilibre du triangle.

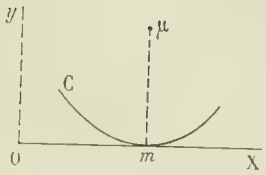
**3272.** — On donne une barre de longueur $l$, de poids $p$, fixée par son extrémité O. Au tiers de cette barre à partir du point O on attache une corde qui vient passer sur une poulie de dimensions négligeables située dans le même plan horizontal que le point O. Cette corde supporte un poids P. Position d'équilibre du système.

**3273.** — Equilibre d'une barre pesante dont les extrémités reposent sur deux plans inclinés.

## CONCOURS DE 1902 (*Suite*)

### ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (**Cours spéciaux**).

*Analyse.*




Une courbe donnée C roule sans glisser sur une droite OX et l'on demande le lieu du point $\mu$ centre de courbure de la courbe C correspondant au point de contact $m$.

Examiner le cas particulier de la cycloïde.

Chercher quelle doit être la courbe C pour que le lieu soit la parabole

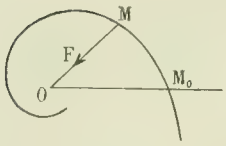
$$y = a + \frac{x^2}{a}.$$

(*Durée : 1 heures.*)

*Mécanique.*

Un point matériel M de masse $m$ est assujetti à se mouvoir sans frottement sur la spirale logarithmique

$$\rho = e^{-\theta},$$




rapportée à des coordonnées polaires, avec le point O pour pôle et la droite $OM_0$ pour axe polaire.

Il est attiré par le pôle O, proportionnellement à la distance OM ou $\rho$, avec une intensité

$$F = 2m\rho$$

Le point M étant abandonné, sans vitesse initiale, de la position $M_0$ pour laquelle $\theta = 0$, on demande d'étudier son mouvement.

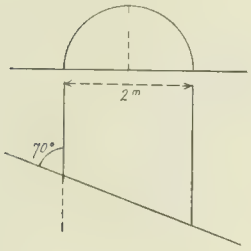
Au bout de quel temps parviendra-t-il en O, point asymptotique de la courbe correspondant à $\theta = \infty$ ?

Nota. — Il est rappelé aux candidats que l'angle V que fait le prolongement du rayon vecteur avec la tangente à la courbe dans le sens de l'angle polaire croissant se calcule par la formule $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$.

(*Durée : 4 heures.*)

*Épure de stéréotomie.*

PORTE BIAISE EN PLEIN CINTRE DANS UN MUR AVEC FRUIT

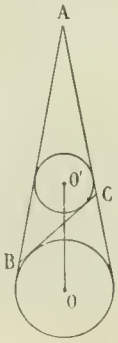



Un berceau en plein cintre de $2^m$ de diamètre surmonte une porte biaise rencontrant sous un angle de 70° un mur qui présente un fruit de 1/8 et qui est constitué par des assises de $20^{cm}$ de hauteur.

Appareiller la tête de ce berceau en pierres de taille et donner tous les panneaux nécessaires à la taille de l'un des voussoirs.

(*Durée : 4 heures.*)

*Trigonométrie.*




On donne deux cercles de centres O et O' et de rayons $R = 15^m$ et $R' = 9^m$ ; la distance des centres est

$$OO' = 32^m.$$

Calculer les angles et les côtés du triangle ABC admettant le cercle O' comme cercle inscrit et le cercle O comme cercle exinscrit.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1153.** — On considère un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

1° Montrer qu'il y a trois séries de sphères doublement tangentes à cet ellipsoïde et que pour une seule les plans des deux sections planes communes sont réels. Trouver le lieu des centres des sphères de cette série qui ont un rayon donné.

2° Soit $\Sigma$ la sphère variable qui décrit cette série. Trouver le lieu des points-sphères du faisceau linéaire déterminé par $\Sigma$ et par le plan polaire par rapport à l'ellipsoïde d'un point fixe $M(x_0, y_0, z_0)$.

3° Ce lieu est une quadrique. Discuter cette quadrique d'après la position du point M dans l'espace, et trouver le lieu des points M pour lesquels elle se réduit à un cône. E. H.

**1154.** — Lieu des centres des ellipses ayant un foyer commun, passant par un point donné et touchant une droite donnée.

**1155.** — On a étudié avec précision, à Paris, l'influence de la température sur la pression maxima de la vapeur d'eau : par exemple, dans le voisinage de 100°, une variation de température de 1° produit une variation de pression de $27^{\text{mm}},25$. Cela posé, on détermine, en divers points du globe, le point d'ébullition de l'eau à $\frac{1}{500}$ de degré près et on lit en même temps le baromètre à $\frac{1}{20}$ de millimètre. Comment pourra-t-on en déduire les variations de $g$, et quel sera le degré de précision de cette mesure ? Quelle sera la variation de température ou de lecture barométrique qui correspondra à un déplacement de 1° en latitude dans le voisinage du 45e parallèle, si l'on admet que la variation de $g$ soit représentée par la formule $g = g_{45}(1 - 0{,}00259 \cos 2\varphi)$ ?

# DEUXIÈME PARTIE

## ALGÈBRE

**1093.** — *On considère un polynome du troisième degré, $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ; montrer qu'il y a une infinité de trinomes du second degré, $x^2 + px + q$, dont les racines font prendre au polynome donné la même valeur.*

*Trouver $q$ en fonction de $p$. Etudier ensuite les variations des racines de ce trinome quand $p$ varie.*

Soient $\alpha$ et $\beta$ les racines du trinome

$$x^2 + px + q = 0.$$

Substituons ces racines dans le polynome donné ; les valeurs qu'il prend sont

$$a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d,$$
$$a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d.$$

Pour qu'elles soient égales il faut que

$$(3) \qquad a(\alpha^3 - \beta^3) + b(\alpha^2 - \beta^2) + c(\alpha - \beta) = 0;$$

or $\alpha$ est différent de $\beta$, car la proposition est évidente pour tout trinome dont les racines sont égales ; nous pouvons donc diviser le premier membre de l'équation (1) par $\alpha - \beta$, et l'écrire

$$a(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + b(\alpha + \beta) + c = 0,$$

ou

$$a(\alpha + \beta)^2 - a\alpha\beta + b(\alpha + \beta) + c = 0.$$

D'autre part nous savons que

$$\alpha + \beta = -p, \qquad \alpha\beta = q,$$

par conséquent la relation (2) devient finalement

$$(2) \qquad ap^2 - aq - bp + c = 0.$$

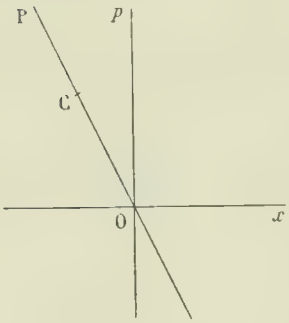
On a donc une infinité de trinomes répondant à la question ; il suffit que les coefficients $p$ et $q$ du trinome considéré soient liés par la relation (2).

La forme générale de ces trinomes est donc

$$x^2 + px + \frac{ap^2 - bp + c}{a},$$

dans laquelle $p$ est arbitraire.

Pour étudier les variations des racines quand $p$ varie, je construis la courbe




$$x^2 + px + \frac{ap^2 - bp + c}{a} = 0,$$

en prenant $x$ comme abscisse et $p$ comme ordonnée.

Cette équation représente une ellipse. Le diamètre des cordes parallèles à $Ox$ est la droite OP, d'équation

$$2x + p = 0;$$

son centre est sur cette droite, au point dont l'abscisse est

$$x = -\frac{b}{3a}.$$

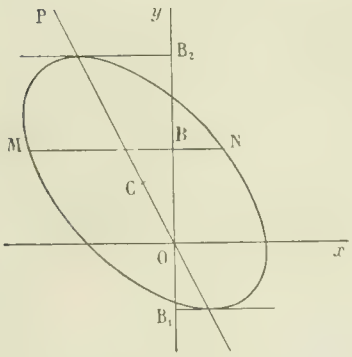
1° $b^2 - 3ac < 0$ ; l'ellipse est imaginaire.

Dans ce cas, les racines du trinome sont imaginaires quel que soit $p$.

2° $b^2 - 3ac = 0$ ; l'ellipse se réduit à son centre C. Les racines du trinome sont imaginaires sauf pour la valeur $p = \frac{2b}{3a}$. Pour cette valeur, le trinome a une racine double :

$$x = -\frac{b}{3a}.$$

3° $b^2 - 3ac \geqslant 0$ ; l'ellipse est alors réelle, on peut la construire et suivre les variations des racines.




Pour avoir les racines correspondant à une valeur $p$, on portera sur $Oy$ une longueur $OB = p$, par B on mènera la parallèle à $Ox$, qui rencontre l'ellipse en M et N. Les vecteurs BM et BN représentent les valeurs des racines correspondant à la valeur $p$ du paramètre.

Les racines seront réelles si $p$ est dans l'intervalle

$$\frac{+2b - 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, \qquad \frac{+2b + 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a},$$

c'est-à-dire si B est compris entre $B_1$ et $B_2$.

Pour ces limites, elles sont égales, dans le premier cas, à $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$, dans le second, à $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$.

La plus petite racine passera par un minimum qui est $\frac{-b - 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$, et la plus grande, par le maximum $\frac{-b + 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$.

J. MARCHAL.

Remarque. — Toute cette discussion eût pu être faite en résolvant l'équation obtenue par rapport à $x$ et en discutant le trinome du second degré en $p$ placé sous la radical ; la construction de l'ellipse elle-même eût résulté de cette discussion conformément au procédé qu'on emploie pour construire les lignes du second degré par une méthode élémentaire.

Bonnes solutions : MM. Bonnard, lycée Janson-de-Sailly ; J. Haag, lycée de Nancy ; E.-N. Barisien.

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1110.**— *On considère deux axes de coordonnées rectangulaires* $Ox$ *et* $Oy$ *et le système des cercles* (C) *qui passe en* O *et qui coupe les axes en deux nouveaux points* A *et* B, *tels que la droite* AB *passe par un point fixe de la deuxième bissectrice de l'angle des axes ayant pour coordonnées* $a$ *et* $-a$, *et on demande :*

1° *Le lieu des centres des cercles* (C) *;*

2° *Le lieu du second point de rencontre de deux cercles du système qui sont orthogonaux,* C *et* C', *et l'enveloppe de la droite qui joint leurs centres ;*

3° *Le lieu des extrémités sur cette droite du diamètre du cercle de rayon minimum appartenant au faisceau linéaire* (C) *et* (C') *et le lieu des centres de similitude de ces deux cercles. Construire ce lieu.*

**1.** L'équation générale des cercles (C) est évidemment

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0,$$

$\alpha$ et $\beta$ désignant les coordonnées du centre. Le point A relatif au cercle $(\alpha, \beta)$ a pour abscisse $2\alpha$, le point B a pour ordonnée $2\beta$ et la droite AB a pour équation $\frac{x}{2\alpha} + \frac{y}{2\beta} - 1 = 0$; en exprimant qu'elle passe au point de coordonnées $a, -a$, on obtient la relation

$$\frac{a}{2\alpha} - \frac{a}{2\beta} - 1 = 0;$$

ou

$$(1) \qquad 2\alpha\beta + a(\alpha - \beta) = 0;$$

cette équation représente le lieu des centres. Nous voyons donc que ce lieu est une hyperbole équilatère passant à l'origine et au point $(a, -a)$ et ayant ses asymptotes parallèles aux axes; son centre est le milieu du segment formé par les deux points que nous venons de signaler, O et P.

**2.** Pour que deux cercles de ce système soient orthogonaux, il faut que l'on ait la relation

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0;$$

or l'équation (1) nous donne

$$\beta = \frac{a\alpha}{a - 2\alpha};$$

par conséquent, la condition d'orthogonalité prend la forme

$$2\alpha\alpha' - a(\alpha + \alpha') + a^2 = 0.$$

D'autre part, en portant la valeur que nous venons d'indiquer pour $\beta$ dans l'équation du cercle, celle-ci devient

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - \frac{2a\alpha y}{a - 2\alpha} = 0;$$

elle est du second degré en $\alpha$ et montre par suite que par tout point du plan il passe deux cercles de ce système ; ce seront deux cercles orthogonaux si les racines $\alpha$ et $\alpha'$ de cette équation du second degré en $\alpha$ vérifient la relation écrite plus haut. Or l'équation du second degré en $\alpha$ nous donne

$$\alpha + \alpha' = \frac{x^2 + y^2 + ax + ay}{2x},$$

$$\alpha\alpha' = \frac{a(x^2 + y^2)}{4x};$$

puis la relation d'orthogonalité se réduit à

$$x - y = 0;$$

le lieu du second point de rencontre des deux cercles C et C′ est donc la première bissectrice de l'angle des axes.

Quant à la ligne des centres, elle a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \dfrac{a\alpha}{a-2\alpha} & 1 \\ \alpha' & \dfrac{a\alpha'}{a-2\alpha'} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, après suppression du facteur $\alpha' - \alpha$,

$$-a^2x + (a-2\alpha)(a-2\alpha')y + 2a\alpha\alpha' = 0;$$

mais la condition d'orthogonalité que nous avons trouvée antérieurement peut s'écrire

$$(a-2\alpha)(a-2\alpha') + a^2 = 0,$$

l'équation précédente se simplifie donc et s'écrit finalement

$$a(x+y) - 2\alpha\alpha' = 0.$$

Nous voyons alors que la ligne des centres des deux cercles C et C′ reste parallèle à la seconde bissectrice et enveloppe le point à l'infini sur cette droite.

**3.** Le résultat que nous venons de trouver va nous permettre de résoudre aisément la troisième partie. En effet le cercle de rayon minimum a pour centre le pied de l'axe radical, c'est-à-dire un point de la première bissectrice, et passe à l'origine; il a donc pour équation $x^2 + y^2 - 2\lambda(x+y) = 0$; la ligne des centres est alors la parallèle à la seconde bissectrice menée par le point de coordonnées $\lambda$, $\lambda$, c'est-à-dire la droite

$$x + y - 2\lambda = 0,$$

et l'élimination de $\lambda$ entre les deux équations est immédiate : elle fournit, pour lieu des points de rencontre, $xy = 0$. Ce lieu se compose donc des deux axes.

Nous aurons les centres de similitude en joignant les deux centres à l'origine et prenant les bissectrices de l'angle ainsi obtenu et leurs points de rencontre avec la ligne des centres. Les deux centres sont à l'intersection de l'hyperbole que nous avons trouvée au début avec la ligne des centres

$$x + y - 2\lambda = 0,$$

et nous aurons les rayons qui les joignent à l'origine en éliminant la variable d'homogénéité entre les deux équations; ce calcul nous donne

$$4\lambda xy + a(x^2 - y^2) = 0.$$

Le faisceau des bissectrices de ces deux droites est

$$\lambda(x^2 - y^2) - axy = 0.$$

Le lieu des centres de similitude est dès lors immédiat; c'est la courbe représentée par l'équation

$$(3) \qquad (x-y)(x+y)^2 - 2axy = 0.$$

Cette courbe est une cubique unicursale ayant l'origine pour point double et pour tangentes en ce point les deux axes de coordonnées; si on change $x$ en $-y$ et $y$ en $-x$, l'équation ne change pas; donc la courbe est symétrique par rapport à la seconde bissectrice; elle a une direction asymptotique double parallèle à cette seconde bissectrice, et, comme il est aisé de le vérifier, deux branches paraboliques dans cette direction, une direction asymptotique

simple parallèle à la première bissectrice et pour asymptote correspondante la droite dont l'équation est

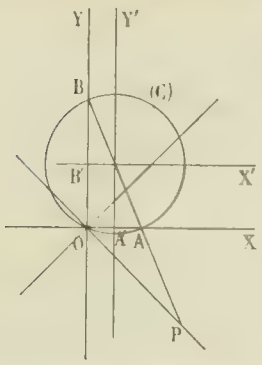
$$x - y = \frac{a}{2}.$$

Si l'on ajoute cette remarque que les droites $x - y = k$, dans lesquelles $k$ est plus grand que $\frac{a}{2}$, ne rencontrent pas la courbe, rien n'est plus aisé maintenant que de la tracer.

M. LAURENCE.

Bonnes solutions : MM. J. Haag, lycée de Nancy ; L. Painvin, lycée de Nantes ; Frizat, à Toulouse.
Assez bonnes solutions MM. E.-N. Barisien ; Guy de Valbergues ; H. Lefevre, à Paris ; J.-B. Martin, pensionnat de Valbenoite.

**Solution géométrique.** — Soit P le point de coordonnées $a$ et $-a$. La droite PAB trace sur les axes deux séries homographiques A et B ; par suite, les séries A′ et B′ décrites par les milieux de OA et de OB sont homographiques aussi. Si alors on considère les droites A′Y′ et B′X′, parallèles aux axes, elles décrivent deux faisceaux homographiques dont les sommets sont à l'infini sur les axes ; le lieu de leurs points d'intersection, qui est le centre du cercle (C), est donc une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes. Cette ligne passe évidemment aux points O et P ; d'ailleurs elle admet la droite OP pour axe de symétrie ; donc O et P sont les deux sommets. On peut d'ailleurs voir immédiatement qu'elle admet pour asymptotes les deux parallèles aux axes menés par le milieu de OP.




La ligne des centres de deux cercles orthogonaux du système est une corde de l'hyperbole vue du point O sous un angle droit ; d'après le théorème de Frégier, elle passe par un point fixe situé sur la normale en O à l'hyperbole, c'est-à-dire sur la seconde bissectrice de l'angle des axes ; ce point est à l'infini puisque la droite de l'infini est l'une des cordes de l'hyperbole vues du point O sous un angle droit. Donc la ligne des centres de deux cercles orthogonaux du système reste parallele à la seconde bissectrice. Comme ces cercles se coupent en O, il en résulte que le lieu de leur second point de rencontre est la première bissectrice.

Le cercle de rayon minimum du faisceau linéaire formé par les cercles C et C′ a son centre au point de rencontre de la ligne des centres avec l'axe radical des deux cercles ; il a donc son centre sur la première bissectrice, et, comme il passe à l'origine, il rencontre sur les axes la parallèle à la seconde bissectrice menée par son centre ; le lieu des extrémités du diamètre de ce cercle situé sur la ligne des centres de C et de C′ se compose donc des deux axes de coordonnées.

Pour apercevoir le lieu des centres de similitude, comparons le faisceau formé par les lignes des centres avec le faisceau formé par les droites qui joignent l'origine aux centres de similitude : à une droite du premier faisceau correspondent deux droites du second ; si nous nous donnons au contraire une droite du second faisceau, l'angle droit ayant cette droite pour bissectrice est bien déterminé et coupe l'hyperbole aux deux centres de C et C′, la ligne des centres est donc bien déterminée. La correspondance qui existe entre les deux faisceaux est une correspondance (1, 2) et le lieu de leurs intersections est une cubique ayant un point double au point O et un point simple à l'infini sur la seconde bissectrice de l'angle des axes.

Les tangentes au point O sont les droites qui correspondent à la seconde bissectrice elle-même ; or elle coupe l'hyperbole en O et en P, les droites qui les joignent au point O sont les deux bissectrices de l'angle des axes, leurs bissectrices sont les axes eux-mêmes ; ce sont donc les tangentes au point O.

La tangente au point à l'infini sur la seconde bissectrice est rejetée à l'infini, car l'un des centres de similitude ne s'éloigne à l'infini dans cette direction que lorsque les droites joignant l'origine aux centres de C et de C′ coïncident avec les axes, c'est-à-dire lorsque la ligne des centres est rejetée à l'infini ; mais alors l'autre centre de similitude est aussi à l'infini et la cubique a un second point à l'infini sur la première bissectrice.

Il est d'ailleurs évident *a priori* que la droite OP est un axe de symétrie de la figure tout entière, et, par suite, un axe de symétrie de la cubique que nous venons de trouver.

J. HAAG, lycée de Nancy.

# CONCOURS DE 1902 (*Suite*)

## ÉCOLE CENTRALE (**Deuxième Session**).

### *Mathématiques.*

(*15 septembre, de 7 h. a 11 h.*)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET CINÉMATIQUE

**1156**. — La lettre $t$ représentant un paramètre réel arbitraire, on considère le point M du plan dont les coordonnées rectangulaires sont :

$$x = \frac{t^2+1}{2t}, \qquad y = \frac{2t-1}{t^2}.$$

1° Etudier les variations de $x$, et aussi celles de $y$, lorsque $t$ croit de $-\infty$ à $+\infty$.

2° Considérant la ligne S lieu du point M, donner la formule du coefficient angulaire de la tangente en fonction de la valeur $t_0$ du paramètre qui détermine le point de contact.

Appliquer cette formule aux points remarquables : point d'inflexion, point de rebroussement. — Asymptotes de la ligne S. — Tracer la courbe S.

3° La lettre $t$ représentant le temps, on demande de discuter la vitesse du point M sur la trajectoire S, pour les valeurs de $t$ supérieures à 1/2.

MÉCANIQUE

**1157**. — 1° Enoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un corps solide invariable sollicité par des forces, sachant que ce corps a un axe fixe autour duquel il ne peut que tourner.

2° La fixité de cet axe étant obtenue en fixant deux de ses points, établir les relations auxquelles doivent satisfaire les réactions exercées par ces points sur le corps en équilibre.

3° Une portion de plan indéformable, limitée par le rectangle ABCD (AB = 4, BC = 12), qui a deux points fixes E, F, milieux des côtés opposés AB, CD, est en équilibre sous l'action des forces P, Q, R, lorsqu'elle est horizontale. P et Q orthogonales avec EF, sont appliquées l'une P en I, au 1/6 de DE à partir de D, l'autre Q en H, au 1/3 de EC à partir de E.

Les projections sur l'axe DC, comptés positivement de D vers C, des vecteurs qui représentent ces forces sont $-2$ et $+3$, et les projections de ces mêmes vecteurs sur la verticale (dirigée de haut en bas) sont 4 et 5.

Calculer l'intensité de la force R sachant qu'elle est verticale et que son point d'application est le milieu K de DE.

4° Représenter les projections des forces P, Q, R, sur un plan perpendiculaire à EF.

### *Physique et Chimie.*

I. — Mesure des indices de réfraction des solides et des liquides. Méthode du duc de Chaulnes. Méthode de Descartes. Méthode de la réflexion totale.

II. — **1158**. — Deux boules métalliques dont la distance des centres est $d$ centimètres sont chargées positivement, la première d'une masse électrique $+Q$, la seconde d'une masse $+q$. Une balle de sureau est assujettie à se déplacer sur la ligne des centres. Déterminer la position d'équilibre.

*Application :* $d = 50^{cm}$, $+Q = 16$, $+q = 4$.

III. — Acide hydrosulfureux.

IV. — **1159**. — On demande de préparer les composés suivants en prenant pour chaque expérience une molécule-gramme d'orthophosphate tricalcique.

1° Le trichlorure de phosphore. On utilisera directement l'orthophosphate sans préparer, au préalable, avec lui, le phosphore libre.

2° Le perchlorure de phosphore.

3° L'acide métaphosphorique.

4° Le phosphure d'hydrogène gazeux.

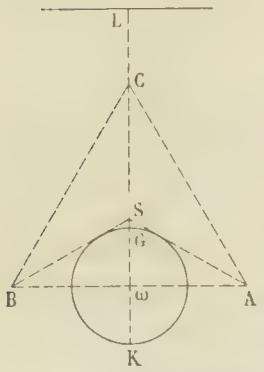
Indiquer la marche des expériences, écrire les équations et calculer les poids des composés obtenus sauf pour le phosphure d'hydrogène dont on déterminera le volume sans faire de corrections.

(Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.)

*(15 septembre, de 2 h. à 5 h.)*

### *Géométrie descriptive.*

INTERSECTION D'UN TORE ET D'UN CONE




**1160.** — On donne dans le plan horizontal de projection le triangle équilatéral ABC de 160$^{mm}$ de côté. Ce triangle est la trace horizontale d'un trièdre trirectangle SABC dont le sommet $s$ est situé en dessous du plan horizontal.

On déterminera la projection des 3 arêtes de ce trièdre.

On considère une sphère dont le centre ω est au milieu de la droite AB; le rayon de cette sphère est de 40$^{mm}$. Le grand cercle vertical GK de cette sphère, en tournant autour de l'arête SC du trièdre, engendre un tore dont on déterminera l'intersection avec le cône de sommet S circonscrit à la sphère.

On représentera le tore avec l'entaille conique en limitant la surface du tore aux deux faces ASC et BSC du trièdre donné.

Cadre de 27$^{cm}$ sur 45. C est à égale distance des petits côtés et à 50$^{mm}$ du bord supérieur.

Titre extérieur : GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Titre intérieur : TORE ENTAILLÉ PAR UN CÔNE.

*(16 septembre, de 7 h. à 11 h.)*

### *Trigonométrie.*

PROBLÈME.

**1161.** — On donne deux circonférences dont les rayons sont R et R'. Elles ont une corde commune $AD = d$. On donne en outre une corde qui passe par le point D et coupe les circonférences aux points B et C respectivement. Sa longueur est $BC = a$.

1° Résoudre le triangle BAC.

2° Résoudre ce triangle en supposant que BC est la plus grande corde possible. Dans cette hypothèse, chercher l'accroissement de l'angle A en supposant que R varie de ΔR, R' de ΔR' et en négligeant les produits et les puissances des accroissements.

*(16 septembre, de 2 h. à 4 h.)*

CALCUL

**1162.** — Calculer le plus petit des angles positifs qui satisfont à l'équation

$$\operatorname{tg}(60x + \alpha) = \sqrt{a^3} \log \cos^2 3\alpha,$$

$$\alpha = 31^\circ 25' 32'' 45, \qquad a = 2{,}005475.$$

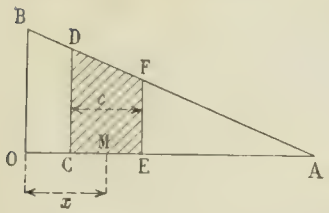
*(16 septembre, de 4 h. à 5 h.)*

---

## ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (**Cours préparatoires**).

### *Algèbre.*

**1163.** — Etant donné un triangle rectangle AOB ayant pour côtés de l'angle droit $OA = a$ et $OB = b$, on mène au côté OB les deux parallèles CD et EF, *comprises entre ce côté* OB *et le sommet* A, et à la distance $CE = c$ l'une de l'autre.




Soit $x$ la distance du point O au milieu M de CE.

1° Déterminer $x$ de manière que le volume engendré par le trapèze CDEF en tournant autour de OB ait une valeur donnée V.

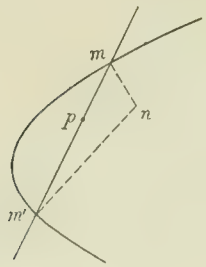
2° Discuter et déduire du résultat de la discussion le maximum et le minimum de V.

Appelons $V_1$ le maximum de V et $d$ la valeur correspondante de OC.

3° Prenant $b = \frac{c}{16}$, déterminer $c$ en fonction de $a$ de manière que $V_1$ soit égal au volume de la sphère ayant $d$ pour diamètre

4° Indiquer le nombre des racines de l'équation en $c$ ainsi obtenue qui conviennent à la question.

*(Durée : 3 h. 1/2.)*




*Géométrie analytique.*

**1164.** — Lieu du point de concours $n$ des normales à une parabole aux points $m$ et $m'$ où cette courbe est rencontrée par une sécante $mm'$ qui passe par un point fixe $p$.

(*Durée : 3 h. 1/2.*)

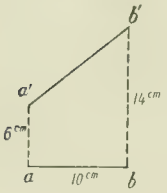
*Lavis*

Exécuter à l'encre de Chine, à teintes plates ou à teintes fondues, le lavis d'une sphère de 14cm de diamètre.

(*Durée : 3 h. 1/2.*)

*Épure de Géométrie descriptive.*

Le segment de front AB, dont les projections $ab$, $a'b'$ sont définies par le croquis ci-joint, est une arête d'un tétraèdre régulier dont une autre arête AC est horizontale (le sommet C étant en avant du plan de front de AB), et dont le quatrième sommet S est situé au-dessus de la face ABC.




Représenter la partie de ce tétraèdre qui est extérieure à la sphère de sommet S tangente à la face ABC.

Aux points où les arêtes SA, SB, SC rencontrent cette sphère on déterminera les tangentes à l'intersection de la sphère et du tétraèdre.

Nota. — Le solide à représenter sera dessiné en noir, les arêtes cachées étant indiquées en pointillé. Les lignes de construction seront tracées en rouge, les tangentes demandées en bleu.

(*Durée : 3 h. 1/2.*)

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1165.** — Par le point de contact O de deux cercles tangents et de rayons R et R', on fait passer un cercle qui passe en outre par un point fixe A de la ligne des centres et qui rencontre les cercles donnés en deux points variables M et M'.

Trouver l'enveloppe de la droite MM' et montrer les changements de forme de la courbe quand on fait varier la longueur $OA = 2a$. V. Hioux.

**1166.** — On donne un cercle fixe $(c)$ et un point fixe I. Par un point A on mène une sécante variable ABC ; les droites IB, IC coupent $(c)$ aux seconds points B'C'. Montrer que la droite B'C' passe par un point fixe A'.

La correspondance entre les points A et A' est uniforme et réciproque. Trouver le lieu des points A confondus avec leurs correspondants. Trouver le lieu des points A qui ont pour correspondants des points à l'infini.

Quand le point A décrit une droite, il en est de même du point A'. Plus généralement, quand le point A décrit une courbe quelconque, le point A' décrit une courbe de même degré.

La transformée d'un cercle est une conique $(\Gamma)$ ; discuter son genre. On suppose que le cercle passe par deux points fixes ; lieu du centre de $(\Gamma)$.

Dans le cas où $(\Gamma)$ est une parabole, trouver ses éléments. M. Rebeix.

## BIBLIOGRAPHIE

**Œuvres mathématiques** de Francesco Brioschi publiées par un comité composé de MM. Ascoli, Beltrami, Colombo, Cremona, Negri et Schiaparelli. — Ulrico Hœpli, éditeur-libraire à Milan.

Le comité qui s'était formé pour honorer le grand mathématicien Brioschi et lui élever une statue, veut compléter son œuvre en publiant les travaux mathématiques de cet illustre auteur. Aujourd'hui les deux premiers volumes ont déjà paru et la publication se poursuivra régulièrement. Le premier volume renferme 54 notes et mémoires et le second, 35. L'édition complète comprendra 5 volumes. Disons pour terminer que cette édition est faite avec le plus grand soin, en beaux volumes in-4°, parfaitement imprimés, et que le premier volume est orné d'un beau portrait de l'auteur.

**Œuvres mathématiques** de Eugenio Beltrami, publiées par les soins de la Faculté des sciences de l'Université de Rome. — Ulrico Hœpli, éditeur-libraire à Milan.

La même maison publie dans le même format et avec le même luxe les travaux mathématiques d'un autre mathématicien illustre qui fut une des gloires de l'Italie moderne, Eugenio Beltrami. Le premier volume a déjà paru, il est orné d'un beau portrait de l'auteur et renferme sa biographie. Il contient 26 notes et mémoires variés.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

13e Année. N° 3 Décembre 1902

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### DÉMONSTRATION POUR LES POLYGONES DE PONCELET

par M. G. Fontené

Le lieu du dernier sommet d'un polygone de $n$ côtés circonscrit à une conique S, et dont $n-1$ sommets décrivent une conique S', est une conique S''; car, sur une tangente quelconque à la conique S, il existe seulement deux points du lieu. Les sommets sur S' étant $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, le sommet libre étant $A_n$, prenons pour $A_{\frac{n+1}{2}}$ si $n$ est impair, l'un des quatre points communs aux deux coniques, pour $A_{\frac{n}{2}}$ et $A_{\frac{n}{2}+1}$ si $n$ est pair, le point de contact avec S' de l'une des quatre tangentes communes aux deux coniques ; de cette façon, deux sommets dont les indices ont pour somme $n+1$ sont confondus, jusqu'aux sommets $A_2$ et $A_{n-1}$ ; on obtient le sommet $A_1$ sur la tangente $A_2A_1$, et, quand on mène les tangentes qui partent des points $A_{n-1}$ et $A_1$, pour déterminer le point $A_n$, comme la première tangente passe en $A_1$, ce point $A_n$ est en $A_1$ c'est-à-dire *sur la conique* S'. La recherche d'un polygone de $n$ côtés circonscrit à S et inscrit à S' est donc généralement un problème impossible, qui devient indéterminé si la conique S'' se confond avec la conique S' : il suffit pour cela que le problème ait une solution. On peut faire le raisonnement corrélatif.

Cette démonstration du théorème de Poncelet est une réduction de celle qui a été donnée par M. Hurwitz (*Mathematische Annalen*, 1879) en employant les idées de correspondance, et qui a été depuis retrouvée par divers auteurs. On a remarqué depuis longtemps que, pour des polygones ayant au moins cinq côtés, l'existence d'une solution entraîne l'indétermination par ce seul fait que la recherche d'un sommet est un problème du 4e degré dont on a au moins cinq solutions ; les considérations précédentes n'en conservent pas moins leur intérêt, même pour ce cas, en donnant l'explication du paradoxe. On peut y joindre les remarques faites dans le numéro de février 1901.

### SUR LA FORMULE DE TAYLOR ET LA FORMULE DU BINOME

par M. A. Tresse, professeur au collège Rollin.

Il est intéressant de déduire la formule de Taylor pour le cas d'un polynome entier en $x$ des premières notions du calcul algébrique des polynomes; la preuve que j'en donne, sans être nouvelle, comme je l'espère, doit être cependant peu connue.

On appelle *dérivée* ou *dérivée première d'un polynome entier en* $x$, $f(x)$, et on désigne par $f'(x)$, le coefficient de $h$ dans le développement du polynome entier en $h$, $f(x+h)$. On appelle *dérivée d'ordre* $p$, et on désigne par $f^p(x)$, la dérivée de la dérivée d'ordre $p-1$.

L'existence de ces dérivées est immédiate. De ces définitions on déduit de suite les conséquences bien connues qui suivent :

la *dérivée d'une constante* est *nulle* ;

la dérivée de $x$ est *un* ;

la dérivée d'une somme, $f+\varphi$ est la somme des dérivées $f'+\varphi'$ ;

la dérivée d'un produit $f\varphi$ est $f\varphi'+\varphi f'$, car $(f+hf'+\ldots)(\varphi+h\varphi'+\ldots)=f\varphi+h(f\varphi'+\varphi f')+\ldots$ ;

on en déduit enfin la dérivée du produit d'un nombre quelconque de facteurs. et, en particulier, la dérivée d'une puissance $f^m$, savoir $mf^{m-1}f'$.

La dérivée de $x^m$ est $mx^{m-1}$,

et celle de $ax^m$, $max^{m-1}$.

*Formule de Taylor.* — Soit $f(x)$ un polynome entier en $x$, de degré $m$ ; *a priori* on a

$$f(x+h)=f(x)+hf_1(x)+h^2f_2(x)+\ldots+h^{p-1}f_{p-1}(x)+h^pf_p(x)+\ldots+h^mf_m(x),$$

où les coefficients sont des polynomes entiers en $x$.

Il en résulte pour $f(x+h+k)$ les deux développements suivants :

$$f(x+h+k)=f(x+k)+hf_1(x+k)+\ldots+h^{p-1}f_{p-1}(x+k)+\ldots+h^mf_m(x+k),$$

et
$$f(x+h+k)=f(x)+(h+k)f_1(x)+\ldots+(h+k)^pf_p(x)+\ldots+(h+k)^mf_m(x).$$

Cherchons dans chacun d'eux le coefficient de $h^{p-1}k$. Dans le premier, il suffit de prendre le coefficient de $k$ dans le développement de $f_{p-1}(x+k)$, c'est-à-dire $f'_{p-1}$ ; dans le second, il suffit de remarquer que le coefficient du monome de degré $p$ en $h^{p-1}k$ ne peut provenir que de l'ensemble des termes de degré p en $h$ et $k$, c'est-à-dire de $(h+k)^p$. Or, dans $(h+k)^p$ le coefficient de $k$ est $ph^{p-1}$, puisque la dérivée de $x^p$ est $px^{p-1}$ ; le coefficient cherché est donc $pf_p(x)$. Donc

$$pf_p=f'_{p-1}, \qquad \text{ou} \qquad f_p=\frac{1}{p}f'_{p-1},$$

et, par suite, de proche en proche,

$$f_2=\frac{1}{2}(f_1)'=\frac{1}{2}f'',$$

$$f_3=\frac{1}{3}(f_2)'=\frac{1}{2.3}f''',$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

et, généralement
$$f_p=\frac{1}{p}(f_{p-1})'=\frac{1}{2.3\ldots(p-1)p}f^{(p)}.$$

D'où la formule de Taylor :

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^p}{1.2\ldots p}f^{(p)}(x)+\ldots+\frac{h^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}(x).$$

*Binome de Newton.* — En appliquant ce résultat au polynome $f(x)=x^m$, on trouve la formule du binome

$$(x+h)^m=x^m+\frac{m}{1}hx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}h^2x^{m-2}+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots(p-1)p}h^px^{m-p}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots(m-1)m}h^m.$$

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1101.** — *On donne deux droites fixes,* D *et* D′, *et on considère une droite mobile* Δ *qui s'appuie sur ces deux droites.*

1° *Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée d'un point fixe* A *sur la droite* Δ.

2° *Ce lieu est une surface cubique qui contient les droites* D *et* D′. *Montrer que tout plan passant par* D *ou par* D′ *coupe cette surface suivant un cercle. Faire voir qu'il y a d'autres séries de sections circulaires.*

3° *Trouver le lieu des axes des cercles dont les plans passent par la droite* D.

Prenons pour axes les axes de symétrie des deux droites : la perpendiculaire commune pour axe des $z$, et les deux parallèles aux bissectrices de l'angle des deux droites menées par le milieu de la portion comprise entre elles, pour axes des $x$ et des $y$.

Les équations des deux droites seront

$$(\mathrm{D})\begin{cases} y - mx = 0, \\ z - h = 0; \end{cases} \qquad (\mathrm{D}')\begin{cases} y + mx = 0, \\ z + h = 0; \end{cases}$$

et, en désignant par $\alpha$ et $\alpha'$ les abscisses de deux points pris respectivement sur D et D′, nous aurons immédiatement les équations de la droite mobile,

$$\frac{x - \alpha}{\alpha' - \alpha} = \frac{y - m\alpha}{-m(\alpha + \alpha')} = \frac{z - h}{-2h}.$$

Posons alors, pour simplifier, $\alpha + \alpha = 2u$, $\alpha' - \alpha = 2v$, nous aurons $\alpha = u - v$, $\alpha' = u + v$, puis les équations précédentes deviendront

$$\frac{x - u + v}{v} = \frac{y - m'u - v}{-mu} = \frac{z - h}{-h},$$

ou

$$\frac{x - u}{v} = \frac{y - mv}{-mu} = \frac{z}{-h}.$$

Soient alors $a$, $b$, $c$ les coordonnées du point A ; le plan perpendiculaire à la droite mobile mené par ce point a pour équation

$$v(x - a) - mu(y - b) - h(z - c) = 0,$$

et il est aisé d'éliminer $u$ et $v$ entre les équations de la droite et celle du plan : les deux premières peuvent s'écrire, en égalant successivement les deux premiers rapports au troisième,

$$hu - vz - hx = 0,$$
$$mzu - hmv - hy = 0,$$

et elles donnent

$$\frac{u}{yz - mhx} = \frac{v}{hy - mxz} = \frac{h}{m(z^2 - h^2)};$$

l'équation de la surface est donc

$$(1) \qquad (x - a)(hy - mxz) + m(y - b)(mhx - yz) - m(z - c)(h^2 - z^2) = 0.$$

Elle représente une surface du troisième degré qui contient les droites D et D′, car si on coupe par le plan $z - h = 0$ ou par le plan $z + h = 0$, on trouve $y - mx$ ou $y + mx$ en facteur. Faisons $z = h$ dans l'équation ; nous obtenons

$$(y - mx)[x - a - m(y - b)] = 0;$$

ce plan coupe donc la surface suivant une droite à l'infini, suivant la droite D et suivant une autre droite qui passe par la projection du point A sur le plan $z = h$ et qui est perpendiculaire à la seconde

droite D′ ; de même, en faisant $z = -h$, nous obtenons $(y + mx)[x - a + m(y - b)] = 0$, c'est-à-dire une droite à l'infini, la droite D′ et la perpendiculaire abaissée sur la direction de D, dans le plan $z = -h$, de la projection du point A sur ce plan. Pour abréger le discours, nous désignerons ces deux nouvelles droites situées sur la surface par $\Delta$ et $\Delta'$.

2° Les directions asymptotiques de la surface sont données par $z = 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; les quatre droites D, D′, $\Delta$, $\Delta'$ ont leurs points à l'infini dans le plan $z = 0$. Il existe d'autres droites parallèles à ce plan qu'on obtient en faisant $z = \lambda$ dans l'équation de la surface et écrivant ensuite que la conique ainsi obtenue se réduit à deux droites ; on trouve ainsi une équation du cinquième degré en $\lambda$ qui admet les deux racines $h$ et $-h$ et trois autres racines $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ; à chacune d'elles correspondent deux droites situées dans le plan correspondant $z = \lambda$ ; il y a donc encore six droites situées sur la surface et qui ne sont pas des droites isotropes.

Cela posé, menons un plan quelconque par l'une de ces dix droites, il coupera la surface suivant une cubique circulaire qui se décompose en la droite envisagée et un cercle : il y a donc dix séries de sections circulaires situées sur la surface.

Pour mettre en évidence les cercles situés dans les plans qui passent par la droite D, nous allons d'abord transformer l'équation de la surface : à cet effet, nous écrirons

$$hy - mxz = h(y - mx) + mx(h - z)$$

et $mhx - yz = h(mx - y) + y(h - z)$, et nous aurons pour équation nouvelle

$$m(h - z)[x(x - a) + y(y - b) + (h + z)(z - c)] + (y - mx)[h(x - a) - mh(y - b)] = 0.$$

Posons alors $y - mx = \lambda(h - z)$ ; $h - z$ se mettra en facteur et il restera la sphère

$$m[x(x - a) + y(y - b) + (h + z)(z - c)] + \lambda h[x - a - m(y - b)] = 0 ;$$

ce résultat nous montre bien que le plan conduit par la droite D coupe la surface d'abord suivant cette droite, puis suivant un cercle dont les deux équations sont données par la réunion de celles du plan et de la sphère.

3° Pour avoir le lieu des axes de ces cercles, nous abaisserons du centre de la sphère une perpendiculaire sur le plan et nous éliminerons $\lambda$ entre les deux équations de la droite ainsi obtenues ; ces équations sont

$$\frac{m(2x - a) + \lambda h}{-m} = \frac{m(2y - b) - \lambda hm}{1} = \frac{m(2z + h - c)}{\lambda}.$$

Il suffit alors d'égaler les deux premiers rapports pour avoir une valeur de $\lambda$,

$$\lambda = \frac{m^2(2y - b) + m(2x - a)}{h(m^2 - 1)}.$$

Si l'on multiplie ensuite les deux termes du premier rapport par $m$ et qu'on l'ajoute terme à terme au second, on obtient un rapport indépendant de $\lambda$ et qu'il suffit d'égaler au dernier pour avoir une nouvelle valeur de $\lambda$,

$$\lambda = \frac{(1 - m^2)(2z + h - c)}{m(2x - a) + 2y - b}.$$

Ces deux valeurs de $\lambda$ égalées entre elles fournissent l'équation de la surface :

$$(2) \qquad m[m(2y - b) + 2x - a][m(2x - a) + 2y - b] + h(1 - m^2)^2(2z + h - c) = 0.$$

C'est l'équation d'un paraboloïde hyperbolique dont les deux plans directeurs principaux sont

$$m(2y - b) + 2x - a = 0 \qquad \text{et} \qquad m(2x - a) + 2y - b = 0$$

et dont le plan tangent au sommet est

$$2z + h - c = 0.$$

J. HAAG et G. DULIMBERT.

*Bonnes solutions* : MM. M. Rebeix, élève de l'Ecole normale supérieure ; Sainte Lague, élève au Lycée de Bordeaux.

**Solution géométrique.** — Joignons le point A à un point M quelconque de D, et élevons en M un plan perpendiculaire à AM qui rencontre D′ en M′, la droite MM′ est une droite Δ qui donne comme point du lieu le point M ; nous trouvons ainsi, une fois et une seule, chaque point de D ; donc la droite D fait partie du lieu et est une ligne simple de la surface. Cela posé, menons un plan quelconque par la droite D et soit B son point de rencontre avec D′ ; toutes les droites du plan qui passent en B sont des droites Δ et le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées sur ces droites du point A est sur la sphère de diamètre AB ; c'est donc le cercle d'intersection de cette sphère avec le plan. Par conséquent tout plan mené par la droite D coupe la surface suivant la droite D et un cercle, c'est-à-dire suivant une ligne du troisième ordre ; cette surface est une surface cubique. Nous montrerions de la même façon que tout plan passant par D′ coupe la surface aussi suivant un cercle et la droite D′.

On peut voir autrement d'une façon aisée que la surface est du troisième ordre : il suffit de remarquer d'abord que le point A est un point simple du lieu, ce qui est évident puisque par ce point on peut mener une droite et une seule qui s'appuie sur D et D′ ; puis, de chercher combien il y a d'autres points du lieu situés sur une droite quelconque qui passe en A. Soit $D_1$ une telle droite ; si l'on fait glisser sur $D_1$, D et D′ une droite Δ, elle engendre un hyperboloïde et il y a deux points de $D_1$ en lesquels elle est perpendiculaire à cette droite, ce sont les deux points de rencontre de $D_1$ avec la sphère de Monge ; donc il y a en tout trois points du lieu sur une droite quelconque passant en A ; par conséquent la surface est du troisième ordre.

Quand le plan que nous avons mené par la droite D tourne autour de cette droite, ses directions isotropes engendrent le cône isotrope ; donc la surface cubique admet pour points à l'infini les points du cercle imaginaire de l'infini, et par suite, en plus, ceux d'une droite ; cette droite est évidemment la droite à l'infini d'un plan mené parallèlement à D et à D′, d'abord parce qu'elle contient les deux points à l'infini de D et de D′, puis, parce que c'est une droite Δ de direction indéterminée dans ce plan. D'autre part, on sait que par une droite d'une surface cubique on peut mener cinq plans qui la coupent suivant deux droites ; il y a donc cinq plans parallèles à D et à D′ qui coupent chacun la surface cubique suivant deux droites à distance finie, en tout dix droites qui ne sont pas des droites isotropes et qui sont sur la surface cubique ; parmi ces cinq plans se trouvent les plans $z = h$ et $z = -h$ qui fournissent les quatre droites que nous avons remarquées. Chacune de ces dix droites fournit une série de sections circulaires de la surface.

Nous avons montré antérieurement comment est placé le cercle situé dans un plan passant par la droite D. Nous aurons son axe en abaissant du milieu de AB une perpendiculaire sur le plan envisagé ; or le milieu de AB décrit une droite homothétique de D′ par rapport à A et dans le rapport $\frac{1}{2}$ ; c'est une parallèle à D′, $D'_1$ ; par conséquent l'axe du cercle s'appuie constamment sur la droite fixe $D'_1$ et reste parallèle à un plan fixe, un plan perpendiculaire à la droite D ; il s'appuie donc en outre sur une droite à l'infini, la droite située dans le plan perpendiculaire à la droite D. D'autre part, le faisceau des plans qui tournent autour de la droite D est homographique à la série B, et le point B′, milieu de AB, décrit une série homographique à la série B ; en outre, la perpendiculaire abaissée de B′ sur le plan mobile trace sur la droite à l'infini du plan perpendiculaire à D une série homographique à ce faisceau de plans ; donc l'axe du cercle trace sur deux droites fixes deux divisions homographiques, par suite, il engendre une quadrique qui, dans le cas actuel, est nécessairement un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est perpendiculaire à la droite D. L'autre plan directeur contient la droite à l'infini du système formé par les axes des cercles ; c'est donc le plan mené par le point A parallèlement à D′ et perpendiculaire en outre au plan défini par les directions de D et de D′.

Parmi les droites situées sur la surface nous avons vu que les deux droites D et D′ sont évidentes ; il y en a deux autres qui sont évidentes aussi ; ce sont celles qu'on obtient en considérant les droites Δ qui passent aux points à l'infini sur D et D′. Si on considère en effet les droites qui passent au point à l'infini sur D′, elles forment un faisceau parallèle qui s'appuie sur D et le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point A sur ces droites est une droite perpendiculaire à D′ située dans le plan mené par D parallèlement à D′.

J. HAAG, lycée de Nancy, et SAINTE-LAGÜE, lycée de Bordeaux.

Bonne solution : M. Rebeix.

---

**1108.** — *Par un point* M *pris sur une génératrice* G *d'un hyperboloïde à une nappe on mène la perpendiculaire* M*m sur le plan de l'ellipse de gorge, et l'on fait tourner le point m, pied de cette perpendiculaire, de* 90° *de* O*x vers* O*y autour du point* O *pour l'amener en m′ ; enfin, par le point m′ ainsi obtenu on mène la parallèle* $G_1$, *à la normale en* M *à l'hyperboloïde.*

1° *Prouver que lorsque le point* M *décrit la génératrice* G, *la droite* $G_1$ *se meut dans un plan* P, *et trouver l'enveloppe de ce plan* P *quand* G *se déplace sur l'hyperboloïde ;*

2° *Prouver que la droite* $G_1$ *enveloppe une parabole* ($\pi$) *dans le plan* P, *et trouver le lieu de cette parabole quand* G *se déplace sur l'hyperboloïde ;*

3° *Montrer que* $G_1$ *reste tangente à l'enveloppe du plan* P *et au lieu de la parabole* ($\pi$), *et trouver le lieu du milieu des points de contact qui correspondent à une même position de* $G_1$.

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ l'équation de l'hyperboloïde rapporté à ses axes ; les équations d'une génératrice sont

$$(G) \qquad \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi \\ \frac{y}{b} &= -\frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi \end{aligned}$$

et un point M de cette génératrice a pour coordonnées

$$x = a(\lambda\sin\varphi + \cos\varphi), \qquad y = b(-\lambda\cos\varphi + \sin\varphi), \qquad z = c\lambda.$$

La projection $m$ de ce point sur le plan de l'ellipse de gorge a pour coordonnées

$$x = a(\lambda\sin\varphi + \cos\varphi), \qquad y = b(-\lambda\cos\varphi + \sin\varphi), \qquad z = 0\,;$$

par suite les coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ du point $m'$ sont

$$x' = -y = b(\lambda\cos\varphi - \sin\varphi), \qquad y' = x = a(\lambda\sin\varphi + \cos\varphi), \qquad z' = 0,$$

et enfin la droite $G_1$ a pour équations

$$\frac{x - b(\lambda\cos\varphi - \sin\varphi)}{\dfrac{\lambda\sin\varphi + \cos\varphi}{a}} = \frac{y - a(\lambda\sin\varphi + \cos\varphi)}{\dfrac{-\lambda\cos\varphi + \sin\varphi}{b}} = \frac{z}{-\dfrac{\lambda}{c}}.$$

**1.** Multiplions les deux termes de chacun de ces rapports respectivement par $a\sin\varphi$, $-b\cos\varphi$, $c$ et ajoutons terme à terme. Nous obtenons un nouveau rapport égal aux trois premiers et dont le dénominateur est nul. Par suite le numérateur est également nul, ce qui nous donne

$$(P) \qquad ax\sin\varphi - by\cos\varphi + cz + ab = 0\,;$$

cette équation est indépendante de $\lambda$, elle représente un plan P qui contient toujours la droite $G_1$ quand le point M décrit la droite G.

On voit aisément que le plan P est perpendiculaire à la droite G et que sa trace sur le plan des $xy$ est la droite obtenue en faisant tourner de 90° de $Ox$ vers $Oy$ la projection de la droite G sur le plan de l'ellipse de gorge.

L'enveloppe du plan P a pour équation

$$a^2x^2 + b^2y^2 - (cz + ab)^2 = 0\,;$$

elle représente un cône parallèle au cône supplémentaire du cône asymptote de l'hyperboloïde et ayant pour sommet le point de l'axe des $z$ qui a pour cote $-\frac{ab}{c}$.

**2.** La droite $G_1$ peut être définie par les deux équations

$$\frac{x - b(\lambda\cos\varphi - \sin\varphi)}{\dfrac{\lambda\sin\varphi + \cos\varphi}{a}} = \frac{y - a(\lambda\sin\varphi + \cos\varphi)}{\dfrac{-\lambda\cos\varphi + \sin\varphi}{b}},$$

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi + cz + ab = 0.$$

On reconnaît aisément que ce système est équivalent au suivant

$$(P) \qquad ax\sin\varphi - by\cos\varphi + cz + ab = 0,$$

$$(Q) \qquad ab\lambda^2 - \lambda(ax\cos\varphi + by\sin\varphi) - cz = 0.$$

Or quand $\lambda$ varie, le plan Q enveloppe le cylindre parabolique

$$(C) \qquad (ax\cos\varphi + by\sin\varphi)^2 + 4abcz = 0,$$

par suite la droite $G_1$ enveloppe la parabole $\pi$, intersection de ce cylindre et du plan P. Cette parabole est tangente au plan des $xy$ et le diamètre qui passe par le point de contact est la droite intersection du plan P et du plan $ax\cos\varphi + by\sin\varphi = 0$, c'est-à-dire la génératrice de contact du plan P et de son enveloppe.

Pour avoir le lieu de la parabole $\pi$ quand $\varphi$ varie, nous éliminerons $\varphi$ entre les équations du plan P et du cylindre C. Ces équations peuvent s'écrire

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi = -(cz + ab),$$
$$(ax\cos\varphi + by\sin\varphi)^2 = -4abcz;$$

élevons la première au carré, puis ajoutons membre à membre, nous obtenons

$$(C') \qquad a^2x^2 + b^2y^2 = (cz - ab)^2,$$

c'est l'équation d'un cône parallèle au cône C et passant par le point de l'axe des $z$ qui a pour cote $\frac{ab}{c}$. Les deux cônes C et C' sont symétriques par rapport au plan des $xy$.

**3.** La droite $G_1$ étant située dans le plan P est tangente au cône C, enveloppe de P en un point $\alpha$ situé sur la génératrice de contact. La droite $G_1$ est tangente à la parabole $\pi$ en un point $\beta$; elle est par suite tangente au cône C', lieu de cette parabole. Le milieu du segment $\alpha\beta$ est le milieu du segment déterminé sur une tangente à une parabole par le point de contact et le point de rencontre avec un diamètre fixe. Le lieu de ce point est visiblement la tangente à l'extrémité du diamètre fixe, c'est-à-dire, ici la trace du plan P sur le plan des $xy$.

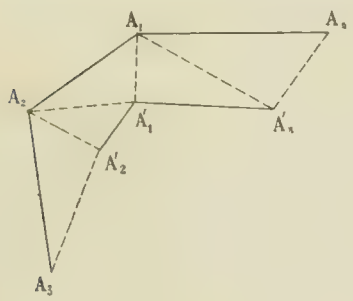
P. MONFRAIX, lycée de Toulouse.

Bonnes solutions par MM. J. Haag, lycée de Nancy, et M. Rebeix, à Montbrison.

---

**1109.** — *Sur les côtés d'un polygone plan et fermé* P, *on construit dans un même sens de rotation des triangles semblables entre eux ; leurs sommets forment un autre polygone* P' *qui a même centre de gravité que le premier.*

Rapportons la figure à deux axes rectangulaires situés dans le plan des deux polygones P et P', et désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_n$, les sommets du premier polygone, par $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ les sommets du second. Désignons aussi d'une manière générale par $x_k$, $y_k$ les coordonnées du point $A_k$, par $x'_k$, $y'_k$ les coordonnées du point $A'_k$, par $\rho_k$ la longueur $A_kA_{k+1}$, par $\theta_k$ l'angle que ce segment fait avec $Ox$. Si nous supposons que le point $A'_k$ soit le sommet du triangle construit sur $A_kA_{k+1}$, l'angle que fait $A_kA'_k$ avec $A_kA_{k+1}$ est constant et le rapport $\frac{A_kA'_k}{A_kA_{k+1}}$ est constant aussi; appelons $\alpha$ ce rapport et $\varphi$ l'angle de $A_kA'_k$ avec $A_kA_{k+1}$.




Nous aurons alors

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k\cos\theta_k,$$
$$y_{k+1} = y_k + \rho_k\sin\theta_k,$$

et, par suite,

$$u_{k+1} = u_k + \rho_k e^{i\theta_k},$$
$$v_{k+1} = v_k + \rho_k e^{-i\theta_k},$$

en posant d'une manière générale

$$u = x + iy, \qquad v = x - iy.$$

Nous aurons de même

$$x'_k = x_k + \alpha\rho_k \cos(\theta_k + \varphi),$$
$$y'_k = y_k + \alpha\rho_k \sin(\theta_k + \varphi),$$

puis

$$u'_k = u_k + \alpha\rho_k e^{i(\theta_k+\varphi)},$$
$$v'_k = v_k + \alpha\rho_k e^{-i(\theta_k+\varphi)}.$$

Si donc nous désignons par $\lambda$ le nombre fixe $\alpha e^{i\varphi}$, nous aurons de suite

$$u'_k = u_k + \lambda\rho_k e^{i\theta_k};$$

c'est-à-dire

$$u'_k = u_k + \lambda(u_{k+1} - u_k);$$

par conséquent

$$\Sigma u'_k = \Sigma u_k + \lambda\Sigma(u_{k+1} - u_k).$$

Or, il est facile de voir que $\Sigma(u_{k+1} - u_k)$ est identiquement nul ; par suite $\Sigma u'_k = \Sigma u_k$, et, en égalant les parties réelles et les parties imaginaires, nous obtenons

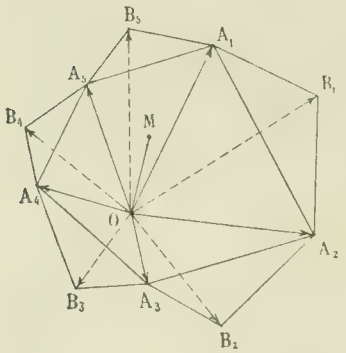
$$\Sigma x'_k = \Sigma x, \qquad \Sigma y'_k = \Sigma y.$$

ce qui démontre le théorème annoncé.

L. BICKART.

Bonne solution : M. J. Franceschini, lycée de Marseille.

**Autre solution.** — On sait qu'on peut obtenir le centre des moyennes distances de $n$ points situés dans un plan de la façon suivante :




Par un point O de l'espace on mène des vecteurs $OA_1$, $OA_2$, ... aboutissant aux $n$ points donnés ; on compose ces vecteurs : le centre des moyennes distances est le point où la résultante perce le plan.

Soient donc $A_1$, $A_2$, .., les sommets du premier polygone ; $B_1$, $B_2$, ..., les sommets du second polygone déduit du premier comme il a été dit. Menons les vecteurs $OA_1$, $OA_2$, ..., $OB_1$, $OB_2$, ..., composons les vecteurs OA, et soit M le point où leur résultante perce le plan du polygone.

Composons les vecteurs OB et, pour cela, regardons chaque vecteur OB comme la résultante de deux vecteurs OA et AB. Pour avoir la résultante des vecteurs OB, nous formerons la résultante des vecteurs OA (qui passe par M), la résultante des vecteurs AB et nous prendrons la résultante de ces deux vecteurs. Or la résultante des vecteurs AB est nulle, car les vecteurs AB sont équipollents aux côtés d'un polygone fermé, semblable au polygone $A_1A_2 \ldots A_n$.

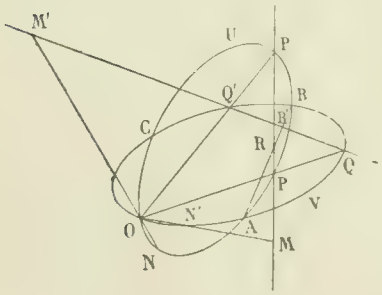
Donc, la résultante des deux systèmes OA et OB est la même, ce qui démontre le théorème.

Gilbert HÉLITAS.

Solution analogue : M. M. Laurence.

---

**1112.** — *On considère deux coniques fixes* U *et* V *et leurs quatre points de rencontre* O, A, B, C.




*Par le point* O, *on mène deux sécantes qui rencontrent la conique* U *en* P *et* P', *la conique* V *en* Q *et* Q' ; *les droites* PP' *et* QQ' *rencontrent la sécante commune* AB *en* R *et* R', *puis on considère sur ces droites les points correspondants* M *et* M' *tels que*

$$(MPP'R) = (M'QQ'R').$$

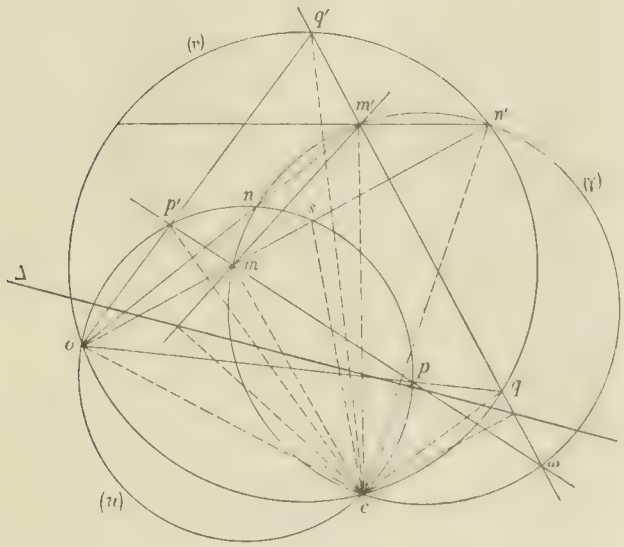
*Cela fait, on mène* OM, *qui rencontre la conique* V *en* N', OM', *qui rencontre la conique* U *en* N, *et on demande, lorsque* M *varie :*

1° *De trouver l'enveloppe de la droite* MM' ;

2° *De montrer que les droites* MN *et* M'N' *passent chacune par un point fixe ;*

3° *De prouver que les six points* A, B, M, M', N *et* N' *sont sur une même conique* C;
4° *Et enfin de trouver le lieu du pôle de la droite* AB *par rapport à cette conique* C.

Faisons une transformation homographique de la figure donnée, de manière que les points A et B deviennent les points cycliques de la nouvelle figure. Les coniques (U) et (V) se transforment en des cercles $(u)$ et $(v)$ qui ont deux points communs $(o)$ et $(c)$ transformés des points O et C.




Nous désignerons de même par de petites lettres $p$, $q$, ... les points transformés des points P, Q, ...

Les points R et R' étant sur la droite AB, leurs homologues sont à l'infini et la relation donnée

$$(\mathrm{MPP'R}) = (\mathrm{M'QQ'R'})$$

devient

$$\frac{mp}{mp'} = \frac{m'q}{m'q'}.$$

**1.** On s'assure aisément que les angles $oqc$ et $oq'c$ d'une part, $opc$ et $op'c$ d'autre part, sont égaux; par suite les triangles $cpq$ et $cp'q'$ sont semblables. On en déduit $\frac{cp}{cq} = \frac{cp'}{cq'}$, $\widehat{pcq} = \widehat{p'cq'}$. Il en résulte alors que les triangles $cpp'$ et $cqq'$ sont aussi semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Or, $m$ et $m'$ divisent les côtés $pp'$ et $qq$ de ces triangles dans le même rapport; donc $cm$ et $cm'$ sont des lignes homologues et l'on a

$$\frac{cm}{cm'} = \frac{cp}{cq} \qquad \text{et} \qquad \widehat{p'cm} = \widehat{q'cm'}.$$

Par suite

$$\widehat{mcm'} = \widehat{q'cm} + \widehat{q'cm'} = \widehat{q'cm} + \widehat{p'cm} = \widehat{p'cq'} = \widehat{pcq};$$

ce qui montre que le triangle $mcm'$ est semblable au triangle $pcq$.

D'autre part, soit $\omega$ le point de rencontre des droites $pp'$ et $qq'$; nous avons

$$\widehat{p\omega q} = \widehat{q'qo} - \widehat{p'po} = \widehat{q'co} - \widehat{p'co} = \widehat{p'cq'} = \widehat{pcq} = \widehat{mcm'}.$$

Donc les quatre points $c$, $\omega$, $m$, $m'$ sont sur un cercle. Soit $\Delta$ la droite qui passe par les projections du point $c$ sur les côtés du triangle $m\omega m'$; on voit que $mm'$ est tangente à la parabole qui a pour foyer le point $c$ et pour tangente au sommet la droite $\Delta$. Cette courbe est tangente aux droites $pp'$, $qq'$, $pq$ et $p'q'$. En revenant à la figure primitive, on voit que la droite MM' enveloppe une conique tangente aux côtés du triangle ABC et aux côtés du quadrilatère PQQ'P'.

**2** et **3.** Désignons par $s$ le point de rencontre de $om$ avec le cercle $(u)$. Le triangle $csn'$ est semblable aux triangles $cpq$ et $cp'q'$. Donc $\widehat{sn'c} = \widehat{pqc} = \widehat{mm'c}$, et les points $m, m', c, n'$ sont sur un même cercle $(\gamma)$; ce cercle contient $n$ pour une raison analogue, et il contient aussi $\omega$, puisque ce point est sur le cercle circonscrit au triangle $cmm'$.

De plus, on a $\widehat{m'n'c} = \widehat{m'\omega c} = \widehat{opc} =$ constante; ce qui montre que la droite $m'n'$ passe par un point fixe situé sur le cercle $(v)$.

On conclut de là que les six points A, B, C, M, N, M′ N′ et le point Ω, intersection de PP′ et de QQ′, sont sur une même conique (Γ) et que la droite M′N′ passe par un point fixe situé sur la conique (V).

4. Le pôle de AB par rapport à la conique (Γ) se transforme en le centre du cercle (γ). Or ce cercle passe par les points fixes $c$ et $\omega$; donc le lieu de son centre est la perpendiculaire menée au milieu de $c\omega$. Par suite, le lieu demandé est une droite qu'on construirait aisément.

M. REBEIX, à Montbrison.

---

**1124.** — *Si par un point* M *variable sur la normale à une ellipse en un point* P, *on mène à cette ellipse les trois autres normales, le centre de gravité* G *des pieds de ces trois normales décrit le diamètre symétrique de celui qui aboutit en* P *par rapport aux axes. Quand le point* G *est au centre, le point* M *se trouve au milieu du segment de la normale* PM *compris entre les axes.*

Rapportons l'ellipse à ses axes, représentons son équation par la forme habituelle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et désignons par $x_0$, $y_0$ les coordonnées du point P.

L'équation de la normale en ce point est

$$\frac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}};$$

si donc nous désignons par $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point variable M, nous aurons

$$\frac{\alpha - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{\beta - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \lambda;$$

d'où
$$\alpha = x_0 \frac{a^2 + \lambda}{a^2}, \qquad \beta = y_0 \frac{b^2 + \lambda}{b^2}.$$

Cela posé, l'hyperbole d'Apollonius du point M a pour équation

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

et elle rencontre l'ellipse en quatre points dont les ordonnées sont racines de l'équation

$$y^2(c^2y + b^2\beta)^2 + a^2b^2\alpha^2y^2 - b^2(c^2y + b^2\beta)^2 = 0;$$

la somme des racines de cette équation est $-\frac{2b^2\beta}{c^2}$, et si on désigne par Y l'ordonnée du centre de gravité du triangle formé par les pieds des trois autres normales, si on se rappelle que $y_0$ est l'ordonnée du pied de la normale fixe que décrit le point M, on a de suite

$$y_0 + 3Y = -\frac{2b^2\beta}{c^2},$$

ou
$$3Y = -y_0 - 2y_0 \frac{(b^2 + \lambda)}{c^2},$$

finalement
$$3Y = -\frac{a^2 + b^2 + 2\lambda}{c^2} y_0.$$

On trouverait de même

$$3X = +\frac{a^2 + b^2 + 2\lambda}{c^2} x_0.$$

Ces deux équations donnent $\frac{Y}{X} = -\frac{y_0}{x_0}$, ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

Lorsque le centre de gravité G est au centre de l'ellipse, on a $\lambda = -\frac{a^2 + b^2}{2}$ et $\alpha$, $\beta$ prennent

les valeurs $\alpha = \frac{c^2 x_0}{2a^2}$, $\beta = -\frac{c^2 y_0}{2b^2}$ : ce sont, comme il est facile de s'en assurer, les coordonnées du milieu du segment intercepté sur la normale fixe par les axes.

J. HAAG.

Bonnes solutions : MM. E.-N. Barisien ; T. Lemoyne, à Troyes ; J. Franceschini, élève au lycée de Marseille ; M. Laurence, lycée de Bordeaux ; R. Bouvaist ; J. Marchal.

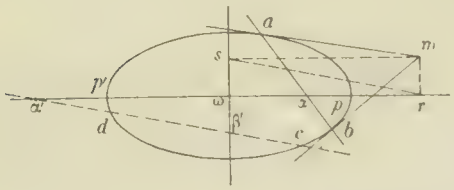
M. Barisien indique en outre que les côtés du triangle formé par les pieds des trois normales variables enveloppent une parabole tangente aux axes ; cette propriété est connue. M. Lemoyne indique que le lieu du point de concours des hauteurs est un autre diamètre et que le lieu du centre du cercle circonscrit est une droite ; ceci se trouve établi dans la solution géométrique que nous publions ensuite.

**Solution géométrique.** — Nous allons étudier quelques propriétés du triangle formé par les pieds des normales menées du point M à l'ellipse, autres que la normale MP.

Les côtés de ce triangle enveloppent une parabole tangente aux axes.

Voici de cette propriété une élégante démonstration donnée par M. Duporcq.

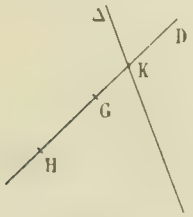
Etant donnée une corde $ab$ d'une conique C, proposons-nous de déterminer la corde $cd$, telle que les normales en $a,b,c,d$ concourent en un même point. Considérons l'involution déterminée sur l'axe $p\omega p'$ par les coniques circonscrites au quadrilatère $abcd$. Les sommets $p$ et $p'$, les points $\alpha$ et $\alpha'$ en sont des points conjugués, enfin l'hyperbole d'Apollonius circonscrite au quadrilatère $abcd$ passe par $\omega$ et le point à l'infini sur l'axe ; $\omega$ est donc le point central de l'involution.




Dès lors, on a $\omega\alpha.\omega\alpha' = \omega p.\omega p'$. Soit $r$ la projection sur $pp'$ du pôle $m$ de $ab$, on a aussi $\omega\alpha.\omega r = \overline{\omega p}^2$, d'où $\omega\alpha' = -\omega r$, de même $\omega\beta' = -\omega s$ ;

$cd$ est symétrique par rapport à $\omega$ de $rs$ qui joint les projections de $m$, pôle de $ab$, sur les axes.

Quand $m$ décrit une droite, ses projections $r$ et $s$ forment deux divisions semblables, la droite de l'infini est une des positions de $rs$, dont l'enveloppe est par suite une parabole touchant les axes aux points où ils coupent la droite décrite par $m$. Si celle-ci est normale en $a$, les points $c$ et $d$ seront les pieds de deux normales menées d'un point de la normale en $a$ et la droite $cd$ enveloppe une parabole symétrique de la précédente par rapport au point $\omega$.

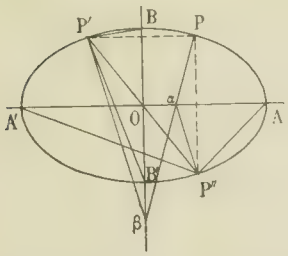



D'où il résulte que :

1° L'orthocentre du triangle considéré décrit une droite, directrice de la parabole enveloppe des côtés (Théorème de Steiner) ;

2° Le centre du cercle circonscrit décrit une droite. Ce cercle passe en effet par deux points fixes, le foyer de la parabole et le symétrique de P par rapport au centre de l'ellipse (Théorème de Joachimstal) ;

3° Le lieu du centre de gravité du triangle est aussi une droite.




Soient en effet D le lieu de l'orthocentre, Δ le lieu du centre du cercle circonscrit et K le point d'intersection des deux droites. Cherchons combien il y a de points du lieu sur D par exemple ; soient G un point du lieu, H l'orthocentre correspondant ; dans tout triangle le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit sont en ligne droite, le centre du cercle circonscrit correspondant à H et G sera par suite K. Il en résulte que pour que G soit sur D, il faut que le centre du cercle circonscrit soit en K, ce qui n'a lieu qu'une fois ; il n'y a qu'un seul point G sur D, le lieu de G est une droite.

Déterminons la position de cette droite. Quand M vient en $\alpha$ sur l'axe AA', le triangle correspondant est P''AA', dont le centre de gravité est sur le diamètre P'P'', symétrique de celui qui passe en P. De même quand M vient en $\beta$ sur BB', le triangle correspondant est BP'B', dont le centre de gravité est encore sur P'P''.

La droite P'P'' est par suite le lieu cherché.

Robert BOUVAIST.

**1125.** — *Deux des cordes joignant les pieds des quatre normales menées d'un point* M *à une ellipse ne peuvent être parallèles entre elles qu'autant qu'elles le sont à une des directions des côtés du losange formé par les sommets. Le point* P *est alors sur le diamètre perpendiculaire à la seconde direction des côtés de ce losange.*

Représentons par

$$f = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

l'ellipse et soient $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du point M. L'hyperbole d'Apollonius relative à ce point a pour équation

$$\varphi = c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

La condition demandée sera réalisée s'il existe un système de droites parallèles ayant pour équation

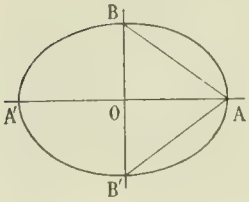
$$f + 2\lambda\varphi = 0.$$

Or les termes du second degré de cette équation sont

$$b^2x^2 + 2\lambda c^2xy + a^2y^2.$$

Une première condition est qu'ils forment un carré parfait, condition qui s'écrit

$$a^2b^2 - \lambda^2c^4 = 0,$$




et qui se décompose en

$$\lambda = \frac{ab}{c^2}, \qquad \lambda = -\frac{ab}{c^2}.$$

Si nous supposons $\lambda = \frac{ab}{c^2}$, le coefficient angulaire des parallèles, égal à $-\frac{\lambda c^2}{a}$, est ici $-\frac{b}{a}$; c'est celui du côté AB du losange des sommets.

En outre, $f + 2\lambda\varphi = 0$ doit être un système de droites, ce qui nous donne la condition

$$\begin{vmatrix} b^2 & \lambda c^2 & \lambda b^2\beta \\ \lambda c^2 & a^2 & -\lambda a^2\alpha \\ \lambda b^2\beta & -\lambda a^2\alpha & -a^2b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçant $\lambda$ par sa valeur et simplifiant, cette condition devient

$$(a\alpha + b\beta)^2 = 0,$$

ou

$$a\alpha + b\beta = 0,$$

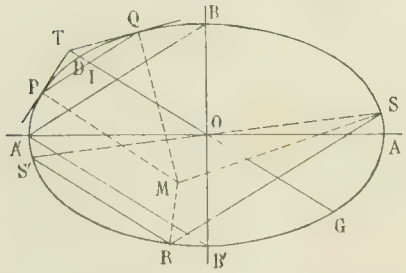
ce qui montre que le point M doit se trouver sur la perpendiculaire abaissée de O sur AB'.

Si nous avions supposé $\lambda = -\frac{ab}{c^2}$, nous aurions trouvé AB' pour direction des cordes parallèles et M se serait trouvé sur la perpendiculaire abaissée de O sur AB.

P. TRIBIER.

Bonne solution par M. J. Marchal.

**Solution géométrique.** — Soient P, Q, R, S les pieds des normales issues du point M. Nous supposons PQ et RS parallèles.




Prenons le symétrique S' de S par rapport à O. D'après le théorème de Joachimstal, P, Q, R, S' sont sur un cercle; PQ et RS' sont donc également inclinées sur les axes. Il en est de même de RS et RS'; or ces deux directions sont conjuguées. Elles sont donc parallèles aux côtés du losange des sommets; PQ est parallèle, par exemple, au côté A'B.

Appelons T le pôle de PQ. Le quadrilatère MPTQ est inscrit dans le cercle de diamètre MT. Les cordes DG, PQ sont également inclinées sur les axes de l'ellipse; le quadrilatère DQGP est donc inscriptible et l'on a

$$\overline{IP}^2 = IG.ID = (OD + OI)(OD - OI) = \overline{OD}^2 - \overline{OI}^2;$$

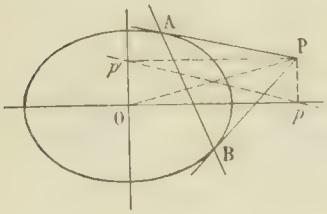
or $$OI.IT = OI.OT - \overline{OI}^2,$$
et T, D, I, G étant une division harmonique, $OI.OT = \overline{OD}^2$; donc
$$OI.IT = \overline{OD}^2 - \overline{OI}^2,$$
et, par suite, $$OI.IT = \overline{IP}^2.$$

Le quadrilatère OPTQ est inscriptible et le point O est sur le cercle MPTQ; l'angle TOM est droit. Or la direction de OT, conjuguée de PQ, est celle de AB. Le point M est donc sur la perpendiculaire abaissée de O sur la seconde direction des côtés du losange des sommets.

P. TRIBIER.

Autre solution : M. J. Haag.

**Autre solution géométrique.** — Dans la solution géométrique de la question 1124, nous avons vu que la seconde corde commune à une hyperbole d'Apollonius passant par A et B et à l'ellipse est parallèle à la droite $pp'$. Si AB et $pp'$ sont parallèles, elles auront pour diamètre conjugué commun OP, mais $pp'$ et OP sont également inclinées sur les axes; si ce sont deux directions conjuguées, elles sont parallèles aux diamètres conjugués égaux de l'ellipse.




Cherchons le lieu des points de concours des normales à l'ellipse aux extrémités d'une corde parallèle à une direction donnée. Sur un des axes de l'ellipse il y a deux points du lieu, le lieu est une conique ayant pour direction asymptotique la perpendiculaire à la direction conjuguée de la direction donnée et coupant l'ellipse aux deux points de contact des tangentes parallèles à la direction donnée et aux points d'intersection de l'ellipse avec les normales parallèles à la direction donnée, autres que les points d'incidence; cette conique est concentrique à l'ellipse donnée.

Lorsque la direction devient celle d'un des diamètres conjugués égaux, les points sur les axes viennent se confondre au centre et la conique se décompose en deux droites dont l'une est la perpendiculaire à la direction conjuguée de la direction donnée menée par le centre et l'autre le diamètre conjugué de cette direction. Le véritable lieu est d'ailleurs la première de ces droites.

Robert BOUVAIST.

## PHYSIQUE

**802.** — *Etant donné un corps lancé verticalement de bas en haut, dans quel sens la résistance de l'air modifie-t-elle :*

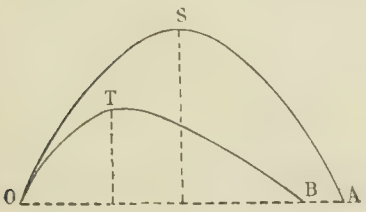
1° *la hauteur de l'ascension ;*

2° *la durée de l'ascension ;*

3° *la durée de la chute ;*

4° *la forme de la courbe que le projectile tracerait sur le cylindre d'une machine de Morin?*

*Cette courbe représenterait-elle toujours, comme dans le cas où la résistance de l'air est négligeable, la trajectoire d'un projectile lancé obliquement ?*




1° Sans la résistance de l'air, la hauteur de l'ascension serait donnée par la formule $h = \frac{v_0^2}{2g}$; $g$ se trouvant accru à chaque instant de l'effet de la résistance de l'air, $h$ sera moindre.

2° Sans la résistance de l'air, la durée de l'ascension serait donnée par la formule $t = \frac{v_0}{g}$ : pour la même raison que ci-dessus, $t$ sera diminué par la résistance de l'air.

3° Sans la résistance de l'air, la vitesse initiale du projectile serait liée à la hauteur de l'ascension par la formule $v_0 = \sqrt{2gh}$, et cette formule représenterait en même temps la vitesse du projectile au moment où il retombe. Or le projectile retombe, en réalité, de moins haut et avec une accélération moindre ; sa vitesse finale sera donc moindre que sa vitesse initiale. Ce qui est vrai pour le point de départ s'applique à un point quelconque de la trajectoire ; donc, partout, la vitesse est moindre au retour qu'à l'aller. Il en résulte évidemment que la durée de la chute est supérieure à celle de l'ascension. Mais on ne peut dire *a priori* si la durée de cette chute dans l'air est supérieure, égale ou inférieure à ce qu'elle serait dans le vide; en effet, la durée dans le vide est $t = \frac{v_0}{g}$; dans l'air, la vitesse finale et l'accélération sont toutes deux moindres, on ne peut rien dire de leur rapport.

4° La courbe tracée dans le vide serait la parabole OSA. Dans un milieu résistant, les remarques précédentes indiquent une forme dissymétrique telle que OTB. La résistance croissant avec la vitesse, il existe une vitesse limite pour laquelle le mouvement de la chute serait uniforme. La courbe OTB a donc une asymptote ou, tout au moins, une direction asymptotique inclinée.

Dans le cas d'un projectile lancé obliquement, la résistance de l'air altérerait non seulement la composante verticale du mouvement, comme dans le cas précédent, mais encore la composante horizontale. Pour avoir, sur le cylindre de la machine, une image de l'effet produit, il faudrait que la vitesse de ce cylindre allât en diminuant et tendant vers zéro.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1167.** — Un plan P coupant un ellipsoïde E, de centre O, suivant une conique C, on appelle Γ le cône de sommet O et de base C.

Trouver l'enveloppe du plan P lorsque le cône Γ conserve un volume constant V, et discuter la réalité des cônes correspondant aux diverses parties de cette enveloppe.

Déterminer le maximum du volume V et faire voir que les cônes Γ correspondants sont ceux qui sont capables des trièdres formés par les diamètres conjugués de l'ellipsoïde E. M. D'OCAGNE.

**1168.** — Soient $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ les centres des quatre cercles de Joachimstal relatifs aux normales menées d'un point P à une ellipse (E) ayant pour axes de symétrie $Ox$ et $Oy$.

1° Démontrer que, quelles que soient les grandeurs des axes de l'ellipse, ces centres sont situés sur une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes $Ox$ et $Oy$ et passant par le milieu I de OP.

2° Si $2a$ et $2b$ désignent les longueurs des axes de (E), les centres $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$ sont les points d'incidence des normales menées d'un point Q à une conique (C) ayant pour centre le point I, dont les axes sont parallèles à ceux de (E) et ont respectivement pour longueurs $\frac{c^2}{2a}$ et $\frac{c^2}{2b}$.

3° En déduire que trois des centres $C_i$ et le point symétrique du quatrième par rapport au point I sont sur un cercle. TH. SOULS.

# DEUXIÈME PARTIE

## ALGÈBRE

**1106.** — *Le premier membre d'une équation réciproque de forme normale peut toujours se mettre d'une infinité de façons sous la forme*

$$f(x) + x^n f\left(\frac{1}{x}\right).$$

*Dans le cas d'une équation du quatrième degré, déterminer $f(x)$ de façon que deux de ses racines aient pour produit 1 et les deux autres pour somme 1. Il y a deux façons d'arriver à ce résultat. Le montrer ; faire voir, en outre, que la résolution de l'équation proposée peut se déduire de là.*

Pour montrer clairement ce qui se passe quand on identifie le premier membre d'une équation réciproque de forme normale avec une somme de la forme $f(x) + x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$, où $f(x)$ désigne un polynome du même degré que l'équation réciproque, il suffit de traiter la question dans le cas du quatrième degré.

Désignons alors par

$$F(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A$$

le premier membre de l'équation réciproque et posons $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ; nous aurons

$$f(x) + x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = (a + e)x^4 + (b + d)x^3 + 2cx^2 + (b + d)x + a + e,$$

et, en identifiant avec $F(x)$,

$$a + e = A, \qquad b + d = B, \qquad 2c = C ;$$

cela nous fait trois équations à cinq inconnues et nous voyons que l'on peut prendre, par exemple, $e$ et $d$ arbitrairement.

Si nous voulons que le polynome $f(x)$ ait deux racines ayant pour produit l'unité et deux autres ayant pour somme l'unité, il se mettra sous la forme

$$a(x^2 - x + \lambda)(x^2 + \mu x + 1) ;$$

ce sera donc

$$ax^4 + a(\mu - 1)x^3 + a(\lambda + 1 - \mu)x^2 + a(\lambda\mu - 1)x + a\lambda,$$

et les équations d'identification nous donneront

$$a(1 + \lambda) = A,$$
$$a(\lambda\mu - \mu - 2) = B,$$
$$2a(\lambda + 1 - \mu) = C.$$

La première nous donne alors $\lambda + 1 = \frac{A}{a}$,

La dernière, $\mu = \frac{2A - C}{2a}$ ; après quoi la seconde devient

$$A \cdot \frac{2A - C}{2a} - 2a = B.$$

C'est une équation du second degré en $a$

$$4a^2 + 2Ba + AC - 2A^2 = 0,$$

qui donne deux valeurs pour $a$ ; par conséquent le problème admet deux solutions.

Mais cela était évident *a priori*, car le trinome $x^2 + \mu x + 1$, qui admet les deux racines du polynome $f(x)$ dont le produit est égal à 1, se met en facteur dans la somme $f(x) + x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)$ et il est identique à l'un ou à l'autre des deux trinomes de ce genre en lesquels se décompose le premier membre de l'équation réciproque.

La résolution de l'équation réciproque du quatrième degré est alors aisée : car, mise sous la forme $f(x) + x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, elle se décompose immédiatement en deux équations du second degré,

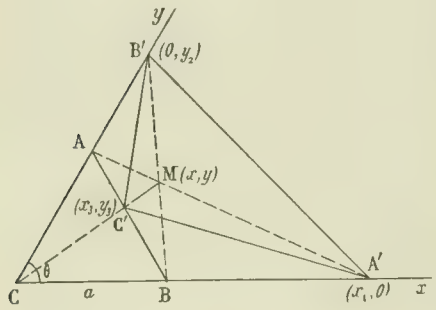
$$x^2 + \mu x + 1 = 0,$$
$$(\lambda + 1)x^2 - 2x + \lambda + 1 = 0.$$

Cette résolution exige aussi, comme la méthode ordinaire, la résolution de trois équations du second degré.

J. HAAG, lycée de Nancy.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1111.** — M *étant un point du cercle circonscrit à un triangle équilatéral* ABC, *on mène les droites* MA, MB, MC *qui rencontrent* BC, CA, AB *respectivement en* A′, B′, C′. *Montrer que lorsque* M *se déplace sur le cercle, l'aire du triangle* A′B′C′ *est constante et égale au double de l'aire du triangle* ABC.




Prenons pour axes les deux côtés CB, CA du triangle, et désignons par $a$ la longueur du côté, et par $x$, $y$ les coordonnées de M.

L'équation du côté AB est $x + y - a = 0$.

On trouve facilement

$$x_1 = -\frac{ax}{y-a}, \qquad y_2 = -\frac{ay}{x-a}, \qquad \frac{x_3}{x} = \frac{y_3}{y} = \frac{a}{x+y}.$$

Comme $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la surface du triangle A′B′C′ est

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Delta,$$

avec

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{-x}{y-a} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-y}{x-a} & 1 \\ \frac{x}{x+y} & \frac{y}{x+y} & 1 \end{vmatrix}.$$

Mais M étant sur le cercle circonscrit dont l'équation est $x^2 + y^2 + xy - a(x+y) = 0$, on a, en posant $y = tx$,

$$x = \frac{a(1+t)}{1+t+t^2}, \qquad y = \frac{at(1+t)}{1+t+t^2}.$$

Si nous portons ces valeurs dans le déterminant, nous trouvons

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+t & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1+t}{t} & 1 \\ \frac{1}{1+t} & \frac{t}{1+t} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+t & 0 & 1 \\ 0 & 1+t & t \\ 1 & t & 1+t \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{t(1+t)},$$

ou

$$\Delta = \frac{2t(1+t)}{t(1+t)} = 2.$$

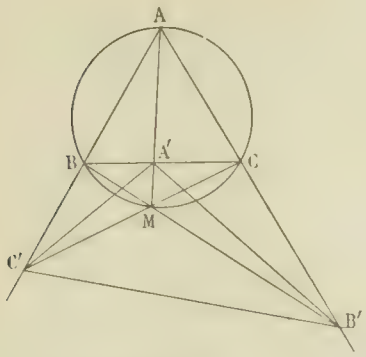
On a donc $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire deux fois l'aire de ABC.

VASNIER.

Bonnes solutions : MM. E.-N. Barisien; R. Bouvaist; L. Sade, lycée de Marseille; R. Manen, petit séminaire de Massals; J. Franceschini, lycée de Marseille ; Frizac, à Toulouse ; L. Odou.

**Solution géométrique.** — On a

$$\text{surf. } A'B'C' = \text{surf. } MA'B' + \text{surf. } MB'C' + \text{surf. } MC'A',$$
$$= (MA'.MB' + MB'.MC' + MC'.MB')\,\frac{\sin 120^\circ}{2}.$$




Or, les triangles MA'C, MCB' sont semblables, comme ayant leurs angles égaux chacun à chacun ; on en déduit que

$$MA'.MB' = \overline{MC}^2 ;$$

on trouverait de même

$$MB'.MC' = \overline{MA}^2,$$

$$MC'.MA' = \overline{MB}^2.$$

On a donc

$$\text{surf. } A'B'C' = \frac{\sqrt{3}}{4}(\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2) ;$$

mais en vertu d'une propriété connue du triangle équilatéral ABC, M étant un point du cercle circonscrit, on a

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 2\overline{AB}^2.$$

On en déduit que

$$\text{surf. } A'B'C' = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}^2,$$

ce qui établit le théorème.

P. TRIBIER.

Solutions analogues de MM. M. Rebeix, à Montbrison ; L. Odor.

---

**1114.** — *On considère deux axes rectangulaires et un cercle variable (C) tangent en O à l'axe des $x$, puis une parabole tangente aussi en O au même axe, passant par le point A (0, — $a$) et ayant pour direction diamétrale $x - y = 0$.*

*On demande le lieu des points de concours des tangentes communes à ces deux courbes quand le rayon du cercle varie.*

Première solution. — L'équation de la parabole donnée est

$$(x - y)^2 + ay = 0;$$

d'autre part, un cercle quelconque tangent à l'origine à l'axe des $x$ a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2\lambda y = 0.$$

Soient $x_0$, $y_0$ les coordonnées d'un point M du lieu. Nous allons écrire que les tangentes issues de ce point aux deux courbes sont les mêmes, et pour cela il suffira d'exprimer que ces tangentes ont les mêmes directions, c'est-à-dire que dans les équations des faisceaux de ces tangentes les coefficients de $x^2, xy, y^2$ sont proportionnels.

L'ensemble des tangentes menées du point M à la parabole a pour équation

$$[2x(x_0 - y_0) + y[-2(x_0 - y_0) + a] + ay_0]^2 - 4(x - y)^2 + ay_0(x_0 - y_0)^2 + ay_0] = 0,$$

et le faisceau des tangentes issues du même point au cercle est représenté par l'équation

$$[xx_0 + y(y_0 + \lambda) + \lambda y_0]^2 - (x^2 + y^2 + 2\lambda y)[x_0^2 + y_0^2 + 2\lambda y_0] = 0.$$

Ordonnons ces équations et n'écrivons que les termes du deuxième degré en $x$ et $y$, nous avons

$$-4ay_0x^2 + 4a(x_0 + y_0)xy + y^2(-4ax_0 + a^2) = 0$$

$$-y_0(y_0 + 2\lambda)x^2 + 2x_0(y_0 + \lambda)xy + (\lambda^2 - x_0^2)y^2 = 0$$

Ecrivons maintenant que ces équations ont leurs coefficients proportionnels, nous obtenons

$$\frac{y_0 + 2\lambda}{4a} = \frac{x_0(y_0 + \lambda)}{2a(x_0 + y_0)} = \frac{\lambda^2 - x_0^2}{-4ax_0 + a^2}.$$

En éliminant $\lambda$ entre ces deux équations nous aurons l'équation du lieu.

Multiplions les deux termes du premier rapport par $x_0$, ceux du deuxième par $-2$, et ajoutons ces rapports termes à termes, nous obtenons un nouveau rapport $\frac{x_0}{4a}$ qui est égal aux trois premiers.

En égalant le premier et le troisième rapport à $\frac{x_0}{4a}$, nous avons

$$2\lambda = y_0 - x_0, \qquad 4\lambda^2 = ax_0.$$

L'élimination de $\lambda$ est alors immédiate, elle nous donne après la suppression des indices

$$(x-y)^2 - ax = 0,$$

c'est l'équation du lieu.

Elle représente une parabole tangente à $Oy$ à l'origine, ayant pour direction asymptotique $x - y = 0$ et passant par le point $(a, 0)$; c'est la parabole symétrique de la parabole donnée par rapport à la bissectrice $x + y = 0$.

J. HAAG, lycée de Nancy.

Deuxième solution. — Un point M du lieu et l'origine des coordonnées constituent un couple d'ombilics associés pour la parabole et le cercle. On pourra donc combiner linéairement les équations tangentielles de ces deux courbes de manière à mettre $w$ en facteur, et en égalant à zéro le coefficient de $w$, on aura l'équation tangentielle du point M.

L'équation tangentielle du cercle s'obtient très facilement; il suffit d'écrire que la distance du centre $(0, -\lambda)$ à la droite $ux + vy + w = 0$ est égale au rayon, $|\lambda|$. Nous avons ainsi

$$\frac{(-\lambda v + w)^2}{u^2 + v^2} = \lambda^2$$

ou

$$(1) \qquad \lambda^2 u^2 + 2\lambda vw - w^2 = 0.$$

Ecrivons maintenant que la droite $ux + vy + w = 0$ est tangente à la parabole $(x-y)^2 + ay = 0$; formons pour cela l'ensemble des droites joignant l'origine aux points de rencontre de la droite et de la courbe, c'est

$$w(x-y)^2 - ay(ux + vy) = 0, \quad \text{ou} \quad wx^2 - xy(2w + au) + (w - av)y^2 = 0,$$

et exprimons que ces deux droites sont confondues, ce qui nous donne

$$(2w + au)^2 - 4w(w - av) = 0$$

ou

$$(2) \qquad au^2 + 4uw + 4vw = 0$$

Multiplions l'équation (1) par $-a$, l'équation (2) par $+\lambda^2$ et ajoutons-les membre à membre, nous avons

$$w[4\lambda^2 u + (4\lambda^2 - 2a\lambda)v + aw] = 0.$$

Nous voyons ainsi que l'équation du point M est

$$4\lambda^2 u + (4\lambda^2 - 2a\lambda)v + aw = 0;$$

par suite ce point a pour coordonnées

$$x = \frac{4\lambda^2}{a}, \qquad y = \frac{4\lambda^2 - 2a\lambda}{a},$$

et l'équation du lieu s'obtient en éliminant $\lambda$ entre ces deux équations. De la seconde on tire, après avoir remplacé $\frac{4\lambda^2}{a}$ par $x$, $2\lambda = x - y$, et par suite l'équation du lieu est $(x-y)^2 - ax = 0$.

Bonnes solutions par MM. E.-N. Barisien; M. Laurence, lycée de Bordeaux; L. Painvin, lycée de Nantes; G Sauvageon, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Étienne ; J. Marchal ; T. Lemoyne à Troyes.

---

**1115.** — *Lorsque deux paraboles* P *et* P′ *ayant même sommet se coupent orthogonalement en ce point :*

1° *Il existe une infinité de triangles* ABC *inscrits dans* P *et circonscrits à* P′ ;

2° *Les normales en* A, B, C *sont concourantes* ;

3° *Les hauteurs du triangle* ABC *enveloppent la développée d'une certaine parabole;*

4° *Si le paramètre de la parabole* P′ *varie, le sommet* O *restant fixe, le côté* BC *se déplace parallèlement à lui-même.*

**1.** Soient $y^2 - 2px = 0$ et $x^2 - 2p'y = 0$ les équations des deux paraboles P et P'; les coordonnées d'un point quelconque de la parabole P peuvent se mettre sous la forme $x = 2pt^2$, $y = 2pt$.

Soient alors $t_1, t_2, t_3$ les paramètres des points A, B, C; l'équation de AB est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2pt_1^2 & 2pt_1 & 1 \\ 2pt_2^2 & 2pt_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} x & y & 2p \\ t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, après suppression du facteur $t_1 - t_2$,

$$x - (t_1 + t_2)y + 2pt_1t_2 = 0.$$

En écrivant que cette droite est tangente à la parabole P', nous obtenons aisément la relation

$$4pt_1t_2(t_1 + t_2) + p' = 0;$$

en faisant de même pour AC et BC, nous avons deux relations analogues.

Posons alors

$$S_1 = t_1 + t_2 + t_3,$$
$$S_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3,$$
$$S_3 = t_1t_2t_3;$$

les relations précédentes s'écriront

$$4pS_1t_1t_2 - 4pS_3 + p' = 0,$$
$$4pS_1t_1t_3 - 4pS_3 + p' = 0,$$
$$4pS_1t_2t_3 - 4pS_3 + p' = 0,$$

et il est visible alors qu'elles se réduisent à deux :

$$S_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad 4pS_3 - p' = 0.$$

Donc il y a une infinité de triangles ABC satisfaisant aux conditions exigées.

**2.** Comme $t_1 + t_2 + t_3 = 0$, on a aussi $y_1 + y_2 + y_3 = 0$; le centre de gravité du triangle ABC reste sur l'axe de la parabole P, donc les normales en A, B, C sont concourantes.

**3.** La droite BC a pour coefficient angulaire $\dfrac{1}{t_2 + t_3}$ ou $-\dfrac{1}{t_1}$; donc la perpendiculaire menée du point A à cette droite a pour équation

$$y - 2pt_1 - t_1(x - 2pt_1^2) = 0,$$

et son enveloppe est la parabole semi-cubique

$$27py^2 - 2(x + 2p)^3 = 0.$$

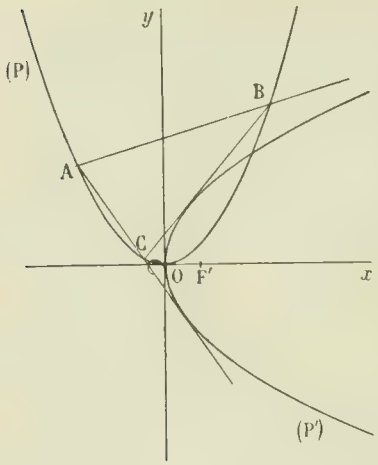
C'est la développée de la parabole

$$y^2 - 8p(x - 6p) = 0.$$

**4.** Enfin, quand $p'$ varie, que la parabole P reste fixe ainsi que le point A, le côté BC a pour coefficient angulaire le nombre fixe $-\dfrac{1}{t_1}$; il se déplace donc parallèlement à lui-même.

Bonnes solutions : MM. J. Haag, lycée de Nancy; M. Laurence, lycée de Bordeaux; E.-N. Barisien; M. E.-N. Barisien remarque en outre que le lieu du point de rencontre des normales en A, B, C est la droite $x = p'$ et trouve divers autres lieux intéressants; J. Franceschini, lycée de Marseille : R. Bouvaist, J. Marchal.

**Solution géométrique.** — **1.** Il suffit de montrer qu'il existe un seul triangle ABC. Or considérons le triangle $yOy$ formé par deux fois $Oy$ et la droite de l'infini, il est inscrit à P et circonscrit à P'; il remplit les conditions indiquées. Le fait annoncé est donc vrai.




On sait qu'en général il existe quatre coniques par rapport auxquelles deux coniques se transforment l'une dans l'autre par polaires réciproques. Si les deux coniques sont telles qu'il existe des triangles inscrits dans l'une et circonscrits dans l'autre, ces triangles sont évidemment conjugués à ces coniques, ce qui montre que leur nombre s'abaisse à un.

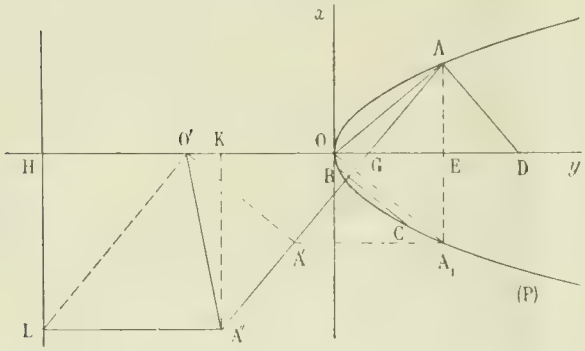
Si nous considérons le triangle $yOy$, il est conjugué à cette conique H. Donc H a pour centre O et pour asymptote $Oy$. Mais il est évident que si dans P on peut inscrire des triangles circonscrits à P', dans P' on peut inscrire des triangles circonscrits à P ; donc P et P' jouissent de propriétés réciproques, et il en résulte que $Ox$ est l'autre asymptote de H.

H est donc une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes $Ox$ et $Oy$ et que l'on déterminerait facilement à l'aide d'un point.

**2.** Le triangle ABC est conjugué à H. Donc le cercle qui lui est circonscrit passe au centre de H, c'est-à-dire en O. Donc dans la parabole P, les points A, B, C sont tels que le cercle circonscrit à ABC passe au sommet O. Par suite les normales à A, B, C sont concourantes.

Le cercle circonscrit à ABC passe en deux points fixes, le point O et foyer F' de P'. Donc le lieu de son centre est la perpendiculaire à F'O en son milieu.

**3.** Les droites OA et BC sont également inclinées sur $Oy$. Donc si E est la projection de A sur $Oy$, la perpendiculaire AD à OA et la hauteur AG, issue de A dans le triangle ABC, sont symétriques par rapport à AE.




Or on sait que $DE = 2p$, $p$ étant le paramètre de (P). Donc $GE = 2p$.

Soient A' le symétrique de A par rapport à G et $A_1$ le symétrique de A par rapport à $Oy$ ; ce dernier point est sur la parabole P. $A_1A'$ est parallèle à $Oy$ et égale à $2GE = 4p$. Donc le lieu de A' est une parabole obtenue en faisant subir à P la translation $A_1A'$. Le sommet de cette parabole est le point O' tel que $O'O = 4p$ et O'A' est perpendiculaire sur AGA'.

Soit A'' le symétrique de G par rapport à A'. On a $O'A'' = O'G$. Prenons sur $Oy$ le point H tel que $HO' = O'O = 4p$ et menons en ce point la perpendiculaire à $Oy$. A'' se projette en L sur cette droite et on a $A''L = O'H + O'K = 4p + O'K$. Or, on a évidemment $KG = 2GE = 4p$. Donc $A''L = O'G = O'A''$.

Ce point A'' décrit donc une parabole de foyer O' et de directrice HL. La tangente en A'' à cette parabole est la bissectrice de l'angle O'A''L ; elle est donc parallèle à O'A'. Par suite A''G est la normale en A'' à cette parabole. L'enveloppe de AG est donc la développée de cette parabole.

**4.** Faisons varier le paramètre de (P'), le point A restant fixe ; les droites OA et BC ont des directrices symétriques par rapport à $Ox$. Donc BC reste parallèle à elle-même.

M. REBEIX, à Montbrison.

Solution analogue de M. J Haag, lycée de Nancy.

---

**1126.** — *On considère une ellipse et deux sommets de cette ellipse,* A *et* B, *situés respectivement sur le grand et le petit axe.*

1° *Trouver l'équation générale des hyperboles équilatères qui passent aux points* A *et* B *et au centre de l'ellipse, ainsi que le lieu de leurs centres.*

2° *Chacune de ces hyperboles coupe l'ellipse en deux nouveaux points* $A_1$ *et* $B_1$. *Trouver l'équation*

*de* $A_1B_1$, *l'enveloppe de cette droite et le lieu des points* M *et* N *où se coupent* $AA_1$ *et* $BB_1$ *d'une part,* $AB_1$ *et* $BA_1$ *d'autre part.*

3° *Trouver l'équation de la droite* MN *et le lieu du point de rencontre de* MN *avec* $A_1B_1$.

1° Soit, comme habituellement, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses deux axes et considérons les deux sommets A et B situés respectivement sur les parties positives des axes. L'équation générale des hyperboles équilatères passant à l'origine et aux points A et B est évidemment

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - ax + by = 0.$$

Toutes ces coniques forment un faisceau linéaire et touchent à l'origine une droite fixe.

Les équations du centre sont

$$2x + 2\lambda y - a = 0,$$
$$2\lambda x - 2y + b = 0.$$

et le lieu de ce point s'obtient en éliminant $\lambda$ entre les deux équations ; cette élimination est linéaire et immédiate, elle se fait en multipliant la première équation par $x$, la seconde par $y$ et en retranchant ; le résultat est

$$(1) \qquad 2(x^2 + y^2) - ax - by = 0,$$

équation d'un cercle qui passe à l'origine et aux milieux de OA et de OB. Ce cercle est le cercle des neuf points du triangle rectangle OAB.

2° Pour avoir l'équation de $A_1B_1$, il suffit d'écrire qu'une combinaison linéaire du premier membre de l'équation de l'ellipse avec celui de l'hyperbole se décompose en un produit de deux fonctions linéaires dont l'une est le premier membre de l'équation de AB. On est ainsi conduit à l'identité

$$\mu\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + x^2 - y^2 + 2\lambda xy - ax + by \equiv (ux + vy + w)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right);$$

égalant les coefficients des termes carrés, on a

$$\frac{u}{a} = 1 + \frac{\mu}{a^2}, \qquad \frac{v}{b} = -1 + \frac{\mu}{b^2}, \qquad w = \mu.$$

L'équation de AB est donc

$$ax - by + \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1\right) = 0.$$

Sous cette forme, il est visible que la droite $A_1B_1$ tourne autour d'un point fixe situé à l'intersection de la droite A'B' avec la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite. Nous désignerons ce point par C.

Si l'on voulait obtenir l'équation de $A_1B_1$ en fonction du paramètre $\lambda$, il faudrait égaler les deux coefficients de $xy$, remplacer $u$ et $v$ par leurs valeurs en fonction de $\mu$ et de l'égalité ainsi obtenue tirer $\mu$ en fonction de $\lambda$.

Pour trouver le lieu des points M et N, il suffit de trouver le lieu des points doubles des coniques du faisceau ayant pour coniques de base l'ellipse proposée et l'hyperbole équilatère variable $\lambda$. A cet effet, nous annulerons les trois dérivées partielles de la forme

$$\mu\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + x^2 - y^2 + 2\lambda xy - ax + by,$$

par rapport à $x$, à $y$ et à $z$, et nous éliminerons $\mu$ et $\lambda$ entre ces équations. Le résultat de l'élimination est

$$\begin{vmatrix} \frac{2x}{a^2} & 2y & 2x - a \\ \frac{2y}{b^2} & 2x & -2y + b \\ -2 & 0 & -ax + by \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée est

$$(ax - by)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - x(2x - a) - y(2y - b) = 0.$$

or, elle contient visiblement en facteur la fonction linéaire $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$, car l'un des points doubles du faisceau est toujours situé sur la droite AB. Ce facteur enlevé, il reste l'équation

$$(2) \qquad (ax - by)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) - ax - by = 0,$$

qui représente une hyperbole ayant pour directions asymptotiques AB′ et une perpendiculaire à AB ; cette hyperbole passe en outre aux points A et B et au point O.

3. La droite MN est la polaire du point de rencontre de AB avec $A_1B_1$ ; les coordonnées de ce point s'obtiennent facilement et sont

$$x = \frac{ab^2 - 2a\mu}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{a^2b + 2b\mu}{a^2 + b^2};$$

la polaire de ce point a donc pour équation

$$(b^2 - 2\mu)\frac{x}{a} + (a^2 + 2\mu)\frac{y}{b} - a^2 - b^2 = 0.$$

Alors le lieu demandé s'obtient en éliminant $\mu$ entre cette équation et celle de $A_1B_1$ ; cette dernière donne $\mu$ immédiatement et en le portant dans la précédente, on a de suite l'équation du lieu

$$2\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)(ax - by) + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1\right)\left(\frac{b^2x}{a} + \frac{a^2y}{b} - a^2 - b^2\right) = 0;$$

cette équation, une fois développée, s'écrit

$$(3) \qquad (2a^2 + b^2)\frac{x^2}{a^2} + \frac{2b^2 + a^2}{b^2}y^2 - \frac{a^2 + b^2}{ab}xy - ax - by - a^2 - b^2 = 0.$$

Elle représente une ellipse dont la première forme met en évidence un certain nombre de points et qui passe en outre aux points A et B ; parmi les quatre points signalés se trouvent le point C et le pôle de AB, ainsi que le milieu de A′B′.

J. HAAG.

Solutions satisfaisantes : MM. Chanove, à Paris ; R. Javelot, lycée Saint-Louis ; E.-N. Barisien ; J. Marchal.

**Solution géométrique.** — On sait que les hyperboles équilatères qui sont circonscrites à un triangle passent en outre au point de concours des hauteurs de ce triangle et forment un faisceau linéaire ; par conséquent, les hyperboles indiquées forment un faisceau linéaire et sont tangentes en O à la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'hypoténuse AB du triangle rectangle AOB. Le lieu de leurs centres est le cercle des neuf points de ce triangle.

Considérons les trois coniques, ellipse, (OA, OB) et hyperbole équilatère indiquée ; elles ont une corde commune AB, donc les trois autres cordes associées à celle-là passent par le même point ; par conséquent, comme deux de ces cordes sont fixes, A′B′, et la perpendiculaire abaissée de O sur AB, celle qui est relative à l'ellipse et à l'hyperbole, $A_1B_1$ passe par un point fixe, le point que nous avons appelé C.

La droite $A_1B_1$ tournant autour d'un point fixe, les deux faisceaux $AA_1$ et $AB_1$ sont en involution ; d'autre part, les faisceaux $AA_1$ et $BA_1$, sont homographiques ; donc les faisceaux $BA_1$ et $AB_1$ sont homographiques et, par suite, le lieu du point N est une conique qui passe aux points A et B. Il est évident que rien ne distingue le point M du point N ; le lieu de M est donc le même que celui de N. Quand $A_1B_1$ vient sur A′B′, le point N vient en O et quand $A_1B_1$ devient tangente à l'ellipse, le point N va au point de contact ; la conique envisagée passe donc en outre au point O et aux deux points de contact avec l'ellipse des tangentes issues de C ; il est visible en outre qu'elle admet AB′ comme direction asymptotique, car le point M va à l'infini lorsque $A_1B_1$ est sur A′B′ ; l'autre direction asymptotique est moins aisée à apercevoir, c'est la perpendiculaire à AB.

Soit P le point de rencontre de AB avec $A_1B_1$ ; la droite MN est la polaire du point P, elle décrit un faisceau homographique à la série P et, par suite, homographique au faisceau $A_1B_1$. Donc, le lieu du point de ren-

contre de $A_1B_1$ avec MN est une conique qui passe au point C et au pôle D de AB, autour duquel tourne la droite MN ; elle passe aussi évidemment aux points A et B et au milieu de A'B'.

Bonnes solutions : MM. J. Haag ; R. Bouvaist.

## CONCOURS DE 1902 *Suite*

### ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE

**Section d'Artillerie et Génie.**

Arithmétique.

**1.** Démontrer que si $p$ est un nombre premier et $x$ premier avec $p$, le nombre

$$x^{p-1} - 1$$

est un multiple de $p$.

**2.** Déterminer les cubes parfaits de la forme $5p + 1$, $p$ désignant un nombre premier.

Algèbre.

**1.** Démontrer que les racines incommensurables d'une équation du second degré à coefficients rationnels s'expriment en fractions continues périodiques.

On examinera seulement le cas où les racines de l'équation ont des signes contraires.

**2. — 1169. —** Déterminer tous les systèmes de valeurs réelles de $x$ et de $y$ pour lesquels l'expression $(x + y\sqrt{-1})^3$ est réelle et supérieure à 8.

Ayant tracé deux axes rectangulaires, indiquer sur la figure les points dont ces valeurs de $x$ et de $y$ sont les coordonnées.

Géométrie.

**1.** Définissez ce que l'on entend par trièdres supplémentaires et démontrez les propositions suivantes :

1. Si un angle trièdre est le supplémentaire d'un angle trièdre donné, réciproquement, celui-ci est le trièdre supplémentaire de l'autre ;

2. Dans deux trièdres supplémentaires, chaque angle dièdre de l'un est le supplément de la face opposée dans l'autre ;

3. Dans tout trièdre la somme des angles dièdres est comprise entre deux droits et six droits.

4. Dans tout trièdre, le plus petit angle dièdre, augmenté de deux droits est plus grand que la somme des deux autres.

**2.** On donne un triangle ABC et une droite AD extérieure au triangle et passant par le sommet A. On demande de mener par A une droite AX qui décompose le triangle en deux autres BAX, CAX de façon que les volumes engendrés par la révolution de ces deux triangles autour de AD soient égaux.

Trigonométrie.

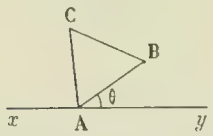
**1.** Calculer le volume d'un parallélépipède oblique connaissant les longueurs des arêtes et les angles que ces arêtes font entre elles.

Démontrer que, dans un triangle sphérique :

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin b \sin c}}.$$

**2.** Un triangle équilatéral ABC de côté $a$ tourne autour d'une droite $xy$. On demande de calculer la tangente de l'angle $\frac{\theta}{2}$ sachant que la surface totale engendrée par le périmètre du triangle tournant autour de $xy$ est égale à $\pi m^2$. Chercher les conditions pour que le problème soit possible et présente deux solutions.




GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

1. Définir les foyers et les directrices des courbes du second ordre.

Déterminer les foyers et les directrices des courbes représentées par l'équation

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

les axes des coordonnées étant rectangulaires. Discuter.

2. Étant donnés deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, on marque sur l'axe $Ox$ deux points A et A′ équidistants de l'origine O et l'on trace, dans le plan de la figure, une droite $d$ coupant les axes coordonnés.

1. Chercher le lieu des pôles de la droite $d$ par rapport aux cercles passant par A et A′.

2. Démontrer que ce lieu est une hyperbole dont l'une des asymptotes est perpendiculaire à la droite $d$ et la rencontre en un point situé sur l'axe $Oy$. Comment peut-on définir géométriquement la seconde asymptote?

3. Démontrer que l'hyperbole coupe l'axe $Ox$ en un point dont le conjugué harmonique par rapport aux points A et A′ est le point d'intersection de $d$ et de $Ox$.

CALCUL LOGARITHMIQUE.

On donne

$$\operatorname{tg}^2 X = m \frac{\sin^3 A \operatorname{tg}^2 B}{\cos C \sin^4 D}.$$

Calculer X entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, étant donné que

$$m = 10,031733,$$
$$A = 12^\circ 40' 50'', \qquad B = 29^\circ 44' 20'',$$
$$C = 58^\circ 51' 40'', \qquad D = 64^\circ 14' 10''.$$

On exprimera le résultat en degrés, minutes et secondes.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

On donne :

1. Le point A ;

2. La droite $d$ passant par ce point.

On demande :

1° De porter sur $d$ à partir de A et en arrière de ce point une longueur AB égale à 100 millimètres.

2° De construire dans le plan mené par $d$ parallèlement à la ligne de terre, le carré dont AB est un côté et dont les sommets C et D sont situés à gauche de B.

3° D'élever, au centre O du carré, une perpendiculaire à son plan et de porter au-dessus et au-dessous de O, sur cette perpendiculaire, des longueurs OE et OF égales à la demi-diagonale OA.

4° De construire et de représenter l'octaèdre régulier EABCDF en le considérant comme un corps plein et opaque.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1070.** — Quelles sont les conditions que doivent remplir les coefficients de l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

pour que ses quatre racines soient de la forme

$$a, \; b, \; \frac{b}{a}, \; \frac{a}{b}.$$

E.-N. BARISIEN.

**1071.** — Par un point fixe A d'un cercle donné on mène deux cordes rectangulaires variables AB et AC.

1° Le lieu des centres de similitude des cercles de diamètres AB et AC est une strophoïde droite.

2° Le lieu des centres de similitude du cercle donné et du cercle de diamètre AB est une quartique. Construire la courbe.

E.-N. BARISIEN.

*Erratum.* — N° de Novembre, page 56, ligne 14, au lieu de : sphère de sommet S, lire : sphère de *centre* S.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

13e Année. N° 4 Janvier 1903.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES

par M. J. **Richard**, professeur au lycée de Dijon.

La démonstration qu'on donne dans les cours de Géométrie analytique à deux dimensions de cette proposition : *Toute équation entre deux variables $x$ et $y$ représente une ligne*, n'est en réalité qu'un simple aperçu. Je vais essayer ici de démontrer que les points dont les coordonnées $x$ et $y$ satisfont à une équation algébrique $f(x, y) = 0$ forment un ensemble répondant bien à l'idée qu'on se fait en général d'une ligne.

Je me borne dans tout ce qui suit aux points réels.

I. Je commence par une remarque très simple. *Si un point* A $(x_0, y_0)$ *n'est pas sur une courbe algébrique* $f(x, y) = 0$, *c'est-à-dire si ses coordonnées ne satisfont pas à cette équation, on peut trouver un rayon* $\rho$, *tel que dans le cercle décrit de* A *comme centre avec* $\rho$ *comme rayon, il n'y ait aucun point de la courbe.*

Ceci résulte immédiatement de la continuité du polynome $f(x, y)$. La différence $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ tend vers zéro quand la distance des points $(x, y)$, $(x_0, y_0)$ tend vers 0 ; $f(x, y)$ différant aussi peu qu'on veut de $f(x_0, y_0)$ qui n'est pas nul, ne peut être nul.

II *Soit* A *un point situé sur la courbe* $f(x, y) = 0$ *et tel que* $f'_x$, $f'_y$ *ne soient pas nulles toutes deux en ce point ; il existe dans le voisinage de* A *des points pour lesquels* $f(x, y)$ *est positif, d'autres pour lesquels il est négatif.*

Soient $x_0$, $y_0$ les coordonnées de A. Menons par A une droite dont les paramètres directeurs $u$, $v$ ne satisfont pas à la condition

$$uf'_{x_0} + vf'_{y_0} = 0,$$

ce qui est possible, puisque l'on n'a pas à la fois $f'_{x_0} = 0$, $f'_{y_0} = 0$.

Soit $A_1$ un point voisin de A sur cette droite, $x_0 + u\rho$, $y_0 + v\rho$, ses coordonnées.

On a, puisque $f(x_0, y_0)$ est nul,

$$f(x_0 + u\rho, y_0 + v\rho) = \rho(uf'_{x_0} + vf'_{y_0}) + \rho^2(\ldots);$$

quand $\rho$ est suffisamment petit, le premier terme donne son signe ; donc, l'expression considérée change de signe avec $\rho$, ce qui démontre la proposition.

Quand $f(x, y)$ change de signe, nous dirons que le point $(x, y)$ traverse la courbe. Nous pouvons donc dire que toute droite passant par A traverse la courbe en ce point, sauf peut-être la droite dont les paramètres directeurs $u$ et $v$ satisfont à la relation $uf'_{x_0} + vf'_{y_0} = 0$.

III. L'hypothèse étant la même que ci-dessus, *il y a des points de la courbe autres que* A, *et aussi voisins qu'on voudra de* A. En effet, prenons de part et d'autre de A un point $A_1$ $(x_1, y_1)$ et un point $A_2$

$(x_2, y_2)$, de façon que $f(x_1,y_1) > 0$ et $f(x_2,y_2) < 0$. Considérons une ligne continue, telle qu'un arc de cercle ou une ligne brisée allant de $A_1$ à $A_2$,

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t);$$

pour $t = t_1$, on aura le point $A_1$; pour $t = t_2$, le point $A_2$; $f[\varphi(t), \psi(t)]$ est une fonction continue de $t$, positive pour $t = t_1$, négative pour $t = t_2$, elle s'annule donc pour une valeur de $t$ comprise entre $t_1$ et $t_2$. Et comme on peut choisir la ligne de façon qu'elle soit contenue dans un cercle de centre A et de rayon aussi petit qu'on voudra, on voit qu'il y a des points de la courbe aussi voisins qu'on voudra de A.

IV. *Existence des fonctions implicites.*

Les mêmes conditions étant toujours supposées, je vais démontrer qu'il existe une fonction $y$ de $x$, tendant vers $y_0$ quand $x$ tend vers $x_0$, et satisfaisant à l'équation $f(x, y) = 0$, en supposant de plus que $f'_{y_0}$ soit différent de zéro.

Dans ce cas, en effet, les paramètres directeurs $u = 0$, $v = 1$ ne satisfont pas à la relation $uf'_{x_0} + vf'_{y_0} = 0$. Donc la droite $x = x_0$ traverse la courbe en A. Prenons les points $A_1$ et $A_2$ du théorème précédent sur cette droite, à une distance $\varepsilon$ de A de part et d'autre ; formons un petit rectangle $A_1B_1B_2A_2$, ayant ses côtés parallèles aux axes, $A_1B_1$ et $A_2B_2$ étant égaux à une quantité $h$ assez petite pour qu'il n'y ait pas de points de la courbe sur eux, ce qui est possible (Théorème I); alors en $B_1$ et en $B_2$ le polynome $f$ aura des signes contraires, $B_1B_2$ coupera la courbe. Donc sur la droite $B_1B_2$ $(x = x_0 + h)$ il y aura un point dont l'ordonnée sera comprise entre $y_0 - \varepsilon$ et $y_0 + \varepsilon$ qui appartiendra à la courbe. Ce qui démontre la proposition.

V. *La fonction $y$ dont l'existence vient d'être démontrée est unique.*

En effet $f(x_0, y)$ est divisible par $y - y_0$ et non par $(y - y_0)^2$ parce que $f'_{y_0} \lessgtr 0$. Or, supposons que quand $x$ tend vers $x_0$ $p$ valeurs de $y$ racines de l'équation $f(x, y) = 0$ tendent vers $y_0$. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_p$ ces $p$ valeurs. On aurait

$$f(x, y) = (y - y_1)(y - y_2)\cdots(y - y_p)\psi(x, y);$$

quand $x$ tend vers 0, le premier membre tend vers $f(x_0, y)$, le second vers $(y - y_0)^p\psi(x_0,y)$; donc $f(x_0,y)$ serait divisible par $(y - y_0)^p$, ce qui n'est pas.

VI. *Existence d'une tangente à la courbe.*

D'après le théorème III, il y a des points de la courbe aussi voisins de A qu'on voudra ; on peut donc supposer que AA′ tende vers zéro. Dans ces conditions, je dis que la droite AA′ tend vers une position limite. Je désignerai par $u$ et $v$ les paramètres directeurs de cette droite.

Soient $x_0 + u\rho$, $y_0 + v\rho$ les coordonnées du point A′ : $f'_{x_0}$, $f'_{y_0}$ n'étant pas tous les deux nuls, supposons $f'_{y_0} \lessgtr 0$.

On aura
$$f(x_0 + u\rho, y_0 + v\rho) = 0,$$
ou, puisque $f(x_0,y_0)$ est aussi nul,
$$uf'_{x_0} + vf'_{y_0} + \rho\varphi_2(u, v) + \rho^2\varphi_3(u, v) + \cdots = 0,$$
d'où l'on tire
$$v = -\frac{uf'_{x_0} - \rho\varphi_2(u, v) - \rho^2\varphi_3(u, v) - \cdots}{f'_{y_0}};$$

quand $\rho$ tend vers 0, $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ restent évidemment finies quelle que soit la manière dont varient $u$ et $v$, donc $\frac{v}{u}$ tend vers $-\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}$. ($u$ ne peut pas tendre vers 0, car la formule ci-dessus montrerait que $v$ tend aussi vers 0. Or, cela n'est pas possible, car $u$ et $v$ sont des paramètres directeurs.)

Aucune des démonstrations précédentes ne suppose connu le théorème de d'Alembert. On peut se servir au contraire de ce qui précède pour le démontrer, ce que je ferai voir ultérieurement.

## NOTE SUR LES CONIQUES D'UN RÉSEAU

par M. **L. Bickart**

Je me propose de démontrer très rapidement une propriété simple des coniques d'un réseau qui est la suivante :

*Les cordes communes avec une conique fixe des coniques d'un réseau linéaire sont deux à deux conjuguées par rapport aux coniques d'un certain faisceau tangentiel.*

Soient $f = 0$, la conique fixe,

et $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$, une conique d'un réseau linéaire ;

pour obtenir les cordes communes, il faudra écrire les équations d'identification impliquées par

$$\lambda f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = (ux + vy + wz)(u'x + v'y + w'z).$$

Ces équations sont au nombre de 6 : éliminons les paramètres $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, il restera deux équations de la forme

$$Auu' + A'vv' + A''ww' + B(vw' + ww') + B'(wu' + uw') + B''(uv' - vu') = 0.$$

Or, une équation de cette forme exprime que les droites $u, v, w$, $u', v', w'$ sont conjuguées par rapport à la conique

$$Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2Bvw + 2B'wu + 2B''uv = 0 :$$

le théorème est ainsi démontré.

## CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1902).

### Mathématiques.

Solution par **M. Boudeville** (prix d'honneur).

**1116.** — 1° *Soient* $\Gamma$, $\Gamma_1$ *les traces d'un ellipsoïde* E *et de son cône asymptote sur le plan* $\Pi$ *qui passe par les extrémités* A, B, C *de trois diamètres conjugués* $\omega$A, $\omega$B, $\omega$C *de cet ellipsoïde. — On sait que ces traces sont des coniques concentriques et homothétiques.*

*Démontrer que le rapport de similitude des coniques* $\Gamma$, $\Gamma_1$ *ne change pas quand on fait varier soit les trois diamètres conjugués* $\omega$A, $\omega$B, $\omega$C, *soit l'ellipsoïde* E.

2° *Cela étant, on donne trois points* A, B, C *non en ligne droite et l'on considère tous les ellipsoïdes* E *dont trois diamètres conjugués ont pour extrémités les points* A, B, C.

*Démontrer que les ellipsoïdes* E *et leur cône asymptote sont coupés par le plan* ABC *suivant des coniques fixes* $\Gamma$ *et* $\Gamma_1$. — *On désignera par* $2\alpha$ *et par* $2\beta$ *les longueurs des axes de la conique* $\Gamma$.

3° *On prend pour axes de coordonnées les axes de symétrie* $Ox$, $Oy$ *de la conique* $\Gamma$ *et la perpendiculaire* $Oz$ *au plan* ABC : *trouver l'équation de celui des ellipsoïdes* E *qui a pour centre un point donné* $\omega$ *de coordonnées* $x_1$, $y_1$, $z_1$.

4° *Soient* P, Q, R *les traces sur le plan* ABC *des axes de symétrie de cet ellipsoïde* E *ayant pour centre* $\omega$ ; *montrer que le triangle* PQR *est conjugué par rapport à la conique* $\Gamma_1$. — *Déterminer le cercle* $C_1$ *conjugué du même triangle* PQR.

5° *Montrer que les points* P, Q, R *peuvent, dès lors, être obtenus par l'intersection d'un cercle* $C_2$ *et d'une hyperbole équilatère* H *ayant ses asymptotes parallèles aux axes de symétrie de la conique* Γ.

6° *Le cercle* $C_2$ *coupe l'hyperbole équilatère* H *aux points* P, Q, R *et en un quatrième point* S *que l'on construira.*

*Déterminer les puissances, par rapport au cercle* $C_2$, *de l'origine* O *des coordonnées et du point de rencontre des hauteurs du triangle* PQR. — *Construire le cercle* $C_2$.

7° *Examiner le cas particulier où la conique* Γ *est un cercle.*

**1.** Prenons pour axes ωA, ωB, ωC ; l'ellipsoïde E aura une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

et le plan ABC,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0.$$

Considérons le cylindre parallèle à $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ et projetant la section Γ de E par le plan ABC.

Il coupe encore E suivant sa section par $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+1=0$; donc son équation est de la forme

$$k\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+1\right)=0,$$

ou

$$k\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2-1=0.$$

L'origine ω est centre de cette quadrique ; pour écrire que c'est le cylindre en question, il suffit d'exprimer que le point $(a, b, c)$ est centre ; or les équations du centre sont

$$k\frac{x}{a^2}+\frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=0 \qquad \text{ou} \qquad k\frac{x}{a}+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,$$

$$k\frac{y}{b}+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,$$

$$k\frac{z}{c}+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$$

Les trois conditions donnent simplement $k+3=0$, et le cylindre a pour équation

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2-1-3\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=0.$$

De même le cylindre projetant $\Gamma_1$ est

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2-1-3\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0.$$

$z=0$ donne dans ces deux cylindres

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2-3\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+2=0,$$

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2-3\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-1=0.$$

Donc le rapport d'homothétie de Γ à $\Gamma_1$ est $\pm i\sqrt{2}$.

**2.** Supposons qu'on se donne A, B, C non en ligne droite. En A le plan tangent est parallèle à ωBC, sa trace sur ABC, tangente à Γ, est parallèle à BC.

Γ est donc fixe : c'est la conique circonscrite à ABC pour laquelle la droite de Pascal est rejetée à l'infini, ou encore c'est la conique circonscrite à ABC qui se projette suivant un cercle quand on projette ABC suivant un triangle équilatéral et réciproquement.

$\Gamma$ étant fixe, ainsi que le centre et le rapport d'homothétie de $\Gamma$ à $\Gamma_1$, il en est de même de $\Gamma_1$.

**3.** Avec les axes indiqués, $\Gamma$ a pour équation $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-1=0$. $\omega(x_1, y_1, z_1)$ étant le centre, le sommet du cône circonscrit suivant $\Gamma$ est évidemment $(-2x_1, -2y_1, -2z_1)$. Formons l'équation de ce cône.

Une génératrice est

$$\frac{x+2x_1}{u}=\frac{y+2y_1}{v}=\frac{z+2z_1}{w};$$

$z=0$ donne

$$x=-2x_1+\frac{2uz_1}{w},$$

$$y=-2y_1+\frac{2vz_1}{w}.$$

On a donc la condition

$$\frac{\left(-2x_1+\frac{2uz_1}{w}\right)^2}{\alpha^2}+\frac{\left(-2y_1+\frac{2vz_1}{w}\right)^2}{\beta^2}-1=0,$$

ou

$$\frac{(wx_1-uz_1)^2}{\alpha^2}+\frac{(wy_1-vz_1)^2}{\beta^2}-\frac{w^2}{4}=0.$$

Remplaçant $u, v, w$ par les quantités proportionnelles, on a l'équation du cône

$$\frac{(x_1z-z_1x)^2}{\alpha^2}+\frac{(y_1z-z_1y)^2}{\beta^2}-\frac{(z+2z_1)^2}{4}=0.$$

L'ellipsoïde est alors de la forme

$$\frac{(x_1z-z_1x)^2}{\alpha^2}+\frac{(y_1z-z_1y)^2}{\beta^2}-\frac{(z-2z_1)^2}{4}-kz^2=0.$$

Pour toutes ces quadriques la ligne des centres est $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}$. Pour que l'équation représente l'ellipsoïde de centre $\omega$, il suffit que l'un des plans du centre passe par $\omega$. Ce calcul donne

$$\frac{1}{2}f'_{z_1}=-\frac{z_1+2z_1}{4}+kz_1=\left(k-\frac{3}{4}\right)z_1=0;$$

d'où $k=\frac{3}{4}$, $z_1$ étant supposé évidemment $\neq 0$.

L'ellipsoïde en question est donc

$$\frac{(x_1z-z_1x)^2}{\alpha^2}+\frac{(y_1z-z_1y)^2}{\beta^2}-\frac{(z+2z_1)^2}{4}+\frac{3}{4}z^2=0.$$

Cette équation est établie indépendamment de la première partie. Elle peut servir à la vérifier.

Le cône asymptotique de sommet O est

$$\frac{(x_1z-z_1x)^2}{\alpha^2}+\frac{(y_1z-z_1y)^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{2}=0;$$

cette équation est celle du cône asymptote par rapport aux axes transportés en $\omega$. Dans le système actuel, le cône asymptote est donc

$$\frac{(x_1z-z_1x)^2}{\alpha^2}+\frac{(y_1z-z_1y)^2}{\beta^2}+\frac{(z-z_1)^2}{2}=0;$$

or $z=0$ donne $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{1}{2}=0$, ce qui vérifie la première partie.

Si, inversement, on veut, pour former l'équation de E, s'appuyer sur la première partie, on peut dire : Formons le cône asymptote ; il a pour sommet $\omega(x_1, y_1, z_1)$ et pour base $\Gamma_1 \left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{1}{2}=0; \end{array} \right.$

une génératrice est $\dfrac{x-x_1}{u} = \dfrac{y-y_1}{v} = \dfrac{z-z_1}{w}$, et $z=0$ donne

$$x = x_1 - \frac{u}{w} z_1,$$

$$y = y_1 - \frac{v}{w} z_1;$$

on a donc
$$\frac{(wx_1 - uz_1)^2}{\alpha^2} + \frac{(wy_1 - vz_1)^2}{\beta^2} + \frac{w^2}{2} = 0,$$

et le cône est
$$\frac{(x_1z - z_1x)^2}{\alpha^2} + \frac{(y_1z - z_1y)^2}{\beta^2} + \frac{(z-z_1)^2}{2} = 0.$$

C'est l'équation déjà trouvée; de là on passe à celle de E en ajoutant $k$ au premier membre; $z=0$ donne alors $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{k}{z_1^2} = 0$, et pour que cette conique soit $\Gamma$, il faut $k = -\dfrac{3}{2} z_1^2$.

L'équation de E est donc
$$\frac{(x_1z - z_1x)^2}{\alpha^2} - \frac{(y_1z - z_1y)^2}{\beta^2} + \frac{(z-z_1)^2}{2} - \frac{3}{2} z_1^2 = 0$$

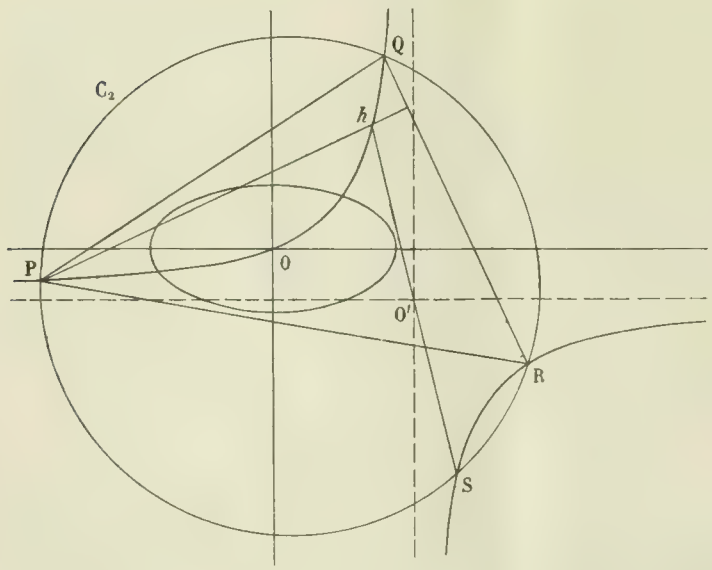
Cette équation est identique à l'équation trouvée par l'autre méthode, car toutes deux se réduisent à
$$\frac{(x_1z - z_1x)^2}{\alpha^2} - \frac{(y_1z - z_1y)^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{2} - z_1z - z_1^2 = 0.$$

4. Le trièdre des axes, $\omega$PQR, est conjugué par rapport au cône asymptote de l'ellipsoïde E. Leurs sections par un même plan sont donc un triangle PQR et une conique $\Gamma_1$ conjuguée à ce triangle.

De même le cône isotrope de sommet $\omega$ est conjugué à $\omega$PQR. Sa trace sur le plan ABC est donc le cercle conjugué $C_1$ au triangle PQR : c'est le cercle imaginaire de centre $h(x_1, y_1, 0)$, projection de $\omega$ et orthocentre de PQR, et de rayon $iz_1$.

La recherche de P, Q, R est donc celle du triangle conjugué commun à la conique $\Gamma_1$ et au cercle $C_1$.

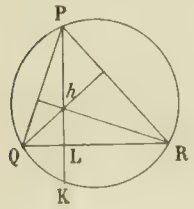
5. OP est le diamètre conjugué de QR dans $\Gamma_1$ et $\Gamma$; $h$P est la perpendiculaire abaissée de $h$ sur QR. Donc P, et de même Q et R, sont sur le lieu des intersections d'un diamètre avec la perpendiculaire menée de $h$ à ses cordes conjuguées, c'est-à-dire sur l'hyperbole d'Apollonius H du point $h$. Cette hyperbole est facile à déterminer, puisque $h$, projection de $\omega$, est connu et que l'on peut remplacer $\Gamma_1$ par toute conique homothétique, par exemple, $\Gamma$ qui est réelle si A, B, C le sont.




Si donc on peut déterminer le cercle PQR ou $C_2$, les points P, Q, R seront donnés par l'intersection de $C_2$ et de H. Soit S le quatrième point d'intersection.

6. On sait que le centre O′ de l'hyperbole équilatère H circonscrite à PQR est sur le cercle d'Euler de PQR. Donc le symétrique de $h$ par rapport à O′ est sur le cercle circonscrit : or il est sur H, c'est donc le point S, et il est connu d'avance. C'est un point de $C_2$.

De plus, $C_2$ étant harmoniquement circonscrit à $\Gamma_1$ est orthogonal au cercle de Monge de $\Gamma_1$ ; la puissance de O par rapport à $C_2$ est donc $-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$. Enfin la puissance de $h$ par rapport à $C_2$ est le double carré du rayon de $C_1$, soit $-2z_1^2$. En effet,



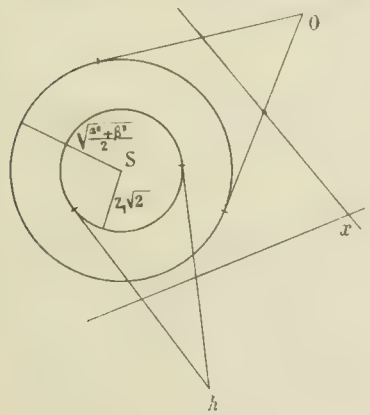

$$hP.hK = 2hP.hL = 2r^2,$$

$r$ étant le rayon de $C_1$, imaginaire ici. Remarquons que $C_1$ étant sûrement imaginaire, PQR est acutangle, ce qui est d'ailleurs évident, puisque c'est la trace d'un trièdre trirectangle.

On connaît donc un point S de $C_2$, et les puissances de O et de $h$. Il est donc facile de construire le cercle $C_2$ qui rencontrera encore H en P, Q et R.

Il suffira de tracer les axes radicaux de S, du cercle de Monge de $\Gamma_1$ et du cercle de centre $h$ et de rayon $\sqrt{-2z_1^2} = iz_1\sqrt{2}$; le centre radical $x$ est le centre de $C_2$, et on sait que $C_2$ passe en S.

Pour tracer l'axe radical de S et d'un cercle imaginaire de rayon $ik$, on sait qu'on peut augmenter d'une même quantité les carrés des rayons des deux cercles, qui actuellement sont 0 et $-k^2$. On tracera donc le cercle de centre S et de rayon $k$ et on prendra l'axe radical de ce cercle réel et du centre du cercle imaginaire donné. Donc, pour avoir PQR : Prendre $h$ projection de $\omega$, S diamétralement opposé à $h$ sur son hyperbole d'Apollonius, décrire de S comme centre des cercles de rayons $\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$ et $z_1\sqrt{2}$; prendre l'axe radical de O et du premier cercle, celui de $h$ et du deuxième ; ils se coupent en $x$ ; de $x$ comme centre avec $x$S pour rayon décrire un cercle qui coupe l'hyperbole d'Apollonius de $h$ en S, P, Q, R.




On peut vérifier par le calcul que P, Q, R sont sur H et que $C_2$ jouit des propriétés qui ont permis de le construire. Pour que le point $(x, y, 0)$ soit sur un axe, il faut que la droite qui le joint à $\omega$ soit perpendiculaire à son plan polaire, d'où, $f = 0$ étant l'équation de E,

$$\frac{x-x_1}{f'_x(x,y,0)} = \frac{y-y_1}{f'_y(x,y,0)} = -\frac{z_1}{f'_z(x,y,0)}.$$

La première condition est l'équation de H. En la combinant à la deuxième on peut former l'équation de $C_2$.

On a $$\frac{x-x_1}{\frac{x}{\alpha^2}} = \frac{y-y_1}{\frac{y}{\beta^2}} = \frac{z_1^2}{\frac{x_1x}{\alpha^2}+\frac{y_1y}{\beta^2}-\frac{1}{2}}.$$

On pourrait aussi écrire que $(x,y)$ a même polaire dans $\Gamma_1$ et dans $C_1$, d'où les conditions

$$\frac{x-x_1}{\frac{x}{\alpha^2}} = \frac{y-y_1}{\frac{y}{\beta^2}} = \frac{z_1^2-x_1(x-x_1)-y_1(y-y_1)}{\frac{1}{2}}.$$

évidemment équivalentes aux précédentes.

Dans les deux cas, on a trois coniques passant par P, Q, R, par exemple :

$$H \equiv \gamma^2xy + \beta^2y_1x - \alpha^2x_1y = 0, \qquad (\text{avec } \gamma^2 = \alpha^2-\beta^2),$$

$$P \equiv (x-x_1)\left(\frac{x_1x}{\alpha^2}+\frac{y_1y}{\beta^2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{z_1^2}{\alpha^2}x = 0,$$

$$Q \equiv (y-y_1)\left(\frac{x_1x}{\alpha^2}+\frac{y_1y}{\beta^2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{z_1^2}{\beta^2}y = 0.$$

Ecrivons que $H + \lambda P + \mu Q = 0$ est un cercle ; nous avons

$$\frac{\lambda x_1}{\alpha^2} = \frac{\mu y_1}{\beta^2},$$

$$\frac{\lambda y_1}{\beta^2} + \frac{\mu x_1}{\alpha^2} + \gamma^2 = 0.$$

D'où $$\lambda = -\frac{\gamma^2 \dfrac{y_1}{\beta^2}}{\dfrac{x_1^2}{\alpha^4} + \dfrac{y_1^2}{\beta^4}} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{\gamma^2 \dfrac{x_1}{\alpha^2}}{\dfrac{x_1^2}{\alpha^4} + \dfrac{y_1^2}{\beta^4}}.$$

$C_2$ a donc pour équation

$$\left(\frac{x_1^2}{\alpha^4} + \frac{y_1^2}{\beta^4}\right) H - \gamma^2 \frac{y_1}{\beta^2} P - \gamma^2 \frac{x_1}{\alpha^2} Q = 0,$$

ou, en réduisant et multipliant par $-\dfrac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2 x_1 y_1}$,

$$x^2 + y^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2 x_1}\left(x_1^2 + y_1^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} z_1^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right) x + \frac{\beta^2}{\gamma^2 y_1}\left(x_1^2 + y_1^2 - \frac{\gamma^2}{\beta^2} z_1^2 + \frac{\gamma^2}{2}\right) y - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = 0.$$

On voit de suite que la puissance de O est $-\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$.

En substituant $x_1, y_1$ à $x, y$, on a la puissance de $h$ :

$$(x_1^2 + y_1^2)\left(1 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) - \alpha^2\left(\frac{z_1^2}{\alpha^2} - \frac{1}{2}\right) + \beta^2\left(-\frac{z_1^2}{\beta^2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$$

$$= -2z_1^2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = -2z_1^2.$$

Enfin l'équation de $C_2$ est vérifiée par

$$+2\frac{\alpha^2}{\gamma^2} x_1 - x_1, \quad \text{et} \quad -\frac{2\beta^2}{\gamma^2} y_1 - y_1,$$

ou $$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2} x_1 \quad \text{et} \quad -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2} y_1, \quad \text{coordonnées de S.}$$

On peut remarquer que OS et O$h$ sont symétriques par rapport aux axes de $\Gamma$, ce qui traduit une propriété connue de l'hyperbole équilatère

On trouve en général trois points P, Q, R distincts, car le cercle $C_1$ et la conique $\Gamma_1$ ne peuvent être tangents à moins d'être bitangents, auquel cas le triangle conjugué commun est indéterminé : on trouve la corde des contacts et son pôle dans $C_1$ ou $\Gamma_1$ ; c'est le cas de la quadrique de révolution. $h$ est sur un axe de $\Gamma_1$ et de $\Gamma$, comme c'était à prévoir, de sorte que H se réduit à cet axe et une autre droite, qui est sur la corde des contacts en question, trace de l'équateur de E. Son pôle, dans $C_1$ ou $\Gamma_1$, également sur l'axe de $\Gamma$, est la trace de l'axe de révolution. On pourrait même déduire de là le lieu des centres des quadriques de révolution dont A, B, C sont 3 extrémités de diamètres conjugués : ce sont des courbes dans $x = 0$ et $y = 0$, et on exprime facilement $h\omega$ en fonction de O$h$.

**7.** Si $\Gamma$ est un cercle, $\Gamma_1$ est aussi un cercle. Il faut prendre ses points de Poncelet avec $C_1$, qui sont les traces de deux axes de E. De plus, on trouve le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à O$h$, ce qui n'a rien d'étonnant, puisque tout plan cyclique est parallèle à un axe, et que O$h$ est la trace du plan principal perpendiculaire à cet axe.

Nous avons reçu diverses solutions très étudiées du problème du concours général de MM. Barré, à Arras ; M. Rebeix ; M. Laurence, à Bordeaux ; R. Bouvaist ; J. Franceschini, lycée de Marseille. Mais, pour le problème du concours général, il nous paraît préférable de ne publier que la solution qui a été jugée digne du premier prix. Nous avons cependant fait exception pour l'addition très originale qui suit et qui émane d'un des correspondants les plus distingués de la *Revue*.

## Sur le problème du Concours général de Mathématiques spéciales (1902).

Soit E un espace euclidien à $n+1$ dimensions, et dans cet espace une quadrique Q à centre unique, de discriminant non nul, et son cône asymptote $Q_1$.

Soit P un espace linéaire à $n$ dimensions contenu dans E, et T, $T_1$, les quadriques à $n$ dimensions, traces de Q et $Q_1$ sur P. T et $T_1$ sont manifestement concentriques et homothétiques. Supposons que P contienne les extrémités de $n+1$ demi-diamètres conjugués de Q, soient $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. La suite des $A_i$ est inscrite à T et conjuguée à $T_1$. Réciproquement, si dans P on prend deux quadriques T et $T_1$ à $n$ dimensions, concentriques et homothétiques, telles qu'il existe une suite $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ inscrite à T et conjuguée à $T_1$, il existera une quadrique Q, de centre donné $\omega$, et de cône asymptote $Q_1$, telles que T et $T_1$ soient les traces de Q et $Q_1$ sur P, et telles que les $\omega A_i$ forment un système de $n+1$ demi-diamètres conjugués de Q; et d'ailleurs, s'il existe une suite $A_1, A_2, \ldots$ satisfaisant à la condition donnée, il en existera d'autres en nombre $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Ceci posé, je dis que si la suite des $A_i$ est donnée, les quadriques T et $T_1$ sont déterminées. En effet, prenons dans P des coordonnées homogènes $X_1, \ldots X_{n+1}$, la suite de référence étant précisément celle des $A_i$. L'équation du lieu des points de P situés à l'infini sera par exemple $\Sigma p_i X_i = 0$. Les équations de T et $T_1$ seront respectivement de la forme

$$\Sigma^2 q_{ij} X_i X_j = 0, \qquad \text{et} \qquad \Sigma r_i X_i^2 = 0.$$

T et $T_1$ étant concentriques et homothétiques, l'équation $\Sigma p_i X_i^2 = 0$ est une combinaison linéaire des deux précédentes, de sorte que l'on a

$$r_i = \rho p_i^2, \qquad q_{ij} = \sigma p_i p_j,$$

$\rho$ et $\sigma$ étant des facteurs d'homogénéité. T et $T_1$ sont donc déterminées.

Rapportons T et $T_1$ à leurs axes $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$ leurs équations dans P sont de la forme

$$\sum \frac{x_i^2}{\alpha_i^2} - 1 = 0, \qquad \sum \frac{x_i^2}{\alpha_i^2} + k = 0;$$

et puisqu'il existe une suite $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ inscrite à T et conjuguée à $T_1$, on a immédiatement la relation

$$n - \frac{1}{k} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad k = \frac{1}{n}.$$

Le rapport d'homothétie de T et $T_1$ a donc la valeur fixe $\sqrt{-n}$.

Soit $Oy$ la perpendiculaire à P menée par O, de sorte que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y$ définissent un système de coordonnées rectangulaires dans E. Soient $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, y'$ les coordonnées de $\omega$, centre de la quadrique Q indiquée plus haut.

L'équation de $Q_1$ est manifestement

$$\sum \frac{(x_i y' - y x'_i)^2}{\alpha_i^2} + \frac{(y - y')^2}{n} = 0,$$

puisque sa trace sur P est $T_1$. On en déduit l'équation de Q en ajoutant un terme constant déterminé de façon que Q contienne T, et l'on trouve ainsi

$$\sum \frac{(x_i y' - y x'_i)^2}{\alpha_i^2} + \frac{(y - y')^2}{n} - \frac{n+1}{n} y'^2 = 0.$$

Soient $R_1, R_2, \ldots, R_{n+1}$ les traces des $n+1$ axes principaux de Q et $Q_1$ sur P. La suite des $R_i$ est manifestement conjuguée par rapport à $T_1$, et aussi par rapport à la trace $C_1$ du cône isotrope de sommet $\omega$ sur P.

L'équation de $C_1$ dans P est donc

$$\Sigma (x_i - x'_i)^2 + y'^2 = 0;$$

c'est une sphère à $n$ dimensions de l'espace P, ayant pour centre le point O' de coordonnées

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, et pour rayon $y'\sqrt{-1}$. Le point O′ est la projection de $\omega$ sur P, et la suite des $R_i$ l'admet comme orthocentre puisqu'elle est conjuguée par rapport à $C_1$.

Les $R_i$ sont les sommets de la suite conjuguée commune à $C_1$ et $T_1$. On a donc pour les déterminer les équations

$$t = \frac{\alpha_i^2(x_i - x'_i)}{x_i} = n\left[y'^2 - \Sigma x'_i(x_i - x'_i)\right],$$

$t$ étant un paramètre auxiliaire.

Si l'on fait abstraction du dernier membre de ces équations, on voit que l'on définit une série H unicursale, simplement infinie, de degré $n$, que pour des raisons évidentes nous pouvons qualifier de série d'Apollonius relative à O′ et à T, sans qu'il soit nécessaire d'insister sur sa définition géométrique.

Les quadriques de l'espace P qui contiennent la suite $R_i$ ont pour équation générale

$$\sum \lambda_{ij}\left[(\alpha_i^2 - \alpha_j^2)x_i x_j + \alpha_j^2 x'_j x_i - \alpha_i^2 x'_i x_j\right] + \sum \mu_i\left[x'_i - y'^2 + \Sigma x'_j(x_j - x'_j)\right] + \frac{1}{n}\alpha_i^2(x_i - x'_i)\Big] = 0,$$

les $\lambda_{ij}, \alpha, \mu_i$ étant des arbitraires.

On obtiendra une sphère à $n$ dimensions, $C_2$, en prenant

$$\mu_i = \frac{1}{x'_i}, \qquad \lambda_{ij}(\alpha_i^2 - \alpha_j^2) + \frac{x'_j}{x'_i} + \frac{x'_i}{x'_j} = 0.$$

Les puissances de $C_2$ par rapport à O et O′ se lisent alors immédiatement ; elles sont $-\frac{1}{n}\sum \alpha_i^2$ et $-ny'^2$. C'est ce que montre aussi le théorème de Faure, puisque $C_2$ est la sphère circonscrite à la suite des $R_i$, conjuguée par rapport à $T_1$ et $C_1$, de centres O et O′.

On peut obtenir les $n+1$ points $R_i$ par l'intersection de la série H et de la sphère $C_2$ ; mais ces deux ensembles ont $2n$ points communs, et par suite, $n-1$ points $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$, en outre des points $R_i$. Pour déterminer les $S_i$, remarquons qu'en vertu des équations de H, les coefficients des $\lambda_{ij}$ dans l'équation de $C_2$ disparaissent ; puis dans les coefficients des $\mu_i$, remplaçons les derniers termes $\alpha_i^2(x_i - x'_i)$ par $tx_i$ : on obtient ainsi l'équation

$$\left[\frac{t}{n} - y'^2 + \Sigma x'_j(x_j - x'_j)\right] \times \sum \frac{x_i}{x'_i} = 0.$$

Le premier facteur s'annule pour les points $R_i$, d'après les équations qui les définissent ; donc pour les points $S_i$ on a

$$\sum \frac{x_i}{x'_i} = 0.$$

On définit ainsi un espace linéaire à $n-1$ dimensions de l'espace P, qui a manifestement en commun avec H l'origine O et les $n-1$ points $S_i$.

La sphère $C_2$ peut être considérée comme définie par les $n-1$ points $S_i$ et ses puissances par rapport à O et O′.

D'après les équations de H, on peut encore dire que les points S vérifient la condition

$$\sum \frac{\alpha_i^2(x_i - x'_i)}{x'_i} = 0,$$

qui définit un nouvel espace linéaire à $n-1$ dimensions de P, ayant en commun avec H le point O′ et les $S_i$. Ce serait d'ailleurs évident géométriquement, d'après les propriétés de H.

L'élément linéaire à $n-2$ dimensions qui contient les $n-1$ points $S_i$ a par suite pour coordonnées les déterminants tirés de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{1}{x'_1} & \frac{1}{x'_2} & \cdots & \frac{1}{x'_n} & 0 \\ \frac{\alpha_1^2}{x'_1} & \frac{\alpha_2^2}{x'_2} & \cdots & \frac{\alpha_n^2}{x'_n} & -\Sigma\alpha_i^2 \end{matrix} \right\|;$$

et par suite des formes $\frac{\alpha_i^2 - \alpha_j^2}{x_i x_j}$ et $\frac{\Sigma \alpha_i}{x_i}$, au signe près.

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Concours de 1902).

### Mathématiques.

**1119.** — *On donne, relativement à un système de trois axes rectangulaires Oxyz, un point* P, *de coordonnées, a, b, c, et un cercle* C *défini par les équations*

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0, \qquad z = 0.$$

1° *Former l'équation du lieu des projections orthogonales du point* P *sur les droites qui rencontrent à la fois le cercle* C *et l'axe* Oz. *Reconnaître que ce lieu se compose d'une sphère et d'une surface du quatrième degré* [S].

2° *Trouver les sections de la surface* S *par les plans contenant* Oz, *et le lieu des centres de ces sections.*

3° *Déterminer les limites entre lesquelles sont compris les plans parallèles à xOy qui coupent la surface* S *en des points réels. Trouver les sections de cette surface par le plan xOy et et par le plan, parallèle à ce dernier, qui contient le point* P.

N. B. — *Il sera tenu compte aux candidats des explications géométriques qu'ils pourront fournir des résultats trouvés par le calcul.*

1. Les équations générales des droites qui s'appuient sur Oz sont

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z - \lambda}{\gamma};$$

l'une d'elles coupe le plan des $xy$ au point dont les coordonnées sont

$$\frac{-\alpha\lambda}{\gamma}, \qquad \frac{-\beta\lambda}{\gamma}, \qquad 0,$$

et nous aurons exprimé que c'est l'une des droites indiquées en écrivant que ce point est sur le cercle donné ; ce calcul donne la condition

$$(\alpha^2 - \beta^2)\lambda^2 + 2R\alpha\gamma\lambda = 0,$$

qui se dédouble en deux autres

$$\lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad (\alpha^2 - \beta^2)\lambda - 2R\alpha\gamma = 0.$$

La première exprime que la droite passe à l'origine ; cette solution était évidente *a priori*. La seconde est la véritable condition.

Or, le plan mené par le point P perpendiculairement à la droite variable que nous venons de considérer a pour équation

$$\alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c) = 0;$$

si l'on considère d'abord la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ qui passe à l'origine, le lieu demandé s'obtient en remplaçant dans l'équation du plan, $\alpha, \beta, \gamma$ par des quantités proportionnelles $x, y, z$ ; on trouve ainsi la sphère

$$x(x - a) + y(y - b) + z(z - c) = 0,$$

décrite sur OP comme diamètre.

Si l'on envisage maintenant l'autre condition et que l'on remplace dans l'équation du plan et dans cette condition $\alpha, \beta, \gamma$ par les quantités proportionnelles $x, y, z - \lambda$, on obtient les deux équations

$$x(x - a) + y(y - b) + (z - c)(z - \lambda) = 0,$$
$$(x^2 + y^2)\lambda + 2Rx(z - \lambda) = 0,$$

entre lesquelles il faut éliminer $\lambda$ ; or la première donne

$$\lambda - z = \frac{x(x-a) + y(y-b)}{z-c},$$

puis

$$\lambda = \frac{x(x-a) + y(y-b) + z(z-c)}{z-c},$$

et, en portant dans la seconde, nous obtenons

$$S = [x(x-a) + y(y-b)](x^2 + y^2 - 2Rx) + z(z-c)(x^2 + y^2) = 0;$$

c'est la surface du quatrième degré indiquée dans l'énoncé. Cette surface passe au point P qu'elle admet comme point simple ; elle passe aussi par le cercle donné et par $Oz$ qu'elle admet pour ligne double. Nous allons rencontrer bientôt d'autres sections remarquables de cette surface. Enfin, elle admet pour directions asymptotiques $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ ; elle contient donc le cercle imaginaire de l'infini et deux droites situées à l'infini dans les plans isotropes $x^2 + y^2 = 0$.

**2.** Coupons-la par un plan quelconque passant par $Oz$, $y - \lambda x = 0$ ; pour cela, écrivons d'abord ainsi l'équation de S :

$$(x^2 + y^2)[x(x-a) + y(y-b) + z(z-c)] - 2Rx[x(x-a) + y(y-b)] = 0,$$

et remplaçons $y$ par $\lambda x$ seulement dans la première parenthèse et dans la dernière ; nous trouverons d'abord $x^2$ en facteur, ce qui correspond à la droite double $Oz$, puis la sphère

$$(1 + \lambda^2)[x(x-a) + y(y-b) + z(z-c)] - 2Rx[x - a + \lambda(y-b)] = 0,$$

qui, avec l'équation $y - \lambda x = 0$, définit l'autre partie de la section plane ; cette autre partie est donc un cercle.

Le centre de ce cercle est sur la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan $y - \lambda x = 0$, et les équations de cette droite sont

$$(1 + \lambda^2)(2x - a) - 2R + \lambda(1 + \lambda^2)(2y - b) - 2R\lambda^2 = 0,$$
$$2z - c = 0.$$

La seconde montre que le lieu du centre est dans le plan $z = \frac{c}{2}$, équidistant du point P et du plan des $xy$ Une autre équation du lieu s'obtient en éliminant $\lambda$ entre la première et $y - \lambda x = 0$, c'est-à-dire en remplaçant $\lambda$ par $\frac{y}{x}$ dans la première équation ; on trouve ainsi $x^2 + y^2 = 0$ et

$$x(2x - a) + y(2y - b) - 2Rx = 0.$$

Le vrai lieu du centre est donc un cercle situé dans le plan $z = \frac{c}{2}$ ; quant au facteur $x^2 + y^2 = 0$, il provient de ce que chacun des plans $y = \pm ix$ coupe la surface suivant deux droites confondues à l'infini et que, par suite, le centre de cette section est totalement indéterminé.

**3.** Tout plan parallèle au plan des $xy$ coupe la surface suivant une quartique bicirculaire ayant un point double sur $Oz$ ; il s'agit de trouver entre quelles limites cette courbe est réelle. Pour cela, supposons que $z$ soit constant et considérons la projection de la section sur le plan des $xy$,

$$[x(x-a) + y(y-b)](x^2 + y^2 - 2Rx) + (z^2 - cz)(x^2 + y^2) = 0;$$

nous écrirons que cette courbe est entièrement imaginaire en la coupant par la droite $y = tx$ et en écrivant que l'équation aux abscisses des points de rencontre a toujours ses racines imaginaires ; cette équation est

$$(1 + t^2)^2 x^2 - (1 + t^2)(a + bt + 2R)x + 2R(a + bt) + (z^2 - cz)(1 + t^2) = 0,$$

et la quantité sous le radical,

$$(a + bt - 2R)^2 - 4(z^2 - cz)(1 + t^2),$$

ou

$$(a + bt - 2R)^2 + c^2(1 + t^2) - (2z - c)^2(1 + t^2).$$

Il s'agit de déterminer $z$ de façon que cette quantité soit toujours négative ; il suffit évidemment

pour cela de prendre $z$ tel que $(2z - c)^2$ soit supérieur au maximum de $\frac{(a + bt - 2R)^2}{1 + t^2} + c^2$; or ce maximum s'obtient sans peine en posant

$$\frac{(a + bt - 2R)^2}{1 + t^2} + c^2 = \mu,$$

et déterminant $\mu$ de façon que les racines de cette équation en $t$ soient réelles; cette équation, développée, s'écrit

$$(b^2 + c^2 - \mu)t^2 + 2b(a - 2R)t + (a - 2R)^2 + c^2 - \mu = 0,$$

et la condition de réalité est

$$b^2(a - 2R)^2 - (b^2 + c^2 - \mu)[(a - 2R)^2 + c^2 - \mu] > 0,$$

ou

$$\mu^2 - [b^2 + 2c^2 + (a - 2R)^2]\mu + c^2 b^2 + c^2 + (a - 2R)^2 > 0.$$

Les deux racines de cette équation sont

$$\frac{b^2 + 2c^2 + (a - 2R)^2 \pm [b^2 + (a - 2R)^2]}{2},$$

la plus grande est

$$b^2 + c^2 + (a - 2R)^2,$$

et, comme $\mu$ doit être compris entre les deux racines, le maximum de $\mu$ est justement ce nombre. Dès lors, il suffit d'écrire que $(2z - c)^2$ est plus grand que ce nombre, c'est-à-dire que $z$ est extérieur à l'intervalle limité par les deux nombres.

$$\frac{c}{2} - \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + (a - 2R)^2}}{2}, \qquad \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + (a - 2R)^2}}{2}.$$

Donc, pour toutes les valeurs de $z$ appartenant à cet intervalle, la section faite par le plan correspondant et mené parallèlement au plan des $xy$ est réelle.

Si l'on se reporte à l'équation de la surface S, on voit de suite que les sections faites dans cette surface par les deux plans $z = 0$ et $z = c$ sont identiques et que chacune d'elles se compose de deux cercles, le cercle donné

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0,$$

ou ce cercle transporté parallèlement à $Oz$ dans le plan $z = c$, et le cercle

$$x(x - a) + y(y - b) = 0,$$

décrit sur O'P comme diamètre dans le plan $z = c$, ou transporté parallèlement à $Oz$ dans le plan des $xy$. (Le point O' étant le point de rencontre de $Oz$ avec le plan $z = c$).

**Solution géométrique**. — Toutes les droites qui passent par le point O satisfont aux conditions exigées; le lieu des projections du point P sur ces droites est la sphère décrite sur OP comme diamètre.

Si l'on joint le point P à un point quelconque de $Oz$, M, et qu'on élève en M un plan perpendiculaire sur PM, ce plan coupe le cercle donné en deux points N et N', les deux droites MN, MN' sont acceptables et le point M est fourni par chacune d'elles, c'est-à-dire deux fois; donc $Oz$ est une ligne double de la surface. On verrait de même que le cercle (C) en est une ligne simple.

Tout plan passant par $Oz$ rencontre le cercle (C) en O et en un point $\mu$ et toutes les droites de ce plan qui s'appuient sur $Oz$ et sur le cercle forment le faisceau linéaire ayant pour sommet le point $\mu$; si on appelle P' le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur ce plan, les perpendiculaires abaissées de ce point sur les droites du plan qui passent en $\mu$ donnent les projections du point P sur ces mêmes droites; le lieu correspondant est donc le cercle décrit sur P'$\mu$ comme diamètre. Par conséquent tout plan passant par $Oz$ coupe la surface suivant deux droites confondues avec $Oz$ et un cercle; la surface S est donc du quatrième ordre et ses sections par les plans qui tournent autour de $Oz$ sont des cercles.

Quant au lieu du point P', c'est évidemment un cercle (C') du plan $z = c$, décrit sur O'P comme diamètre, O' étant le point de rencontre de $Oz$ avec le plan $z = c$; ce cercle est sur la surface. Si l'on considère maintenant le cylindre de révolution ayant pour base le cercle (C), il coupe le plan $z = c$ suivant un cercle égal et ce cercle est aussi situé tout entier sur la surface; avec le précédent, il constitue la section de la surface S par le plan $z = c$. Dans le plan des $xy$, il y a déjà le cercle (C) qui appartient à la surface, il y a aussi le cercle ayant pour diamètre OP'', P'' étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur le plan des $xy$; ces deux cercles, égaux aux précédents, constituent la section de la surface S par le plan des $xy$.

Revenons maintenant au cercle situé dans un plan passant par $Oz$, dans le plan $OzP'\mu$; ce cercle a pour centre le milieu de $P'\mu$; or la droite $P'\mu$ engendre l'hyperboloïde défini par les deux cercles (C), (C') et par $Oz$, donc le lieu du milieu de $P'\mu$ est la section de cet hyperboloïde par le plan $z = \frac{c}{2}$; c'est un cercle aussi.

Toutes ces considérations nous donnent une idée très nette de la façon dont la surface est engendrée par un cercle situé dans un plan qui tourne autour de $Oz$. Ce cercle a toujours pour diamètre $P'\mu$, et nous aurons les plans limites en cherchant le maximum de $P'\mu$ et en ajoutant, puis retranchant à $\frac{c}{2}$ la moitié de ce maximum. Cela donne lieu à un calcul très simple que nous ne ferons pas et qu'il nous suffit d'avoir indiqué

Nous avons reçu une solution de M. Barré, lieutenant à Arras, très détaillée, dans laquelle l'auteur étudie complètement la surface du quatrième degré; mais cette solution est trop longue pour que nous puissions la publier.

Bonnes solutions : MM. E. Berthelot, à Nantes; R. Javelot, lycée Saint-Louis; J. Franceschini, lycée de Marseille; Sade; Dulimbert, à Grenoble.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1132.** — *Etant donnés un cercle* (C) *de centre* O *et un point* A, *fixes tous les deux, on joint un point variable* M *au pôle de* AM *par rapport à* (C); *on obtient ainsi une droite* $\Delta$.

1° *Trouver l'enveloppe de la droite* $\Delta$ *quand le point* M *décrit une droite* D; *c'est une conique* ($\Gamma$); *dans quel cas est-ce une parabole? Quand* D *se déplace de façon qu'il en soit ainsi, quel est le lieu du foyer?*

2° *On fait tourner* D *autour d'un point fixe; montrer que le lieu des centres des coniques* ($\Gamma$) *est une droite parallèle à* OA.

3° *On suppose que le centre du cercle* (C) *se déplace sur une parallèle à la droite fixe* D, *de façon que la polaire* P *du point* A *reste fixe; on demande le lieu des projections du point de rencontre de* D *et de* P *sur sa polaire par rapport à la conique variable* ($\Gamma$).

Prenons pour origine le point A, pour axe des $x$ la droite AO, et pour axe des $y$ une perpendiculaire à cette droite. En désignant par $a$ l'abscisse du point O et par R le rayon du cercle, l'équation de cette courbe est $(x-a)^2 + y^2 - R^2 = 0$.

1. Soit $u_0x + v_0y + w_0 = 0$ l'équation de la droite fixe D et $ux + vy + w = 0$ celle de l'une des droites $\Delta$. L'équation de la droite AM est

$$(wu_0 - uw_0)x + (wv_0 - vw_0)y = 0.$$

Pour que la droite $\Delta$ passe par le pôle de AM, il faut et il suffit que la droite joignant le point O au point $p$, intersection de $\Delta$ et de la polaire P du point A, soit perpendiculaire à AM.

L'équation de la droite P étant $ax - a^2 + R^2 = 0$, celle de $Op$ est de la forme

$$ux + vy + w + \lambda(ax - a^2 + R^2) = 0,$$

avec la condition

$$ua + w + \lambda R^2 = 0.$$

L'équation de $Op$ est donc

$$(ux + vy + w)R^2 - (ua + w)(ax - a^2 + R^2) = 0,$$

et pour que cette droite soit perpendiculaire à AM, il faut qu'on ait

$$(wu_0 - uw_0)[(R^2 - a^2)u - aw] + (wv_0 - vw_0)R^2v = 0$$

ou

$$(\Gamma) \qquad (a^2 - R^2)w_0u^2 - R^2w_0v^2 + uw[(R^2 - a^2)u_0 + aw_0] + R^2v_0vw - au_0w^2 = 0.$$

Telle est l'équation tangentielle de l'enveloppe de $\Delta$. On voit que cette enveloppe est une conique ($\Gamma$).

Pour que cette conique soit une parabole, il faut que $u_0$ soit nul, c'est-à-dire que la droite D soit parallèle à AO.

Supposons cette condition remplie, l'équation tangentielle de la parabole s'écrit

$$a^2 - R^2 w_0 u^2 - R^2 w_0 v^2 + a w_0 u w - R^2 v_0 v w = 0.$$

Le foyer de cette conique est le même que celui de la conique homofocale

$$a^2 w_0 u^2 - a w_0 u w - R^2 v_0 v w = 0.$$

Soient $x$, $y$ les coordonnées de ce foyer. L'équation aux coefficients angulaires des tangentes menées par ce point à la courbe est

$$a^2 w_0 m^2 - a w_0 m(y - mx) - R^2 v_0 (y - mx) = 0;$$

écrivons que cette équation a pour racines $\pm i$, nous avons

$$a^2 w_0 - a w_0 x + R^2 v_0 y = 0,$$
$$a y w_0 + R^2 x v_0 = 0.$$

et en éliminant $v_0$ et $w_0$ entre ces deux équations nous avons

$$x^2 + y^2 - ax = 0,$$

qui est l'équation du lieu demandé. Elle représente le cercle décrit sur AO comme diamètre.

**2.** Soient $(x_0, y_0)$ les coordonnées du point fixe par lequel passe la droite D, nous avons

$$(1) \qquad u_0 x_0 + v_0 y_0 + w_0 = 0.$$

L'équation tangentielle du centre de (Γ) est

$$u[(R^2 - a^2) u_0 + a w_0] + R^2 v_0 v - 2a u_0 w = 0,$$

et par suite les coordonnées $x$, $y$ de ce point vérifient les équations

$$(R^2 - a^2) u_0 + a w_0 + 2a u_0 x = 0,$$
$$R^2 v_0 + 2a u_0 y = 0.$$

Eliminons $u_0$, $v_0$, $w_0$ entre ces deux équations et l'équation (1), nous obtenons l'équation du lieu qui est

$$\begin{vmatrix} R^2 - a^2 + 2ax & 0 & a \\ 2ay & R^2 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$2a(R^2 x + a y_0 y) - R^2 R^2 - a^2 - a x_0) = 0.$$

Le lieu est une droite.

**3.** La polaire P du point A par rapport au cercle (C) étant fixe, le lieu du centre de ce cercle est l'axe des $x$, par suite la droite D devant être parallèle à O$x$, son équation est de la forme $y - \beta = 0$. Soit $x - \alpha = 0$ l'équation de la droite P ; $a$ et R sont liés par la relation

$$\alpha = \frac{a^2 - R^2}{a} \qquad \text{ou} \qquad R^2 = a(a - \alpha).$$

En conservant $a$ comme paramètre variable, l'équation tangentielle de la conique (Γ) s'écrit

$$-\alpha\beta u^2 - (a - \alpha)\beta v^2 - \beta u w + (a - \alpha) v w = 0.$$

Le point S, intersection des droites P et D, a pour coordonnées $\alpha$ et $\beta$ ; soient $x_1$ et $y_1$ les coordonnées de sa projection sur sa polaire par rapport à (Γ). L'équation de cette polaire est alors

$$(x - x_1)(\alpha - x_1) + (y - y_1)(\beta - y_1) = 0,$$

elle a pour coordonnées tangentielles

$$u_1 = \alpha - x_1, \qquad v_1 = \beta - y_1, \qquad w_1 = x_1^2 + y_1^2 - \alpha x_1 - \beta y_1.$$

Par suite, l'équation tangentielle de son pôle est

$$u_1 - 2\alpha\beta u_1 - \beta w_1 + v_1 2(a - \alpha)\beta v_1 + (a - \alpha) w_1 + w_1 - \beta u_1 + (a - \alpha) v_1 = 0.$$

Ecrivons que ce point a pour coordonnées ponctuelles $\alpha$ et $\beta$, nous avons

$$\alpha - 2\alpha\beta u_1 - \beta w_1 + \beta u_1 - (a - \alpha) v_1 = 0.$$
$$\beta - 2(a - \alpha)\beta v_1 + (a - \alpha) w_1 + \beta u_1 - (a - \alpha) v_1 = 0.$$

ou, en remplaçant $u_1$ et $v_1$ par leurs valeurs $\alpha - x_1$ et $\beta - y_1$,

$$a\alpha(\beta - y_1) + \alpha(\alpha y_1 - \beta x_1) - \beta w_1 = 0,$$
$$-a^2 w_1 + \beta(\beta - y_1) + \beta(\beta x_1 - \alpha y_1) + \alpha w_1 = 0.$$

Eliminons $a$ entre ces deux équations, nous obtenons

$$w_1^2 w_1 - \alpha x_1 - \beta y_1 + \alpha^2 + \beta^2 = 0,$$

ou en remplaçant $w_1$ par sa valeur $x_1^2 + y_1^2 - \alpha x_1 - \beta y_1$

$$(x_1^2 + y_1^2 - \alpha x_1 - \beta y_1)^2 - (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2] = 0.$$

On voit ainsi que le lieu cherché est le cercle de diamètre AS.

J. HAAG, lycée de Nancy.

Bonnes solutions par MM. Bouvaist et Laurence.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1172.** — Etant donnés deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$ et deux points A et B dont les coordonnées sont $a$, 0 et 0, $b$, on considère les coniques S inscrites dans le triangle ABO et qui détachent sur la droite $x = -a$ un segment vu d'un point P $(x_0, y_0)$ donné sous un angle droit.

1° Trouver le lieu des centres des coniques S. Ce lieu est une conique S′ dont on discutera la nature suivant les différentes positions de P.

2° Pour que la conique S′ passe par un point donné M, il faut que P soit sur un certain cercle Γ. Montrer que lorsque P se déplace sur ce cercle, S′ passe par trois autres points fixes I, J, K. Le point M variant d'une manière quelconque, les droites IJ, IK, JK pivotent autour de points fixes.

3° Trouver et construire la courbe, lieu du point M, tels que le cercle Γ ait un rayon donné R.

Vasnier.

**1173.** — Le lieu des foyers des sections faites par un plan donné (P) dans les cônes de révolution (C) circonscrits à une quadrique donnée (S) se compose de trois coniques qui restent sur trois quadriques lorsque le plan P se déplace parallèlement à lui-même.

Vasnier.

**1174.** — Etant données deux quadriques homothétiques et concentriques, les cônes qui ont leurs sommets sur l'une et qui sont circonscrits à l'autre (les bases étant les coniques de contact), ont un volume constant.

Vasnier.

**1175.** — Une droite est normale à un faisceau de surfaces homofocales. Démontrer que les plans tangents menés par cette droite à l'une de ces surfaces forment un faisceau harmonique avec les plans tangents menés par la même droite à celle de ces surfaces qui lui est normale. Trouver le lieu des points de contact.

**1176.** — Par les extrémités d'une corde AB inscrite dans un cercle donné O et de longueur constante, on mène deux droites AM, BM, respectivement parallèles à deux droites fixes ; trouver le lieu du point M d'intersection de AM et BM.

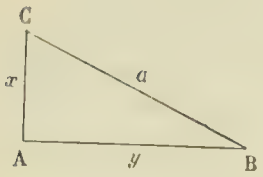
# DEUXIÈME PARTIE

## ALGÈBRE

**1142.** — *Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant son hypoténuse a et la somme des volumes engendrés par ce triangle tournant successivement autour de chacun des côtés de l'angle droit.* $\frac{1}{3}\pi h^3$.

Soient $x$ et $y$ les longueurs des deux côtés de l'angle droit ; nous avons d'abord

$$x^2 + y^2 = a^2.$$




D'autre part, le volume engendré par le triangle en tournant autour de AB a pour expression $\frac{\pi}{3}x^2y$ ; de même celui du cône engendré par la révolution du triangle autour de AC a pour expression $\frac{\pi}{3}y^2x$. Nous avons donc

$$\frac{\pi}{3}(x^2y + y^2x) = \frac{\pi}{3}b^3,$$

ou

$$xy(x+y) = b^3.$$

Il s'agit de résoudre par rapport à $x$ et $y$ les deux équations obtenues. A cet effet, posons

$$x + y = u, \qquad xy = v,$$

les deux équations précédentes s'écriront

$$u^2 - 2v = a^2, \qquad uv = b^3;$$

la seconde donne $v = \frac{b^3}{u}$, et la première devient alors

$$(1) \qquad u^3 - a^2u - 2b^3 = 0.$$

Elle n'admet qu'une racine positive. Voyons si cette racine est acceptable : il faut pour cela que les deux valeurs de $x$ et de $y$, qui sont fournies par l'équation

$$X^2 - uX + v = 0,$$

soient réelles et positives ; or en prenant $u$ positif, $v$ sera positif aussi, donc la condition de réalité sera suffisante. Elle donne

$$u^2 - 4v > 0,$$

et, comme $u^2 - 2v = a^2$,

$$a^2 - 2v > 0 \qquad \text{ou} \qquad v < \frac{a^2}{2};$$

mais $v = \frac{b^3}{u}$, cette inégalité devient donc $\frac{b^3}{u} < \frac{a^2}{2}$, ou finalement $u > \frac{2b^3}{a^2}$.

Rappelons maintenant que pour $u = 0$ le premier membre de l'équation (1) est négatif ; donc pour que le nombre $\frac{2b^3}{a^2}$ soit au-dessous de l'unique racine positive de cette équation, il faut et il suffit que le résultat obtenu en remplaçant $u$ par ce nombre soit négatif. Ce résultat est $\frac{8b^9}{a^6} - 4b^3$ ; la condition de possibilité est $a^6 > 2b^6$, ou $a > b\sqrt[6]{2}$.

Si elle est remplie, l'équation (1) admet une racine positive acceptable et l'on peut avoir cette racine avec autant d'approximation que l'on veut ; cela fait, les valeurs de $x$ et de $y$ sont fournies par une équation du second degré. Si elle n'est pas remplie, le problème n'a pas de solution.

Dans le cas limite, où l'on a $a = b\sqrt[6]{2}$, on a aussi $u = \frac{2b^3}{a^2}$, $v = \frac{a^2}{2}$, l'équation du second degré qui fournit $x$ et $y$, a une racine double, et le triangle est isocèle.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1127.** — *Une droite* $\Delta$ *coupe une hyperbole en* M *et* M' *et les asymptotes* OS *et* OS' *de cette hyperbole en* N *et* N'.

*La parallèle menée par* N *à la tangente en* M *et la parallèle menée par* M′ *à l'asymptote* OS′ *se coupent en un point du diamètre conjugué de* Δ.

Prenons pour axe des $x$ le diamètre conjugué de Δ par rapport à l'hyperbole et pour axe des $y$ une parallèle à Δ. L'équation de cette droite est de la forme $x - d = 0$, et comme l'hyperbole est rapportée à deux diamètres conjugués, son équation peut s'écrire $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Les points M et M′ ont pour coordonnées

$$x = d, \qquad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{d^2 - a^2}\ ;$$

celles des points N et N′ sont

$$x = d, \qquad y = \pm \frac{bd}{a}.$$

La parallèle menée par le point N à la tangente en M a pour équation

$$y - \frac{bd}{a} - \frac{b}{a}\frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}}(x - d) = 0,$$

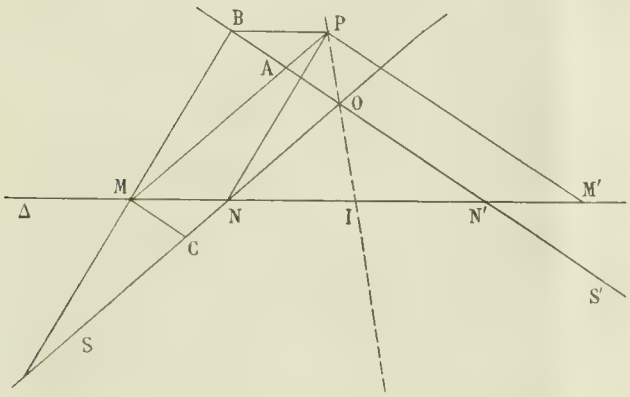
et la parallèle menée par le point M′ à l'asymptote OS′ est représentée par l'équation

$$y + \frac{b}{a}\sqrt{d^2 - a^2} + \frac{b}{a}(x - d) = 0.$$

Ces deux droites coupent l'axe des $x$ au même point, $x = d - \sqrt{d^2 - a^2}$, $y = 0$.

R. BOUVAIST.

**Solution géométrique.** — Menons par le point M une parallèle à OS qui rencontre OS′ au point A; soit B le symétrique du point O par rapport au point A. La tangente au point M est la droite MB d'après une propriété connue. Soit P le point de rencontre de la parallèle à MB menée par N et de la parallèle à OS′ menée par M′. Il s'agit de démontrer que le point P est situé sur le diamètre conjugué de Δ.




Les deux triangles MBN′, NPM′ sont égaux, car ils ont leurs côtés parallèles et les côtés MN′ et NM′ sont égaux; donc MB est égal à NP et la figure MNBP est un parallélogramme. Menons MC parallèle à OA, les deux triangles ABP et MNC sont égaux comme ayant un angle égal $(\widehat{ABP} = \widehat{CMN})$ compris entre côtés égaux. On en conclut $\widehat{BAP} = \widehat{MCN} = \widehat{MAS'}$; par suite MA passe par le point P, et MP est parallèle à OS. Il en résulte aussitôt que le point P est sur la droite OI.

J. HAAG, lycée de Nancy.

Bonnes solutions par MM. Laurence Lemoyne; Sade, lycée de Marseille; J. Marchal; L. Odou.

---

**1141.** — *On considère deux axes de coordonnées rectangulaires* $Ox$, $Oy$ *et un cercle tangent à* $Ox$ *en* O, *de rayon* R, *qui rencontre à nouveau l'axe* $Oy$ *en un point* A.

1° *Former l'équation générale des coniques osculatrices au cercle en* O *et le rencontrant en outre au point* A. *Trouver le lieu du point de contact avec cette conique variable de la tangente commune au cercle et à la conique, autre que* $Ox$.

2° *Trouver les paraboles du faisceau et le lieu de leurs foyers, quand* R *varie.*

3° *Trouver le lieu des pieds des normales abaissées du point* A *sur ces coniques et construire ce lieu.*

**1.** Soit
$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0$$
l'équation du cercle donné. L'une des coniques qui rencontre celle-ci en trois points confondus avec le point O et au point A, se compose des deux axes et a pour équation $xy = 0$ ; l'équation générale des coniques osculatrices au cercle à l'origine et passant en outre au point A est donc
$$x^2 + y^2 + 2\lambda xy - 2Ry = 0.$$

Soit $(x, y)$ le point de contact avec la conique $(\lambda)$ de la tangente commune à cette conique et au cercle ; l'équation de cette tangente est
$$X(x + \lambda y) + Y(\lambda x + y - R) - Ry = 0,$$
et, en exprimant qu'elle est tangente au cercle, nous aurons la relation
$$(x + \lambda y)^2 + 2y(\lambda x + y - R) - y^2 = 0.$$
D'autre part le point $(x, y)$ vérifie l'équation de la conique $(\lambda)$ ; nous aurons donc le lieu de ce point en éliminant $\lambda$ entre les deux équations ; mais, en tenant compte de la première, la seconde devient
$$\lambda^2 y^2 + 2\lambda xy = 0.$$
Celle-ci se décompose en trois : $y = 0$ qui représente l'axe des $x$ ; $\lambda = 0$ qui conduit à $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$ ; et enfin $\lambda = -\dfrac{2x}{y}$, qui conduit au vrai lieu
$$y^2 - 3x^2 - 2Ry = 0.$$

L'axe des $x$ correspond à la conique impropre formée par les deux axes ; en tout point de $Ox$, $Ox$ lui-même est tangente commune à la conique impropre et au cercle ; tous les points de $Ox$ conviennent donc. Le second lieu est le cercle lui-même : il correspond à la conique du faisceau qui est confondue avec ce cercle et qu'on obtient pour $\lambda = 0$. Quant à l'hyperbole, c'est le véritable lieu.

**2.** Pour que la conique du faisceau représente une parabole, il faut que $\lambda = \pm 1$ ; il y a donc deux paraboles dans le faisceau, les courbes représentées par les équations
$$(x + y)^2 - 2Ry = 0,$$
et
$$(x - y)^2 - 2Ry = 0.$$

Pour trouver le lieu du foyer de la première, quand R varie, nous nous appuierons sur l'identité
$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2) ;$$
cette identité permet de transformer l'équation de la parabole en
$$2(x^2 + y^2) - 2Ry - (x - y)^2 = 0 ;$$
elle met en évidence un cercle doublement tangent à cette parabole. Nous les aurons tous en introduisant $\lambda$ sous la parenthèse et modifiant l'équation de la façon suivante :
$$2(x^2 + y^2) - 2Ry + 2\lambda(x - y) + \lambda^2 - (x - y + \lambda)^2 = 0.$$

L'équation générale des cercles doublement tangents à la parabole est
$$2(x^2 + y^2) - 2Ry + 2\lambda(x - y) + \lambda^2 = 0 ;$$
le centre de l'un de ces cercles a pour coordonnées $x = -\dfrac{\lambda}{2}$, $y = \dfrac{\lambda + R}{2}$, et, en exprimant que le rayon est nul, nous avons
$$\frac{\lambda^2}{4} + \frac{(\lambda + R)^2}{4} - \frac{\lambda^2}{2} = 0,$$
ou
$$x^2 + y^2 - \frac{\lambda^2}{2} = 0.$$

Le lieu des foyers est donc
$$x^2 + y^2 - 2x^2 = 0$$
ou
$$y^2 - x^2 = 0.$$

Ce lieu se décompose en deux : $y - x = 0$, qui est le véritable lieu, et $y + x = 0$, qui correspond à la parabole impropre $(x + y)^2 = 0$ qu'on obtient pour $R = 0$.

S'il s'agit de la seconde parabole, le lieu total est encore $x^2 - y^2 = 0$. Ici $x - y = 0$ est un lieu exceptionnel et $x + y = 0$, le véritable lieu.

3. L'équation de la normale à une courbe $f(x, y) = 0$ en un point $(x, y)$ est

$$\frac{X - x}{f'_x} = \frac{Y - y}{f'_y};$$

dans le cas actuel cette équation est

$$\frac{X - x}{x + \lambda y} = \frac{Y - y}{\lambda x + y - R};$$

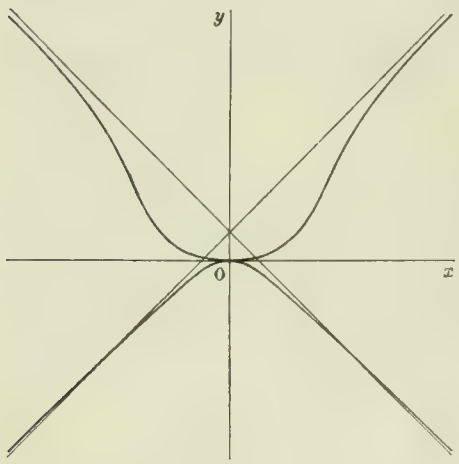
en exprimant que la normale passe au point A dont les coordonnées sont 0 et 2R, nous obtenons la nouvelle relation

$$x(\lambda x + y - R) + (2R - y)(x + \lambda y) = 0$$

et il n'y a plus qu'à éliminer $\lambda$ entre cette équation et celle de la conique. Ce calcul, qui s'effectue immédiatement puisque les deux équations sont linéaires en $\lambda$, nous conduit à l'équation

$$y^4 - x^4 - 4Ry^3 + 2Rx^2y + 4R^2y^2 = 0.$$

Reste à construire la courbe représentée par cette équation.




Nous pouvons remarquer déjà que l'équation ne change pas quand on change $x$ en $-x$; par conséquent la courbe est symétrique par rapport à $Oy$. Elle admet un point double à l'origine et les deux tangentes en ce point sont confondues avec l'axe des $x$. D'autre part, l'équation est bicarrée en $x$ et, ordonnée par rapport à $x$, elle s'écrit

$$x^4 - 2Rx^2y - y^2(y - 2R)^2 = 0;$$

elle donne toujours pour $x^2$ une valeur positive et une valeur négative; par suite, pour $x$, deux valeurs égales et de signes contraires.

Les directions asymptotiques réelles sont $x - y = 0$ et $x + y = 0$; les asymptotes correspondantes ont pour équation

$$y = \pm x + \frac{R}{2},$$

et nous avons à voir maintenant si ces droites rencontrent ou non la courbe proposée. Il suffit évidemment à cause de la symétrie, de faire le calcul pour la première droite ; or l'équation $x - y + \frac{R}{2} = 0$ nous donne $x = y - \frac{R}{2}$ et, en portant cette valeur dans l'équation de la courbe, nous obtenons

$$y^2 + 2Ry - \frac{R^2}{8} = 0,$$

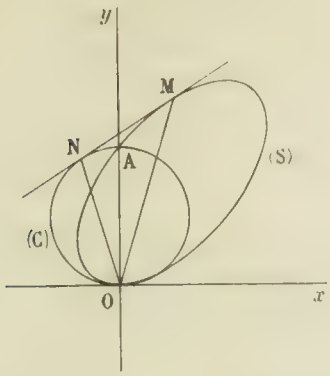
équation qui admet deux racines réelles et de signes contraires.

La courbe admet dès lors la forme ci-dessus.

J. FRANCESCHINI.

Bonnes solutions : MM. J. Haag ; M. Laurence, lycée de Bordeaux ; R. Bouvaist ; L. Odou.

**Solution géométrique.** — Les coniques forment évidemment un faisceau linéaire dont les coniques de base sont le cercle proposé et le couple des axes. Toutes ces coniques tracent sur une droite quelconque une involution dont les points doubles sont les points de contact avec la droite de deux coniques du faisceau. Si




nous considérons une tangente au cercle, NM, l'un des points doubles est le point de contact avec le cercle, N, l'autre, M, est le point de contact avec la conique du faisceau qui touche cette droite, le couple MN divise harmoniquement tous les couples de l'involution et, en particulier, le couple formé par les deux points de rencontre de MN avec les axes; les droites OM et ON sont donc conjuguées harmoniques par rapport aux axes $Ox$ et $Oy$, et, comme ceux-ci sont rectangulaires, ce sont les bissectrices de l'angle formé par OM et ON. Nous déduisons de là une construction très simple et très élégante du lieu cherché par points : on mène au cercle une tangente quelconque NM, on joint au point O le point de contact N et on prend le rayon symétrique de ON par rapport aux axes; ce rayon rencontre la tangente en un point M qui est un point du lieu.

Quand la tangente MN roule sur le cercle elle engendre un faisceau du second ordre qui est rapporté homographiquement au faisceau linéaire de rayons ayant pour sommet le point O; par conséquent le lieu du point M est une ligne du troisième ordre, évidemment symétrique par rapport à $Oy$; d'ailleurs, quand ON tend vers $Ox$, la tangente MN y tend aussi, les deux faisceaux ont donc un rayon commun, le rayon $Ox$; ce rayon fait partie du lieu et l'autre partie est une conique ayant $Oy$ pour axe. Cette conique passe aux points O et A, car il est évident que le point M vient une fois en chacun de ces points; ce sont les sommets situés sur l'axe $Oy$.

Le point M va à l'infini quand OM et NM sont parallèles; comme $\widehat{AOM} = \widehat{NOA}$, ceci arrive quand le triangle formé par ON, NM et l'un des axes est isocèle, c'est-à-dire quand l'arc ON est le double de l'arc NA : l'angle NOA vaut alors 30° et celui de la direction asymptotique OM avec $Ox$ est de 60°. Le lieu du point M est donc une hyperbole ayant pour axe transverse $Oy$, pour sommets O et A et ses asymptotes inclinées à 60° l'une sur l'autre.

Sur la droite de l'infini l'involution tracée par les coniques du faisceau renferme comme couple particulier le couple des points cycliques et le couple des points de rencontre avec les axes $Ox$ et $Oy$; donc les droites qui joignent l'origine aux points doubles sont les bissectrices de l'angle $xOy$; les deux paraboles du faisceau ont donc leurs axes parallèles aux bissectrices de l'angle des axes. La droite qui joint le point O au foyer de l'une d'elles fait avec l'axe des $x$ le même angle en sens contraire que celui que fait avec $Ox$ la direction de l'axe de la parabole; il en résulte que le lieu des foyers de la parabole du faisceau dont l'axe est parallèle à l'une des bissectrices de l'angle $xOy$ est l'autre bissectrice. Le lieu total des foyers se compose donc des deux bissectrices de l'angle des axes.

Quant au lieu des pieds des normales abaissées du point A sur toutes ces coniques, il peut s'apercevoir en considérant toutes les coniques d'un faisceau linéaire et menant les normales à ces coniques par un point quelconque A. Le lieu se présente ainsi comme étant fourni par les intersections des coniques d'un faisceau linéaire avec celles d'un autre faisceau linéaire homographique au premier; le second faisceau est formé par les hyperboles d'Apollonius du point A relatives aux coniques du premier. C'est donc un lieu du quatrième degré qui passe aux points de base des deux faisceaux. Les points à l'infini de ce lieu sont les points de contact des deux paraboles du faisceau avec la droite de l'infini; ce sont aussi les deux points cycliques, car par chacun d'eux il passe une conique du faisceau et la droite AI ou AJ est normale à cette conique.

Nous laisserons aux lecteurs de la première partie, qui peuvent seuls s'intéresser à cette solution, le soin d'appliquer ces résultats au cas actuel, et de voir ce qu'on peut dire alors de la courbe du quatrième degré ainsi obtenue.

R. BOUVAIST.

---

**1146.** — *Le lieu des centres des coniques normales à deux droites données en un point donné de chacune de ces droites est une droite.*

Les coniques normales à deux droites données D et D′ en des points donnés de chacune d'elles, A et B, sont tangentes à deux droites respectivement perpendiculaires à celles-ci en A et B. Soient OA et OB ces deux droites; prenons-les pour axe des $x$ et pour axe des $y$ et appelons $a$ l'abscisse du point A, $b$ l'ordonnée du point B; l'équation de la droite AB est $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ et celle de l'une des coniques indiquées,

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 + 2\lambda xy = 0.$$

Nous aurons le lieu du centre de cette conique, quand $\lambda$ varie, en éliminant ce paramètre entre les deux équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$,

ou $$\frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+\lambda y = 0, \qquad \frac{1}{b}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+\lambda x = 0:$$

nous trouvons ainsi $$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right) = 0.$$

Cette équation se décompose en deux $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ et $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$;

la première est le véritable lieu, c'est la droite qui joint l'origine au milieu de AB; la seconde est un lieu exceptionnel, c'est le lieu des centres de la conique impropre du faisceau qui correspond à $\lambda = 0$.

J.-G. NICOLESCO, à Bucarest.

Bonnes solutions : MM. Lemoyne, à Troyes; J.-B. Martin, à Saint-Étienne; P. Canet, lycée de Nancy; L. Odou.

**Solution géométrique.** — On sait que le diamètre conjugué de AB est la droite fixe qui joint le pôle de AB au milieu de AB. C'est le lieu des centres.

L. SADE.

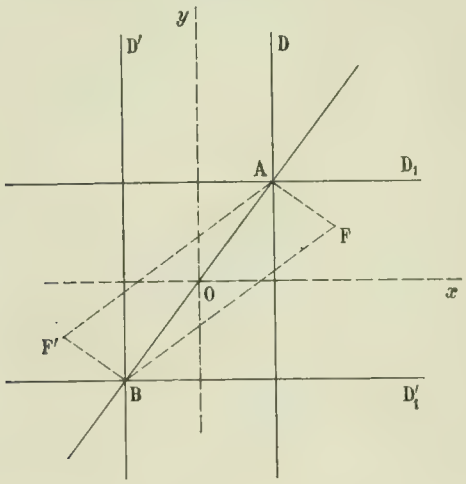
Solutions analogues : MM. Lemoyne, à Troyes; R. Bouvaist; P. Canet, lycée de Nancy; L. Odou.

---

**1147.** — *Le lieu des foyers des coniques normales à deux droites parallèles en un point donné de chacune de ces droites est une hyperbole équilatère.*

La conique étant normale à deux droites D et D′ en des points donnés A et B est tangente en ces mêmes points aux droites respectivement perpendiculaires $D_1$ et $D'_1$; or les deux droites D et D′ sont parallèles, donc les droites $D_1$ et $D'_1$ le sont aussi.

Prenons alors pour origine le milieu de AB, pour axe des $x$ une parallèle à $D_1$ et pour axe des $y$ une perpendiculaire, puis désignons par $a$ et $b$ les coordonnées du point A. Les équations de $D_1$ et de $D'_1$ sont $y-b=0$, $y+b=0$ et celle de OA est $bx-ay=0$; donc l'équation générale des coniques de l'énoncé est $\lambda(y^2-b^2)+\mu(bx-ay)^2=0$.




Nous aurons le lieu des foyers en identifiant cette équation avec l'équation focale

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(ux+vy+w)^2=0.$$

Eliminons $u, v, w, \lambda$ et $\mu$ entre les équations d'identification, qui sont

$$1-u^2=\mu b^2, \qquad \alpha+uw=0,$$
$$1-v^2=\lambda+\mu a^2, \qquad \beta+vw=0,$$
$$uv=\mu ab, \qquad \alpha^2+\beta^2-w^2=-\lambda b^2$$

la quatrième et la cinquième donnent $u=-\frac{\alpha}{w}$ $v=-\frac{\beta}{w}$, et, en portant ces valeurs dans la première et la troisième, celles-ci deviennent

$$1-\frac{\alpha^2}{w^2}=\mu b^2, \qquad \frac{\alpha\beta}{w^2}=\mu ab;$$

de là nous tirons linéairement $w^2$ et $\mu$,

$$w^2=\frac{\alpha(a\alpha+b\beta)}{a}, \qquad \mu=\frac{\beta}{b(a\alpha+b\beta)};$$

la sixième équation nous donne alors $\lambda$ et, en portant $v$, $\lambda$ et $\mu$ dans la seconde, nous avons l'équation du lieu; nous trouvons ainsi $$\lambda=\frac{\beta(b\alpha-a\beta)}{ab^2},$$

puis, toutes réductions faites, $\alpha\beta = ab.$

Le lieu est donc une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes $Ox$ et $Oy$ et passant aux points A et B.

Au cours des calculs, il a été supprimé les solutions $b\alpha - a\beta = 0$ et $a\alpha - b\beta = 0$ qui correspondent toutes deux à $\lambda = 0$ ou à $\mu = \infty$, c'est-à-dire à la conique impropre du faisceau $(bx - ay)^2 = 0$, pour laquelle le foyer est indéterminé.

Bonnes solutions : MM. J. G. Nicolesco, à Bucarest; T. Lemoyne, à Troyes. M. Laurence, lycée de Bordeaux ; J. B. Martin, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne ; R. Bouvaist ; P. Canet, lycée de Nancy ; L. Odou.

**Solution géométrique.** — Soient F et F' les deux foyers. Les quatre angles formés par AF, AF' avec $D_1$ et par BF, BF' avec $D'_1$ sont égaux ; donc les rayons AF et BF décrivent deux faisceaux homographiques égaux et opposés ; par conséquent le lieu du point F est une hyperbole équilatère ayant AB pour diamètre. Il est visible que ces droites AF et BF ne deviennent parallèles que lorsque l'une d'elles est parallèle ou perpendiculaire à $D_1$ ; donc les asymptotes sont $Ox$ et $Oy$. T. LEMOYNE, à Troyes.

Bonnes solutions : MM. M. Laurence, à Bordeaux; P. Canet, lycée de Nancy.

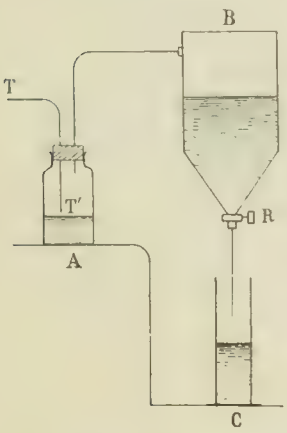
## CONCOURS DE 1902 (*Suite*).

### ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

*Physique et Chimie.*

I. — Vérification des lois de la pesanteur à l'aide de la machine d'Atwood.

**1177.** II. — Dans un flacon A, renfermant de l'eau distillée, on verse d'abord $25^{cmc}$ d'une solution d'iode renfermant $1^{gr},27$ de cet élément par litre, puis quelques gouttes d'empois d'amidon.




A l'aide d'un aspirateur à eau B, on fait ensuite passer, bulle à bulle, dans le flacon A le mélange gazeux provenant du grillage à l'air de pyrite de fer, jusqu'à ce que le liquide contenu dans le flacon A soit décoloré.

A ce moment, on ferme le robinet R et on mesure le volume de l'eau qui a coulé de l'aspirateur dans l'éprouvette C. Ce volume est égal à $250^{cmc}$.

On s'arrange d'ailleurs de telle sorte qu'au moment où l'expérience commence, de même qu'à celui où elle prend fin, le gaz arrive exactement à l'extrémité T' du tube TT' ; la distance de cette extrémité au niveau du liquide est suffisamment faible pour qu'on puisse, dans le calcul, négliger la différence de pression qui en résulte.

On a mesuré au moment de l'expérience :

La pression barométrique : $730^{mm}$. — La température : 15°.

On demande :

1° Quelle est, en volume, la proportion de gaz sulfureux contenu dans le mélange gazeux.

2° Quel poids de pyrite de fer il faut griller pour obtenir $10^{mc}$ de ce mélange gazeux, ce volume étant mesuré à la pression de $730^{mm}$ et à la température de 15°.

*Renseignements numériques :* Poids atomique du fer : 56. — Force élastique maxima de la vapeur d'eau à 15° : $12^{mm},7$. — On négligera la variation de densité de l'eau entre 4° et 15°. (*Durée : 3 h. 1/2.*)

*Mathématiques.*

**1178.** — 1° $x$ étant un nombre positif et $\lambda$ un nombre quelconque, énumérer très brièvement et sans démonstrations la série des définitions et conventions nécessaires pour donner une signification à l'expression

$$(C) \qquad y = \frac{x^\lambda}{\lambda}.$$

2° Représentation géométrique, $x$ et $y$ étant coordonnées. Allures de la courbe, suivant que $\lambda$ est $> 1$, compris entre 0 et 1, $< 0$. — Nous appellerons ces courbes les courbes (C).

3° Exprimer que la droite $y = ux + v$ est tangente à une des courbes (C).

4° Soient C et C' deux des courbes correspondant aux valeurs $\lambda$ et $\lambda'$ du paramètre.

Montrer qu'on peut leur mener une tangente commune si $\lambda$ et $\lambda'$ sont simultanément compris entre 0 et 1, ou simultanément en dehors de cet intervalle. Figurer, suivant les cas, les positions de cette tangente commune.

5° Si dans l'équation (C) on considère $x$ et $y$ comme données, $x$ étant toujours positif, l'équation (C) définit $\lambda$ comme fonction d'$x$ et d'$y$. $(x, y)$ étant un point du plan, montrer que du côté des $x$ positifs, $\lambda$ n'existe pas pour tout point, que suivant les cas $\lambda$ a 0, 1 ou 2 valeurs. Montrer que ces régions sont limitées par l'axe $x$, la droite $x = 1$ et une certaine courbe $\Gamma$ à laquelle toutes les courbes (C) sont tangentes.

(*Durée : 4 heures.*)

*Calcul trigonométrique.*

On connaît dans un triangle deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux :

$$a = 3645^{m},731, \qquad b = 8117^{m},540, \qquad B = 59° 35' 28'' 88.$$

On propose de calculer le côté $c$ et les angles A et C, ainsi que la surface du triangle, exprimée en hectares, ares et centiares.

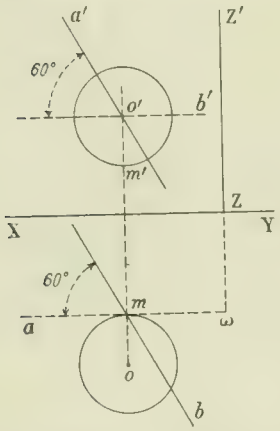
(*Durée : 1 heure.*)

*Épure de Géométrie descriptive.*

**1179.** — Section plane d'une surface de révolution. — L'axe de révolution $\omega ZZ'$ est vertical et à $100^{mm}$ en avant de la ligne de terre XY.

La courbe génératrice de la surface est une ellipse de centre $oo'$ située dans un plan parallèle au bissecteur du 1er dièdre et dont les projections sont deux cercles de même rayon :

$$om = o'm' = 50^{mm}.$$




Le point $oo'$ est à $150^{mm}$ en avant de la ligne de terre, à $75^{mm}$ au-dessus de la même ligne, et à $75^{mm}$ à gauche de l'axe $\omega ZZ'$. Il en résulte que le plan de front de l'axe touche l'ellipse en un point $mm'$, situé dans le plan de profil de $oo'$, et qui est le point le plus bas de l'ellipse.

Le plan sécant passe par le point $mo'$ et est déterminé par une horizontale $mb$, $o'b'$ et une ligne de front $ma$, $o'a'$ de ce point, chacune de ces lignes faisant un angle de 60° avec la ligne de terre.

On demande de représenter à l'encre noire, en faisant la distinction des parties vues et cachées, ce qui reste du solide de révolution lorsque l'on enlève la partie située en avant du plan sécant.

Reproduire à l'encre (traits discontinus noirs ou traits continus de couleur) les constructions d'un point courant tant pour le contour apparent que pour l'intersection, et celles des points et tangentes remarquables qu'il est possible d'obtenir exactement.

Toutes les courbes (autres que les circonférences) seront tracées à la main (avec le tire-ligne ou à la plume) sans faire usage de pistolet.

Feuille quart grand aigle. On pourra placer ZZ' suivant le grand axe de la feuille et la ligne de terre à $50^{mm}$ au-dessus du petit axe. — Titre : *Surface de révolution*. Cadre inutile. (*Durée : 3 heures.*)

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1180.** — Lieu du point de rencontre de la tangente à une ellipse en un point variable et de l'hyperbole d'Apollonius relative à ce point.

E.-N. Barisien.

**1181.** — Soit M un point variable d'une parabole, O le sommet et F le foyer de la parabole. La perpendiculaire menée en O à OM rencontre la tangente et la normale en M aux points T et N ; la perpendiculaire menée en F à FM rencontre la tangente et la normale en M aux points T' et N'. Construire les quatre courbes, lieux des points T, N, T', N'.

E.-N. Barisien.

**1182.** — Développer $\dfrac{L(1+x)}{1+x}$ par la formule de Maclaurin.

**1183.** — Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant la longueur de la bissectrice de l'angle droit et le volume engendré par le triangle en tournant autour de l'hypoténuse.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

13e Année. N° 5 Février 1903.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LA MÉTHODE D'ÉLIMINATION D'EULER

par M. **Vogt**, professeur à l'Université de Nancy

**1.** Le résultant de deux polynomes entiers de degrés $m$ et $p$, obtenu par la méthode d'Euler, se met sous la forme d'un déterminant d'ordre $m+p$, celui que fournit aussi la méthode de Sylvester. Je me propose dans cet article d'indiquer d'une manière simple et directe comment on déduit du résultant le degré du plus grand commun diviseur des deux polynomes et comment on détermine ce plus grand commun diviseur lui-même ; cette méthode n'est pas nouvelle et a déja été indiquée par M. Heffter (*Mathematische Annalen*, tome 54) ; je pense qu'elle pourra cependant intéresser les candidats à l'agrégation ; j'appliquerai aussi ces considérations au discriminant d'une équation.

Je rappelle que la méthode d'Euler est fondée sur le théorème suivant, dont je suppose connue la démonstration :

*La condition nécessaire et suffisante pour que deux polynomes entiers de degrés $m$ et $p$*

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m,$$
$$\varphi(x) = b_0x^p + b_1x^{p-1} + \dots + b_p,$$

*aient un diviseur commun est qu'il existe deux polynomes $f_1(x)$ et $\varphi_1(x)$ de degrés respectivement au plus égaux à $m-1$ et $p-1$, tels que l'on ait identiquement*

$$f(x)\varphi_1(x) + \varphi(x)f_1(x) = 0;$$

si l'on pose alors

$$f_1(x) = \alpha_1x^{m-1} + \alpha_2x^{m-2} + \dots + \alpha_m,$$
$$\varphi_1(x) = \beta_1x^{p-1} + \beta_2x^{p-2} + \dots + \beta_p,$$

il faut et il suffit que les relations d'identification

$$\begin{array}{ll} a_0\beta_1 & + b_0\alpha_1 = 0, \\ a_1\beta_1 + a_0\beta_2 & + b_1\alpha_1 + b_0\alpha_2 = 0, \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots, \\ a_m\beta_p & + b_p\alpha_m = 0, \end{array}$$

soient satisfaites par des valeurs non toutes nulles des coefficients $\alpha$ et $\beta$ ; comme ce sont $m+p$ équations homogènes à $m+p$ inconnues, il faut et il suffit que le déterminant des coefficients des inconnues soit nul. Ce déterminant, que nous désignerons par R, est

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & & b_1 & b_0 & 0 & \dots & \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 & b_{p-1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_1 & b_p & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_m & 0 & \dots & \dots & b_p & 0 \end{vmatrix};$$

il est d'ordre $m+p$ : il renferme les éléments $a$ dans les $p$ premières colonnes, et les éléments $b$ dans les $m$ dernières ; ces éléments sont disposés suivant deux parallélogrammes, et les autres éléments sont tous des zéros.

R s'appelle le résultant des deux polynomes ; d'après ce qui précède, $R = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les polynomes $f$ et $\varphi$ aient un diviseur commun.

2. Nous allons indiquer maintenant comment on reconnaît le degré du plus grand commun diviseur de $f$ et $\varphi$ ; nous désignerons par $d(x)$ ce plus grand commun diviseur, par $q$ son degré, par $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ les quotients de $f$ et $\varphi$ par $d(x)$, et nous poserons

$$\begin{aligned} d(x) &\equiv x^q + d_1 x^{q-1} + \cdots + d_q, \\ f'(x) &\equiv a'_0 x^{m-q} + a'_1 x^{m-q-1} + \cdots + a'_{m-q}, \\ \varphi'(x) &\equiv b'_0 x^{p-q} + b'_1 x^{p-q-1} + \cdots + b'_{p-q}. \end{aligned}$$

Les identités

$$f(x) \equiv f'(x) d(x), \qquad \varphi(x) \equiv \varphi'(x) d(x),$$

fournissent entre les coefficients les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} a_0 = a'_0, & b_0 = b'_0, \\ a_1 = a'_0 d_1 + a'_1, & b_1 = b'_0 d_1 + b'_1, \\ a_2 = a'_0 d_2 + a'_1 d_1 + a'_2, & b_2 = b'_0 d_2 + b'_1 d_1 + b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_m = \qquad a'_{m-q} d_q, & b_p = \qquad b'_{p-q} d_q. \end{array}$$

Remplaçons alors dans R les coefficients $a$ et $b$ par les valeurs précédentes, puis effectuons les opérations suivantes :

1° multiplions les éléments de la première ligne par $d_1$ et retranchons-les de ceux de la seconde,

2° multiplions les éléments de la première ligne par $d_2$, ceux de la deuxième ligne transformée par $d_1$ et retranchons les résultats des éléments de la troisième, et ainsi de suite ; le déterminant que nous obtiendrons de cette façon sera

$$R' = \begin{vmatrix} a'_0 & 0 & . & . & . & b'_0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a'_1 & a_0 & . & . & . & b'_1 & b'_0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a'_{m-q} & . & . & . & . & b'_{p-q} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix};$$

il renferme les éléments $a'$ dans les $p-q$ premières colonnes, ces éléments étant disposés suivant un parallélogramme, il renferme ensuite $q$ colonnes de zéros, puis les éléments $b'$ dans les $m-q$ colonnes suivantes, suivant un parallélogramme, enfin $q$ colonnes de zéros ; en outre les éléments des $2q$ dernières lignes sont tous nuls.

Le déterminant R′ est égal à R, et de plus, un mineur de R′ obtenu par suppression des $k$ dernières lignes et de $k$ colonnes quelconques est égal, quel que soit $k$, au mineur analogue de R, car le procédé que nous avons employé ne fait pas intervenir dans les transformations d'une ligne les éléments des lignes suivantes et ne modifie pas la valeur d'un des mineurs dont nous venons de parler ; cette remarque est essentielle dans la méthode actuelle.

Cela posé, appelons $R_r$ le mineur de R obtenu par suppression des $2r$ dernières lignes, des $r$ dernières colonnes renfermant les éléments $a$, et des $r$ dernières colonnes renfermant les éléments $b$ ; tous ces mineurs sont nuls pour $r$ inférieur à $q$, car les mineurs correspondants de R′ qui leur sont égaux ont au moins une colonne d'éléments nuls. Au contraire lorsque $r = q$, le mineur $R_q$ n'est pas

nul, car le mineur correspondant de R′ est identique au résultant des deux polynomes $f'(x)$ et $\varphi'(x)$; ce résultant, que nous désignerons par $\rho'$, n'est pas nul puisque $f'$ et $\varphi'$ sont premiers entre eux.

Nous voyons ainsi que l'ordre $r$ du premier des mineurs $R_1, R_2, \ldots$ qui n'est pas nul est égal au degré $q$ du plus grand commun diviseur. La réciproque est évidente, d'après cette remarque que $R_r$ est, quel que soit $r$ inférieur ou égal à $q$, le résultant des deux polynomes obtenus en divisant $f$ et $\varphi$ par un de leurs diviseurs communs de degré $r$; nous pouvons donc énoncer ce résultat :

Théorème. — *Soit* R *le résultant de deux polynomes $f$ et $\varphi$, écrit sous forme de déterminant comme nous l'avons dit; soit* $R_r$ *le mineur obtenu en supprimant dans* R *les* $2r$ *dernières lignes, les* $r$ *dernières colonnes renfermant les coefficients $a$ de $f$ et les $r$ dernières colonnes renfermant les coefficients $b$ de $\varphi$; les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux polynomes aient un plus grand commun diviseur de degré $q$ sont*

$$R = 0, \qquad R_1 = 0, \qquad \ldots \qquad R_{q-1} = 0, \qquad R_q \neq 0;$$

*de plus* $R_q$ *est le résultant des quotients de $f$ et $\varphi$ par leur plus grand commun diviseur.*

**3.** Nous allons maintenant déterminer le plus grand commun diviseur $d(x)$ des deux polynomes; nous commencerons par exprimer $d(x)$ en fonction linéaire de $f(x)$ et de $\varphi(x)$.

Considérons le résultant $\rho'$ de $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ et multiplions les éléments des lignes successives à partir de la dernière par $1, x, x^2, \ldots, x^{m+p-2q-1}$, puis ajoutons les éléments ainsi transformés à ceux de la dernière ligne ; nous ne changeons pas la valeur du déterminant, et nous trouvons ainsi

$$\rho' \equiv \begin{vmatrix} a'_0 & \cdot & \cdot & \cdot & b'_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_1 & a'_0 & \cdot & \cdot & b'_1 & b'_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{p-q-1}f'(x) & x^{p-q-2}f'(x) & \cdot & f'(x) & x^{m-q-1}\varphi'(x) & x^{m-q-2}\varphi'(x) & \cdot & \varphi'(x) \end{vmatrix},$$

multiplions les deux membres par $d(x)$; le résultat de la multiplication du second membre s'obtient en remplaçant dans la dernière ligne $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ par $f(x)$ et $\varphi(x)$; nous avons donc

$$\rho' d(x) \equiv \begin{vmatrix} a'_0 & \cdot & \cdot & \cdot & b'_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_1 & a'_0 & \cdot & \cdot & b'_1 & b_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{p-q-1}f(x) & \cdot & \cdot & f(x) & x^{m-q-1}\varphi(x) & \cdot & \cdot & \varphi(x) \end{vmatrix}.$$

Remarquons que $\rho'$ est égal à $R_q$; d'autre part les coefficients du développement du second membre suivant les éléments de la dernière ligne sont des mineurs du déterminant R′ respectivement égaux aux mineurs de même forme de R, d'après la remarque faite ; nous pouvons donc remplacer l'identité précédente par la suivante

$$R_q d(x) \equiv \begin{vmatrix} a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & b_1 & b_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{p-q-1}f(x) & \cdot & \cdot & f(x) & x^{m-q-1}\varphi(x) & \cdot & \cdot & \varphi(x) \end{vmatrix};$$

et nous pouvons l'écrire sous la forme

$$R_q d(x) = f(x)\varphi_1(x) + \varphi(x)f_1(x),$$

$\varphi_1(x)$ et $f_1(x)$ étant des polynomes entiers, de degrés respectivement égaux à $p-q-1$ et $m-q-1$, à coefficients entiers par rapport aux coefficients $a$ et $b$.

Cette identité, bien qu'intéressante, n'est pas immédiatement propre à fournir la valeur du plus grand commun diviseur $d(x)$ ; pour en trouver une plus simple, on part de l'avant-dernière relation, qui donne la valeur de $R_q d(x)$ sous forme de déterminant, si l'on met le second membre sous la forme d'une somme de déterminants partiels dont chacun contient en dernière ligne des termes de même degré en $x$, ceux de ces déterminants qui renferment $x$ aux puissances $m+p-q-1$, $m+p-q-2$, ..., $q+1$ sont tous nuls comme ayant les éléments de la dernière ligne proportionnels à ceux d'une des premières. Celui qui renferme $x^q$ en facteur est égal au produit de $x^q$ par $R_q$ lui-même ; enfin en général, dans celui qui renferme en facteur $x^{q-r}$, $r$ étant égal ou supérieur à 1, le coefficient de $x^{q-r}$ est un déterminant que l'on obtient en remplaçant dans $R_q$ les éléments de la dernière ligne par ceux de même rang dans la $r^e$ ligne qui la suit dans R. Si nous désignons ce déterminant par $R_{qr}$, nous avons finalement pour déterminer $d(x)$ la relation

$$R_q d(x) \equiv R_q x^q + R_{q1} x^{q-1} + \ldots + R_{qq}.$$

Nous pourrions laisser $R_q d(x)$ sous forme d'un déterminant ; il suffirait de conserver dans les éléments de la dernière ligne du déterminant écrit précédemment, c'est-à-dire dans les éléments

$$x^{p-q-1} f(x),\ \ldots,\ f(x),\ x^{m-q-1}\varphi(x),\ \ldots,\ \varphi(x),$$

les termes de degré égal ou inférieur à $q$.

4. Nous allons appliquer les considérations qui précèdent au discriminant du polynome $f(x)$ de degré $m$, c'est-à-dire au résultant de ce polynome et de sa dérivée ; ce discriminant écrit comme R sous forme de déterminant, a pour valeur

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & . & . & . & . & . & ma_0 & . & . & . & . \\ a_1 & a_0 & . & . & . & . & (m-1)a_1 & ma_0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m-2} & a_{m-3} & . & . & a_0 & & 2a_{m-2} & 3a_{m-3} & . & . & . \\ a_{m-1} & a_{m-2} & . & . & a_1 & & a_{m-1} & 2a_{m-2} & . & . & ma_0 \\ a_m & a_{m-1} & . & . & a_2 & & . & a_{m-1} & . & . & (m-1)a_1 \\ . & . & . & . & . & & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & a_m & & . & . & . & . & a_{m-1} \end{vmatrix};$$

les $m-1$ premières colonnes renferment les coefficients du polynome donné et les $m$ suivantes ceux de sa dérivée.

Nous allons remplacer ce déterminant par un autre plus simple, formé au moyen des sommes des puissances semblables des racines

$$s_0 = \Sigma x_i^0 = m,\quad s_1 = \Sigma x_i,\quad s_2 = \Sigma x_i^2,\ \ldots;$$

nous utiliserons pour cela les relations fondamentales

$$\begin{aligned} ma_0 &= s_0 a_0, \\ (m-1)a_1 &= s_0 a_1 + s_1 a_0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{m-1} &= s_0 a_{m-1} + s_1 a_{m-2} + \ldots + s_{m-1} a_0, \\ 0 &= s_0 a_m + s_1 a_{m-1} + \ldots + s_m a_0, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

qui interviennent dans la démonstration des formules de Newton. Remplaçons dans les $m$ dernières colonnes de D les coefficients de la dérivée par ces valeurs ; multiplions ensuite les éléments de la première colonne par $s_0$, ceux de la seconde par $s_1$, etc., et retranchons les produits des éléments de la $m^e$ colonne ; opérons de même à partir de la $2^e$ colonne pour simplifier la $m+1^e$, et ainsi de suite ;

nous aurons ainsi réduit à zéro les éléments contenus à la fois dans les $m-1$ premières lignes et les $m$ dernières colonnes, et D se réduira au produit de $a_0^{m-1}$ par un déterminant d'ordre $m$, sous la forme

$$D = (-1)^m a_1^{m-1} \begin{vmatrix} s_{m-1}a_0 & s_{m-2}a_0 & \cdots & s_0 a_0 \\ s_{m-1}a_1 + s_m a_0 & s_{m-2}a_1 + s_{m-1}a_0 & \cdots & s_0 a_1 + s_1 a_0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{m-1}a_{m-1} + \cdots + s_{2m-2}a_0 & s_{m-2}a_{m-1} + \cdots + s_{2m-3}a_0 & \cdots & s_0 a_{m-1} + \cdots + s_{m-1}a_0 \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons simplifier encore ce dernier déterminant en retranchant des éléments de la seconde ligne ceux de la première multipliés par $\frac{a_1}{a_0}$, et ainsi de suite, de sorte que nous avons finalement

$$D = (-1)^m a_0^{2m-1} \begin{vmatrix} s_{m-1} & s_{m-2} & \cdots & s_0 \\ s_m & s_{m-1} & \cdots & s_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{2m-2} & s_{2m-3} & \cdots & s_{m-1} \end{vmatrix}.$$

Ce résultat est bien connu, et on l'obtient, comme on le sait, en formant le carré du déterminant de Vandermonde relatif aux racines de l'équation $f(x) = 0$ ; notre but est de compléter ce résultat par la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que cette équation ait $m-q$ racines distinctes. Il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de sa dérivée soit de degré $q$, ou bien que l'on ait

$$D = 0, \qquad D_1 = 0, \qquad D_2 = 0, \quad \ldots \quad D_{q-1} = 0, \qquad D_q \neq 0,$$

$D_r$ désignant le déterminant déduit de D comme $R_r$ était déduit du résultant R dans la théorie générale précédente.

Nous allons transformer ces déterminants comme nous avons déjà transformé D ; considérons en général le mineur $D_r$ d'ordre $2m-1-2r$ déduit de D par suppression des $2r$ dernières lignes, des $r$ dernières colonnes renfermant les coefficients de $f(x)$, et des $r$ dernières colonnes renfermant les coefficients de la dérivée, et opérons sur $D_r$ comme nous l'avons fait sur D ; nous trouvons

$$D_r = (-1)^{m-r} a_0^{2m-2r-1} \begin{vmatrix} s_{m-r-1} & s_{m-r-2} & \cdots & s_0 \\ s_{m-r} & s_{m-r-1} & \cdots & s_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{2m-2r-2} & s_{2m-2r-3} & \cdots & s_{m-r-1} \end{vmatrix};$$

le déterminant qui entre au second membre se déduit du déterminant analogue au moyen duquel s'exprime D par suppression des $r$ premières colonnes et des $r$ dernières lignes.

Pour énoncer ces résultats d'une manière plus commode, nous intervertirons l'ordre des colonnes des déterminants que nous avons formés ; nous aurons alors l'énoncé suivant :

Théorème. — *Soit $f(x) = 0$ une équation de degré $m$ dont le coefficient de la plus haute puissance de $x$ n'est pas nul, et soient $s_0, s_1, \ldots$ les sommes des puissances semblables des racines de cette équation. Formons le déterminant*

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & \cdots & s_{2m-2} \end{vmatrix}$$

*et désignons en général par $\Delta_r$ le mineur de $\Delta$ obtenu par suppression des $r$ dernières lignes et des $r$ der-*

*nières colonnes. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation ait* $m - q$ *racines distinctes sont*

$$\Delta = 0, \quad \Delta_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Delta_{q-1} = 0, \quad \Delta_q \neq 0.$$

Ce résultat a été démontré d'une autre manière à l'aide de théorèmes sur les produits de déterminants, (voir, par exemple, l'*Algèbre supérieure* de Weber, traduction Griess, page 179), mais j'ai pensé qu'il était intéressant de le déduire de la méthode d'élimination d'Euler.

## AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1902).

### Mathématiques spéciales.

**1128.** — *Étant donnée la surface du second ordre* S *qui, rapportée à un système de trois axes rectangulaires, a pour équation*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0,$$

*on considère les deux coniques* C *et* C′ *d'intersection de cette surface par les plans* XOY *et* XOZ *et une droite* D *située dans le plan* YOZ *et passant par l'origine des coordonnées.*

1° *Trouver l'équation de tout plan* P *tel que, si* M *est l'un de ses points d'intersection avec la conique* C, M′ *l'un de ses points d'intersection avec la conique* C′ *et* N *son point d'intersection avec la droite* D, *les trois points* M, M′ *et* N *soient en ligne droite.*

2° *Trouver l'enveloppe des plans* P.

3° *Trouver le lieu* Σ *des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe* A *de l'espace sur les plans* P.

*Montrer qu'il existe une infinité de plans* Q, *passant par* A, *qui coupent cette surface* Σ *suivant deux cercles.*

*Trouver l'enveloppe de ces plans* Q *et le lieu de la corde commune aux deux cercles.*

4° *Que deviennent les résultats précédents dans le cas particulier où la surface du second ordre* S *est un paraboloïde ?*

1. Les équations des coniques (C) et (C′) sont :

$$(C) \qquad z = 0, \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2x = 0,$$

$$(C') \qquad y = 0, \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} - 2x = 0.$$

Nous prendrons les équations de la droite (D) sous la forme

$$(D) \qquad x = 0, \qquad \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

Soient $z = 0$, $y = \lambda x$, les équations de la droite OM joignant l'origine à un point M de la conique C, et $y = 0$, $z = \mu x$ celles de la droite OM′ joignant l'origine à un point M′ de la conique C′. Si la droite MM′ coupe le plan $yOz$ en un point N appartenant à la droite D, les droites D, OM, OM′, sont dans un même plan, ce qui entraîne la relation

$$\frac{\lambda}{\beta} = \frac{\mu}{\gamma},$$

ou, en égalant à $\rho$ la valeur commune de ces deux rapports,

$$\lambda = \rho\beta, \qquad \mu = -\rho\gamma.$$

Les équations des droites OM, OM′ s'écrivent alors respectivement :

$$\begin{cases} z = 0, \\ y = \rho\beta x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = -\rho\gamma x. \end{cases}$$

On en déduit facilement les expressions des coordonnées des points M, M′ en fonction du paramètre $\rho$

$$\text{(M)} \qquad x = \frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{\rho^2\beta^2}{b}}, \qquad y = \frac{2\rho\beta}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{\rho^2\beta^2}{b}}, \qquad z = 0;$$

$$\text{(M′)} \qquad x = \frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{\rho^2\gamma^2}{c}}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{-2\rho\gamma}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{\rho^2\gamma^2}{c}}.$$

Soit maintenant (1) $\qquad ux + vy + wz + r = 0$

l'équation d'un plan P passant par la droite MM′N, on aura en écrivant successivement que les points M et M′ appartiennent à ce plan

$$(2) \qquad 2u + 2\rho\beta v + r\left(\frac{1}{a} + \frac{\rho^2\beta^2}{b}\right) = 0,$$

$$(3) \qquad 2u - 2\rho\gamma w + r\left(\frac{1}{a} + \frac{\rho^2\gamma^2}{c}\right) = 0.$$

Pour obtenir l'équation des plans P en fonction de deux paramètres indépendants, il suffit alors d'éliminer $v$ et $w$ entre les relations (2) et (3) et l'équation (1) ; on a ainsi l'équation

$$ux + \frac{2u + r\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{\rho^2\beta^2}{b}\right)}{2\rho\beta}\, y + \frac{2u + r\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{\rho^2\gamma^2}{c}\right)}{2\rho\gamma}\, z + r = 0,$$

qui peut encore s'écrire

$$(4) \qquad 2u(\rho\beta\gamma x - \gamma y + \beta z) + r\left[2\rho\beta\gamma - \gamma y\left(\frac{1}{a} + \frac{\rho^2\beta^2}{b}\right) + \beta z\left(\frac{1}{a} + \frac{\rho^2\gamma^2}{c}\right)\right] = 0.$$

**2.** L'équation tangentielle de l'enveloppe des plans P s'obtient en éliminant $\rho$ entre les relations (2) et (3) qui contiennent ce paramètre au second degré ; l'élimination est immédiate et donne

$$\left(\frac{\beta^2}{b} - \frac{\gamma^2}{c}\right)^2 r^2(2au + r)^2 - 4a\beta\gamma r\,(2au + r)\left(\frac{\beta w}{b} - \frac{\gamma v}{c}\right)(\beta v + \gamma w) = 0.$$

L'enveloppe se compose donc des points

$$r = 0 \qquad \text{et} \qquad 2au + r = 0,$$

c'est-à-dire de l'origine et du deuxième point I commun aux coniques C et C′, et de la surface du second ordre (H) dont l'équation est

$$(5) \qquad \left(\frac{\beta^2}{b} - \frac{\gamma^2}{c}\right)^2 r(2au + r) - 4a\beta\gamma\left(\frac{\beta w}{b} - \frac{\gamma v}{c}\right)(\beta v + \gamma w) = 0.$$

Il est d'ailleurs évident que cette surface est aussi le lieu géométrique des diverses positions de la droite MM′N ; or les équations de cette droite s'obtiennent en annulant les coefficients de $u$ et $r$ dans l'équation (4)

$$\rho\beta\gamma x - \gamma y - \beta z = 0,$$

$$2\rho\beta\gamma - \gamma y\left(\frac{1}{a} + \frac{\rho^2\beta^2}{b}\right) + \beta z\left(\frac{1}{a} + \frac{\rho^2\gamma^2}{c}\right) = 0.$$

En éliminant $\rho$ entre ces équations, on obtient, toutes réductions faites,

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - \frac{yz}{\beta\gamma}\left(\frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c}\right) - 2x = 0.$$

C'est l'équation ponctuelle de (H). Sous cette forme on voit que (H) est une quadrique passant par les coniques (C) et (C′) ; on vérifie facilement qu'elle contient également la droite D.

Les résultats précédents pouvaient être prévus géométriquement. D'abord, lorsque les trois points M, M′, N viennent se confondre à l'origine, les plans P sont tous les plans passant par O, de même lorsque les points M, M′ viennent coincider avec le deuxième point commun I aux coniques (C) et (C′), les plans P sont tous les plans passant par I : ainsi se trouvent justifiées les solutions singulières obtenues par le calcul. D'autre part, comme la droite D passe à l'origine et est contenue dans le plan déterminé par les tangentes en ce point aux coniques (C) et (C′), il existe une quadrique (H) (généralement un hyperboloïde à une nappe) passant à la fois par les coniques (C), (C′) et la droite D. Toutes les droites MM′N, rencontrant en des points différents (C), (C′) et D sont alors des génératrices de cette quadrique et les plans P passant par ces droites sont les plans tangents à la même quadrique.

**3.** Soient $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées d'un point fixe A de l'espace. La perpendiculaire à l'un des plans P issue de ce point a pour équation

$$(7) \qquad \frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v} = \frac{z-z_0}{w}.$$

Pour obtenir le lieu géométrique de la projection du point A sur les plans P, il faut éliminer $u, v, w, r$, entre les équations (1), (5) et (7). En éliminant d'abord $r$ entre (1) et (5), on a

$$\left(\frac{\beta^2}{b}-\frac{\gamma^2}{c}\right)^2(ux+vy+wz)[u(x-2a)+vy+wz]-4a\beta\gamma\left(\frac{\beta w}{b}+\frac{\gamma v}{c}\right)(\beta v+\gamma w)=0,$$

relation homogène en $u, v, w$ dans laquelle il suffit de remplacer ces paramètres par les quantités proportionnelles $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$. On obtient alors l'équation du lieu demandé

$$(8) \qquad \left(\frac{\beta^2}{b}-\frac{\gamma^2}{c}\right)^2 x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)][(x-x_0)(x-2a)+y(y-y_0)+z(z-z_0)]$$
$$-4a\beta\gamma\left[\frac{\beta}{b}(z-z_0)+\frac{\gamma}{c}(y-y_0)\right][\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)]=0.$$

Cette équation représente une surface Σ du 4e ordre ; elle admet comme conique double le cercle imaginaire de l'infini et le point A en est un point double : on vérifierait facilement, en transportant l'origine des coordonnées en A, que le cône des tangentes en ce point est supplémentaire du cône de même sommet circonscrit à la quadrique (H). D'ailleurs, Σ étant la surface podaire de la quadrique (H) par rapport au point A, ces résultats ne sont que la vérification de propriétés connues.

Soient G une génératrice quelconque de la quadrique (H), Q le plan mené par A perpendiculairement à cette génératrice, α le point de rencontre de G et de Q : le lieu des projections du point A sur les plans tangents à la quadrique (H) aux différents points de la génératrice G est le cercle Γ décrit sur Aα comme diamètre, dans le plan Q. La surface (H) étant généralement un hyperboloïde, il existe une génératrice G′ de cette surface parallèle à G : si α′ est le point où elle perce le plan Q, le lieu des projections de A sur les plans tangents à (H) le long de cette deuxième génératrice est le cercle Γ′ décrit sur Aα′ comme diamètre dans le plan Q. Les cercles Γ et Γ′ appartiennent évidemment à la surface Σ et comme leur plan, Q, est aussi perpendiculaire à la génératrice $g$ du cône asymptote de (H), parallèle à G et G′, on en conclut que tous les plans menés par A perpendiculairement aux génératrices de ce cône coupent la surface Σ suivant deux cercles.

La corde commune aux cercles Γ et Γ′ est la perpendiculaire menée par A à la droite joignant les centres ω et ω′ de ces deux cercles, ou encore la perpendiculaire à la droite αα′, puisque ω et ω′ étant les milieux des segments Aα, Aα′, ωω′ est parallèle à αα′ : il en résulte que cette corde commune est perpendiculaire au plan des deux génératrices parallèles G, G′ de la quadrique (H), c'est-à-dire au plan tangent à son cône asymptote le long de $g$. Ces remarques montrent que l'enveloppe du plan Q est le cône de sommet A parallèle au cône supplémentaire du cône asymptote de (H), la génératrice de contact étant la corde commune aux deux cercles Γ et Γ′ de ce plan.

4. Pour que la surface S devienne un paraboloïde, il faut que le produit $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}$ s'annule ; or on ne peut pas supposer que le produit $\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}$ s'annule, car la surface S serait un cylindre ; la seule hypothèse possible est donc $\frac{1}{a}=0$. L'enveloppe des plans P est alors la surface dont l'équation est

$$\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-\frac{yz}{\gamma\gamma'}\left(\frac{\beta'}{b}+\frac{\gamma'}{c}\right)-2x=0.$$

C'est un paraboloïde Π dont le sommet est l'origine et l'axe, $Ox$. Les plans directeurs $p$ et $p'$ de ce paraboloïde ont pour équation

$$(p)\qquad \frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},$$

$$(p')\qquad \frac{\beta y}{b}=\frac{\gamma z}{c}$$

Le premier est, comme on pouvait le prévoir, le plan déterminé par $Ox$ et la droite D.

Quant à la surface Σ, enveloppe des plans P, son équation se réduit à

$$\left(\frac{\beta^2}{b}+\frac{\gamma^2}{c}\right)^2(x-x_0)(x'-x_0)+(y-y_0)(y'-y_0)+(z-z_0)(z'-z_0)-2\beta\gamma\left[\frac{\beta}{b}(z-z_0)-\frac{\gamma}{c}(y-y_0)\right](\beta(y-y_0)-\gamma(z-z_0))=0.$$

C'est une surface du 3e degré n'admettant le cercle imaginaire de l'infini que comme conique simple.

Soit G une génératrice du paraboloïde Π, parallèle au plan directeur $(p)$, par exemple. Le plan Q mené par A perpendiculairement à cette génératrice coupe la surface Σ suivant un cercle unique, car il n'existe pas sur un paraboloïde de couples de génératrices parallèles. Tous les plans Q perpendiculaires aux génératrices de même système que G passent par une même droite Δ, la perpendiculaire au plan $(p)$, issue de A, et cette droite Δ appartient d'ailleurs à la surface Σ, car elle est le lieu des projections du point A sur les plans parallèles à $p$, qui sont des plans tangents au paraboloïde De même les plans Q′ menés par A perpendiculairement aux génératrices du 2e système du paraboloïde Π coupent la surface Σ suivant un cercle et contiennent tous la perpendiculaire Δ′ menée de A au deuxième plan directeur $(p')$, qui est aussi une droite de la surface.

Ce résultat s'explique aisément, si on remarque que le cône asymptote du paraboloïde Π se réduisant à ses plans directeurs, le cône de sommet A parallèle au cône supplémentaire de ce cône asymptote se réduit aux droites Δ et Δ′.

T. CHOLLET, professeur agrégé au lycée d'Orléans.

Très bonne solution de M. Bruneau, professeur au lycée de Reims.
Bonnes solutions de MM. Haag, lycée de Nancy ; R. Bouvaist ; J. Franceschini, lycée de Marseille.
Assez bonnes solutions de M. Dulimbert et de M. Gourdel, lycée de Marseille.

## BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DES SCIENCES (1902).

### Mathématiques.

**1129.** — 1° *Combien, par un point du plan, peut-on mener de tangentes réelles à la courbe* (C) *dont l'équation est*

$$y=x^3\ ?$$

*On examinera le cas particulier où le point d'où l'on mène les tangentes est situé sur la courbe* (C).

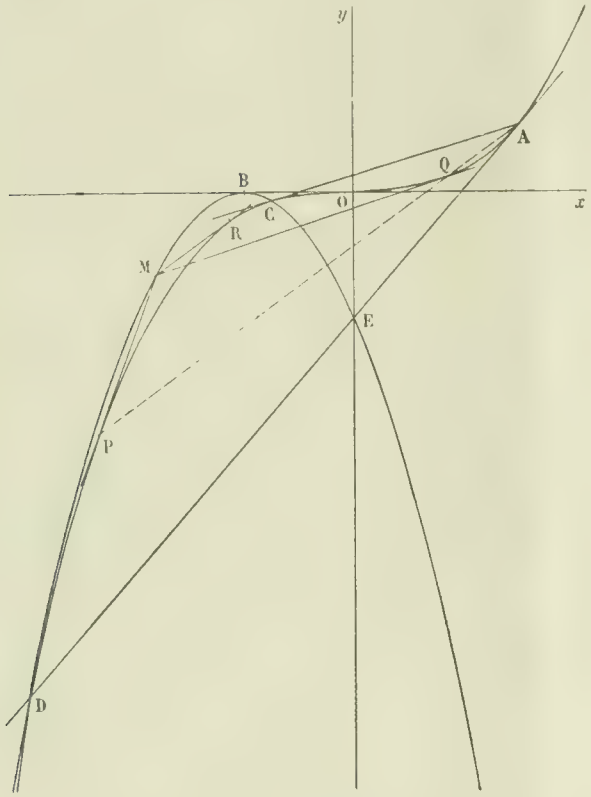
2° *Soit* A *un point d'abscisse a, situé sur la courbe* (C); *par ce point, on mène une sécante, de coefficient angulaire m, qui rencontre la courbe en deux points* P, Q *autres que* A. *On mène les tangentes à la courbe aux points* P, Q ; *soit* M *leur point d'intersection. Du point* M, *on peut mener à la courbe* (C) *une tangente autre que les tangentes* MP, MQ ; *soit* R *son point de contact.*

*On demande d'exprimer au moyen de a et de m les coordonnées des points* M, R.

*3° Lorsque $m$ varie, le point* M *décrit une parabole* (H). *Sur quelle partie de cette parabole le point* M *se trouve-t-il lorsque les points* P, Q *sont réels ? Lorsque le point* A *est entre* P *et* Q *?*

*Quelles sont les abscisses des points communs à la courbe* (C) *et à la parabole* (H) *?*

*4° Quels sont les lieux décrits, lorsque $a$ varie, par les points d'intersection de la parabole* (H) *et des droites qui joignent le point* A *aux points communs à cette parabole et à la courbe* (C) *?*




**1.** La courbe $y = x^3$ a l'origine pour centre, elle passe en ce point et y admet comme tangente l'axe des $x$, elle a deux branches paraboliques, opposées, dans la direction $Oy$ ; enfin elle possède un point double à l'infini sur $Oy$ et en lequel les deux tangentes sont confondues avec la droite de l'infini.

Soit $(\alpha, \beta)$ un point quelconque du plan ; la première polaire de ce point a pour équation

$$3\alpha x^2 - 2y - \beta = 0 ;$$

c'est une parabole qui touche la courbe donnée en son point de rebroussement, à l'infini sur $Oy$, et qui rencontre la courbe proposée en trois points à distance finie et dont les abscisses sont données par l'équation

$$2x^3 - 3\alpha x^2 + \beta = 0.$$

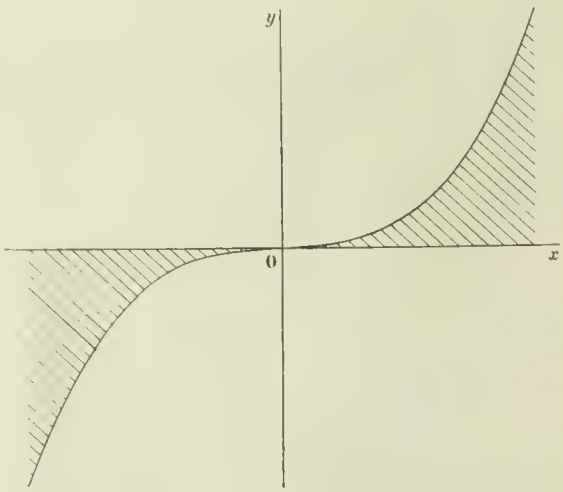
La transformée en $\frac{1}{x}$ a la forme réduite,

$$\beta x^3 - 3\alpha x + 2 = 0,$$

et la condition de réalité s'écrit immédiatement ; c'est

$$-\frac{4.27\alpha^3}{\beta^3} + \frac{27.4}{\beta^2} < 0 \qquad \text{ou} \qquad \beta(\beta - \alpha^3) < 0.$$

La séparative se décompose en deux : l'axe des $x$, $y=0$, et la courbe proposée, $y-x^3=0$ ; il n'y a qu'à placer ces deux lignes et à chercher le signe de $\beta(\beta - \alpha^3)$ en un point particulier de l'une des quatre régions, en un point de $Oy$, par exemple, pour apercevoir que l'inégalité n'est vérifiée que pour les points des régions hachurées ; de chacun des points de ces deux régions on peut mener trois tangentes réelles à la courbe proposée, de chacun des points des deux autres régions on n'en peut mener qu'une.




Si maintenant on suppose que le point $(\alpha, \beta)$ soit sur la courbe donnée, on a $\beta = \alpha^3$ et l'équation aux abscisses des points de contact devient $2x^3 - 3\alpha x^2 + \alpha^3 = 0$ ;

elle admet la racine double $x = \alpha$ et la racine simple $x = -\frac{\alpha}{2}$. La première racine correspond à

la tangente au point $(\alpha, \beta)$, qui compte pour deux, et la seconde racine à l'autre tangente issue de ce point. Cette seconde tangente touche donc la courbe sur la branche où n'est pas le point $(\alpha, \beta)$ et en un point dont l'abscisse est la moitié en valeur absolue de celle du point donné.

Si le point $(\alpha, \beta)$ est sur $Ox$, on a $\beta = 0$ et l'équation aux abscisses des points de contact admet la racine double $x = 0$, qui correspond à la tangente $Ox$ ; cette tangente compte pour deux, c'est une tangente double, ce qui était évident *a priori* puisque c'est une tangente d'inflexion.

**2.** La sécante menée par le point A a pour équation

$$y - a^3 = m(x - a) ;$$

elle rencontre la courbe en trois points dont les abscisses sont racines de l'équation

$$x^3 - a^3 - m(x - a) = 0 ;$$

en enlevant la racine $a$ qui est évidente et qui correspond au point A, il reste une équation du second degré,

$$x^2 + ax + a^2 - m = 0,$$

qui admet pour racines les abscisses des points P et Q. Soient alors $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point M ; les abscisses des points de contact des tangentes issues de ce point sont racines de l'équation

$$2x^3 - 3\alpha x^2 + \beta = 0 ;$$

si donc on appelle $\lambda$ l'abscisse du point de contact R de la troisième tangente issue de ce point, on aura

$$2x^3 - 3\alpha x^2 + \beta = 2(x - \lambda)(x^2 + ax + a^2 - m),$$

et l'identification fournira les trois relations

$$2(a - \lambda) = -3\alpha, \qquad a^2 - m - \lambda a = 0,$$
$$2\lambda(a^2 - m) = -\beta ;$$

la seconde donne

$$\lambda = \frac{a^2 - m}{a} ;$$

et les deux autres

$$(1) \qquad \alpha = -\frac{2m}{3a} \qquad \beta = -\frac{2(a^2 - m)^2}{a} .$$

Les deux équations (1) donnent les coordonnées du point M ; celles du point R sont

$$x = \frac{a^2 - m}{a} . \qquad y = \frac{(a^2 - m)^2}{a^2} .$$

**3.** Lorsque $m$ varie, le lieu du point M est une conique dont les deux équations paramétriques sont les équations (1). L'équation cartésienne, qui s'obtient immédiatement par l'élimination de $m$, est

$$2y + a(2a + 3x)^2 = 0 ;$$

cette conique est donc une parabole dont l'axe est parallèle à $Oy$ et qui touche l'axe des $x$ au point d'abscisse $-\frac{2a}{3}$ ; ce point est le sommet de la parabole ; si on remarque en outre qu'elle tourne sa concavité vers les $y$ négatifs et qu'elle rencontre l'axe des $y$ en un point d'ordonnée $-2a^3$, on a tous les éléments qu'il faut pour la placer (on a supposé $a > 0$).

La condition de réalité des points P et Q s'obtient en exprimant que l'équation

$$x^2 + ax + a^2 - m = 0$$

a ses racines réelles ; c'est

$$a^2 - 4(a^2 - m) > 0,$$

ou

$$m > \frac{3a^2}{4} ;$$

or, pour $m = \frac{3a^2}{4}$, les formules (1) donnent $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = \frac{a^3}{8}$ ; on trouve ainsi un point C de la parabole qui est aussi sur la courbe (C). Les valeurs de $m$ plus grandes que $\frac{3a^2}{4}$

correspondent aux points de l'arc CBMD... ; ce sont donc les positions de M quand P et Q sont réels. Le point limite C correspond au cas où les points P et Q sont confondus ; c'est le point de contact de la tangente issue du point A à la courbe (C). Ce résultat découle aussi de la remarque que nous avons faite dans la première partie, puisque l'abscisse de C est égale à $-\frac{a}{2}$.

Pour que le point A soit entre P et Q, il faut que le trinome

$$x^2 + ax + a^2 - m$$

soit négatif pour $x = a$, c'est-à-dire que $m$ soit plus grand que $3a^2$; or pour $m = 3a^2$, on a $\alpha = -2a$, $\beta = -8a^3$ ; on trouve donc encore ainsi un point D de la parabole qui est aussi sur la courbe (C). Les points de l'arc BMD..., qui sont au-delà de D, sont les positions de M qui correspondent aux sécantes pour lesquelles le point A est compris entre P et Q. Le point limite D correspond au cas où l'un des points P et Q se confond avec le point A ; c'est le point de rencontre de la courbe (C) avec la tangente à cette courbe au point A. Il est facile de vérifier analytiquement que la parabole est tangente à la courbe (C) au point D ; mais cela est évident, car le point M ne peut jamais pénétrer dans la région comprise entre l'axe des $y$ et la courbe proposée : la parabole ne peut donc pas traverser la courbe au point D.

Les abscisses des points communs à la courbe (C) et à la parabole (H) sont les racines de l'équation

$$2x^3 + a(3x + 2a)^2 = 0.$$

Cette équation admet pour racine double $-2a$ et pour racine simple $-\frac{a}{2}$, ce qui confirme bien ce que nous avons dit de la position des points D et C.

**4.** Nous avons vu que la droite AC a pour coefficient angulaire $\frac{3a^2}{4}$ et la droite AD pour coefficient angulaire $3a^2$. Cherchons les points de rencontre de ces droites avec la parabole. La première a pour équation.

$$y - a^3 - \frac{3a^2}{4}(x - a) = 0;$$

elle coupe la parabole au point dont les paramètres sont racines de l'équation

$$\frac{2(a^2 - m)^2}{a} + a^3 - \frac{3a^2}{4}\left(\frac{2m}{3a} + a\right) = 0;$$

cette équation développée est

$$2m^2 - \frac{9a^2m}{2} + \frac{9a^4}{4} = 0,$$

et ses racines sont $\frac{3a^2}{4}$ et $\frac{3a^2}{2}$ ; la première correspond au point C dont le lieu est évidemment la courbe (C) ; la seconde donne un point dont les coordonnées sont $x = -a$, $y = -\frac{a^3}{2}$ ; par conséquent le lieu de ce point a pour équation $y = \frac{x^3}{2}$. C'est la courbe qu'on obtient en réduisant de moitié les ordonnées de la courbe (C).

La seconde droite, la droite AD, a pour équation

$$y - a^3 - 3a^2(x - a) = 0;$$

elle rencontre la parabole en des points dont les paramètres sont racines de l'équation

$$\frac{2(a^2 - m)^2}{a} + a^3 - 3a^2\left(\frac{2m}{3a} - a\right) = 0;$$

cette équation se réduit à

$$2m^2 - 6a^2m = 0;$$

elle admet pour racine $m = 3a^2$, qui correspond au point D, et $m = 0$, qui donne le point de la parabole (H) situé sur l'axe des $y$. Le lieu de ce dernier point est donc l'axe des $y$.

J. HAAG et J. FRANCESCHINI.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist ; M. Laurence, à Bordeaux ; H. Lefebvre.

## CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES 1902, *fin*.

### Physique.

**1117.** — *On a constaté que, dans les limites où on veut l'employer, un certain ressort à boudin s'allonge proportionnellement à la force qui agit sur lui, l'allongement étant de* $1^{cm}$ *pour une force de* $10^5$ *dynes. L'une des extrémités du ressort est invariablement attachée à un point* O ; *à l'autre extrémité* B *on peut suspendre une masse.*

*Dans un endroit où l'accélération de la pesanteur est* 981 *unités C. G. S., l'air sec, la température* $0^o$, *la pression mesurée par une colonne de mercure à* $0^o$ *de* $76^{cm}$ *de hauteur, on suspend au ressort un cube de* $500^{cc}$ *et de masse spécifique* 2. *Avec un système optique formant un microscope à axe vertical, et dont l'objectif est à une distance invariable du point* O, *un observateur vise un micromètre porté par la face horizontale supérieure du cube et mesure le grandissement linéaire* $\gamma$ *donné par l'objectif. On a, d'autre part, mesuré la distance du micromètre à l'objectif, laquelle est de* $0^{cm}.70$, *et on sait que la convergence de l'objectif est de* 250 *dioptries.*

*On transporte le système dans un autre endroit, l'air étant toujours sec, la température* $0^o$ *et la pression encore mesurée par une colonne de mercure de* $76^{cm}$. *On ne trouve plus l'image au point ; il faut agir sur le tirage de l'oculaire et on trouve que le nouveau grandissement est le triple du premier. On demande quelle est, dans le second lieu, la valeur de l'accélération due à la pesanteur.*

*Ayant exprimé cette accélération en unités C. G. S., on cherchera quelle serait sa nouvelle expression si on prenait pour unité de temps la cent-millième partie du jour solaire moyen et comme unité de longueur la longueur du pendule simple qui, dans ce second lieu, effectuerait dans le vide une oscillation complète pendant la nouvelle unité de temps.*

*On établira l'équation exacte qui donnerait la valeur de l'accélération, mais, dans le calcul numérique, on s'arrêtera au chiffre des unités dans le système C. G. S.*

Calculons d'abord le déplacement du micromètre. Le grossissement produit par une lentille peut s'exprimer par la formule

$$g = -\frac{f}{q},$$

dans laquelle $q$ représente la distance de l'objet au premier foyer ; si donc on désigne par $x$ la quantité dont le micromètre s'est déplacé et, par conséquent, rapproché du foyer de l'objectif, on doit avoir, en écrivant que le second grossissement est triple du premier,

$$\frac{f}{q-x} = 3\frac{f}{q}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{2}{3}q.$$

D'autre part, la distance focale vaut $\frac{1}{250}$ de mètre ou $0^{cm},4$ : donc la distance $q$ est égale à

$$0,7 - 0,4 = 0,3 \qquad \text{et} \qquad x = 0,2.$$

Une variation de longueur de $1^{cm}$ correspondant à une variation de la force appliquée au ressort de $10^5$ dynes, un raccourcissement de $0^{cm}.2$ correspond à une diminution de 2000 dynes ; c'est la diminution du poids apparent de la masse considérée.

D'une manière générale, le poids apparent d'un corps est l'excès de son poids réel sur le poids de l'air qu'il déplace, soit

$$V\mu g - Vag,$$

en désignant par V son volume, par $\mu$ sa masse spécifique et par $a$ la masse spécifique de l'air ambiant. D'autre part, si $a_0$ désigne la masse spécifique de l'air normal, c'est-à-dire soumis en particulier à la pression normale $p_0$, on a, la température restant constante,

$$\frac{a}{a_0} = \frac{p}{p_0}.$$

Enfin si les pressions $p$ et $p_0$ sont mesurées par des colonnes de mercure de même hauteur, elles sont entre elles comme les accélérations de la pesanteur

$$\frac{a}{a_0} = \frac{g}{g_0}.$$

L'expression générale du poids apparent devient

$$V\mu g - Va_0 \frac{g^2}{g_0},$$

et la diminution qu'éprouve ce poids en passant d'un lieu d'indice 1 en un lieu d'indice 2 est

$$V\mu(g_1 - g_2) - Va_0 \frac{g_1^2 - g_2^2}{g_0} = V(g_1 - g_2)\left(\mu - a_0 \frac{g_1 + g_2}{g_0}\right).$$

Dans une première approximation, négligeons le terme en $a_0$, remplaçons les quantités par leurs valeurs numériques et écrivons que la diminution est égale à 2000; on a

$$500 \times (981 - g_2) \times 2 = 2000 \qquad \text{ou} \qquad g_2 = 979.$$

Dans une seconde approximation, on pourrait remplacer le rapport $\frac{g_1 + g_2}{g_0}$ par 2 et l'on trouverait environ $g_2 = 978{,}997$.

Pour résoudre la seconde partie de la question, écrivons la formule du pendule,

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Si $t$ vaut une unité de temps du nouveau système, $l$ vaudra, par définition, une unité de longueur; on aura donc, dans le nouveau système,

$$1 = \pi\sqrt{\frac{1}{g'}},$$

c'est-à-dire

$$g' = \pi^2.$$

On peut encore procéder par une autre méthode plus générale. Les valeurs numériques d'une même grandeur dans deux systèmes différents sont dans un rapport inverse de celui des unités. Désignons par les lettres non accentuées les quantités relatives au système C. G. S. et par les lettres accentuées les quantités relatives au nouveau système; nous aurons d'abord

$$\frac{g'}{g} = \frac{G}{G'}$$

et, par suite, à cause des dimensions de l'accélération

$$\frac{g'}{g} = \frac{L}{L'}\left(\frac{T}{T'}\right)^{-2}.$$

Or l'énoncé nous fait connaître la mesure des nouvelles unités en unités C. G. S., c'est-à-dire les rapports $\frac{L'}{L}$ et $\frac{T'}{T}$: on a

$$\frac{T'}{T} = \frac{86\,400}{100\,000} \qquad \text{et} \qquad \frac{T'}{T} = \pi\sqrt{\frac{L'}{L} \cdot \frac{1}{g}}.$$

En portant dans l'expression de $g'$ les valeurs de ces rapports, on retrouve

$$g = \pi^2.$$

La valeur numérique du rapport $\frac{T'}{T}$ est d'ailleurs inutile et, contrairement à ce que pourrait faire croire l'énoncé, $g'$ est indépendant de la nouvelle unité de temps.

(Cette dernière partie de M. M. Laurence.)

---

## Chimie.

(Solution par **M. R. Hecker** (premier prix).

**1118.** — *Un certain poids de bioxyde de baryum pur et anhydre est chauffé modérément dans un courant d'oxyde azotique jusqu'à réaction complète. On ajoute au produit obtenu dissous dans l'eau et additionné d'acide sulfurique une liqueur titrée de permanganate de potassium jusqu'au moment où la liqueur prend une coloration persistante.*

*D'autre part un même poids de bioxyde de baryum mis sous la forme de bouillie est décomposé par une quantité convenable d'une solution chlorhydrique et la liqueur, après précipitation par le sulfate d'argent, est titrée par le permanganate de potassium en présence d'acide sulfurique. Un litre et demi de liqueur titrée contenant 5gr,27 de permanganate par litre sont décolorés dans ce dernier cas.*

*On demande :*

*1° Le poids de chacune des fractions de bioxyde de baryum.*

*2° La quantité de sulfure de plomb qui aurait pu être oxydée dans le second cas par la liqueur avant le traitement par le permanganate;*

*3° Le volume d'oxyde azotique absorbé par le bioxyde de baryum ;*

*4° Le volume de la liqueur titrée de permanganate utilisé dans le premier cas;*

*Masses atomiques :* K = 39, Mn = 55, Ba = 137, Pb = 207.

1. Considérons d'abord le second groupe de réactions. L'action de l'acide chlorhydrique sur le bioxyde de baryum donne de l'eau oxygénée et du chlorure de baryum : le sulfate d'argent donne dans la liqueur un précipité de sulfate de baryum et de chlorure d'argent : après décantation, il ne reste que de l'eau oxygénée. Ces réactions s'expriment par les équations

$$BaO^2 + 2HCl = BaCl^2 + H^2O^2,$$
$$SO^4Ag^2 + BaCl^2 = SO^4Ba + 2AgCl.$$

Le permanganate de potassium et l'eau oxygénée, mis au contact, se décomposent tous deux en dégageant des quantités égales d'oxygène ; l'acide sulfurique ne sert qu'à faciliter cette réaction en transformant en sels les oxydes formés. On retrouve facilement l'équation de la réaction en écrivant successivement

$$2MnO^4K = 2MnO + K^2O + 5O \qquad \text{et} \qquad 5H^2O^2 = 5H^2O + 5O,$$

d'où l'on déduit $\quad 2MnO^4K + 5H^2O^2 + 4SO^4H^2 = 2SO^4Mn + 2SO^4KH + 8H^2O + 5O^2.$

Le poids de permanganate utilisé est $\frac{3}{2} \times 5{,}27$ grammes ; d'après la dernière réaction, le poids $p$ d'eau oxygénée nécessaire pour décomposer ce permanganate est

$$p = \frac{3}{2} \times 5{,}27 \times \frac{5}{2} \times \frac{34}{158},$$

et, d'après la première réaction, le poids cherché de bioxyde de baryum est

$$x = \frac{169}{34} p = \frac{3}{2} \times 5{,}27 \times \frac{5}{2} \times \frac{169}{158} = \underline{\underline{21^{gr},138.}}$$

2. L'action de l'eau oxygénée sur le sulfure de plomb s'exprime par la formule

$$PbS + 4H^2O^2 = SO^4Pb + 4H^2O.$$

On déduit de là le poids $y$ de sulfure de plomb cherché

$$y = \frac{239}{4 \times 34} p = \underline{\underline{7^{gr}.473}}.$$

3. Revenons au premier groupe de réactions. L'action du bioxyde d'azote sur le bioxyde de baryum donne de l'azotite de baryum : $2AzO + BaO^2 = (AzO^2)^2Ba$.

D'après cette équation, $169^{gr}$ de bioxyde de baryum absorbent deux molécules, c'est-à-dire $44^{lit},6$ de bioxyde d'azote. On a donc, en appelant $u$ le volume cherché, $x$ désignant le poids initial de bioxyde de baryum,

$$\frac{u}{44,6} = \frac{x}{169},$$

d'où l'on déduit

$$u = \underline{\underline{5^{lit},57}}.$$

4. L'acide sulfurique transforme l'azotite en acide azoteux. Sous l'action du permanganate, l'acide azoteux se transforme en acide azotique ; on retrouve facilement la réaction en écrivant successivement

$$2MnO^4K = 2MnO + K^2O + 5O \qquad \text{et} \qquad 5AzO^2H + 5O = 5AzO^3H,$$

d'où l'on déduit

$$5AzO^2H + 2MnO^4K + 4SO^4H^2 = 5AzO^3H + 2SO^4Mn + 2SO^4KH + 3H^2O.$$

Comparons cette dernière équation à l'équation

$$2AzO + BaO^2 = (AzO^2)^2Ba\,;$$

elles montrent qu'un poids de bioxyde de baryum représenté par $5BaO^2$ fournit la quantité d'acide azoteux nécessaire pour décomposer un poids de permanganate représenté par $4MnO^4K$. Le poids $q$ de permanganate utilisé est donc déterminé par la proportion

$$\frac{q}{x} = \frac{4 \times 158}{5 \times 169},$$

et le volume $v$ cherché s'en déduit immédiatement :

$$v = \frac{q}{5,27} = \frac{4 \times 158}{5 \times 169 \times 5,27} x = \underline{\underline{3^{lit}}}.$$

Solution exacte de M. Lemoyne, à Troyes ;
Solution partielle de M. Laurence, lycée de Bordeaux.

## QUESTION D'EXAMEN

*Discuter l'équation.* $\qquad x^5 + 5ax^4 + 10bx^3 + 1 = 0.$

Cette équation présente une lacune et l'équation binome correspondante, $10bx^3 + 1 = 0$, a deux racines imaginaires; donc l'équation proposée admet aussi au moins deux racines imaginaires. Il ne peut donc se présenter que deux cas généraux : ou bien l'équation proposée admet trois racines réelles et distinctes, ou bien elle n'en admet qu'une. Cherchons les conditions pour qu'elle ait trois racines réelles et distinctes. A cet effet, formons l'équation dérivée

$$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 = 0\,;$$

cette équation admet la racine double $x = 0$, qui n'appartient pas à l'équation donnée ; donc la suite de Rolle ne comprendra que $-\infty$, $+\infty$ et les racines de $x^2 + 4ax + 6b = 0$.

Il faut donc d'abord que celle-ci ait ses racines réelles, ce qui donne la condition $4a^2 - 6b > 0$ ou $b < \frac{2a^2}{3}$. Soient alors $\alpha$ et $\beta$ les deux racines de l'équation dérivée, autres que 0 ; la suite de Rolle est

$$-\infty, \quad \alpha, \quad \beta, \quad +\infty,$$

et elle doit donner les signes

$$- \quad + \quad - \quad +.$$

En appelant $f(x)$ le premier membre de l'équation proposée, nous avons donc les deux nouvelles conditions $f(\alpha) > 0$, $f(\beta) < 0$. Ces deux dernières conditions se réduisent à une seule,

$$f(\alpha) f(\beta) < 0,$$

car, si cette condition est remplie elle exprime qu'il y a une racine dans le second intervalle : il y en a donc une dans le premier et une dans le dernier et les trois racines sont réelles et distinctes.

Mais cette condition entraine aussi la condition de réalité de $\alpha$ et de $\beta$ ; car si elle est vérifiée, il est impossible que $\alpha$ et $\beta$ soient imaginaires conjugués. il est impossible aussi qu'ils soient réels et confondus.

Donc toutes les inégalités écrites se réduisent à l'inégalité unique $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

Le premier membre est une fonction symétrique de $\alpha$ et de $\beta$ qui se calcule sans peine, comme nous allons le montrer. En effet divisons $f(x)$ par

$$g(x) = x^2 + 4ax + 6b.$$

et appelons $R(x)$ l'un des restes, $Q(x)$ le quotient correspondant; nous aurons

$$f(x) \equiv g(x)Q(x) + R(x),$$

par suite
$$f(\alpha) = R(\alpha), \qquad f(\beta) = R(\beta);$$

nous pouvons donc remplacer $f(x)$ par $R(x)$. Si nous descendons jusqu'au reste du premier degré nous avons $R(x) \equiv Ax + B$, et, par suite,

$$R(\alpha)R(\beta) = A^2\alpha\beta + AB(\alpha + \beta) + B^2$$

et le calcul est immédiat. Mais cette simplification n'est qu'apparente, car, à mesure que la division algébrique se développe, les coefficients des restes se compliquent et ce qu'on gagne d'un côté on le perd de l'autre. Il arrive donc souvent que l'on n'ait pas avantage à aller jusqu'au bout et qu'il soit préférable de s'arrêter à un reste intermédiaire : on choisit celui qui est le plus simple de forme, tant par le nombre des termes que par les coefficients de ces termes. Ici le plus avantageux est le premier

$$ax^4 - 4bx^3 - 1;$$

ce n'est pas autre chose que $\frac{1}{5} \cdot f_5$ et on eût pu déduire la conséquence actuelle de l'identité d'Euler

$$5f(x) = xf_5 + f_4.$$

L'inégalité à calculer est donc

$$(a\alpha^4 + 4b\alpha^3 + 1)(a\beta^4 + 4b\beta^3 + 1) < 0,$$

ou
$$a^2\alpha^4\beta^4 + 4ab\alpha^3\beta^3(\alpha + \beta) + a(\alpha^4 + \beta^4) + 4b(\alpha^3 + \beta^3) + 16b^2\alpha^3\beta^3 - 1 < 0.$$

Or les formules de Newton relatives à l'équation $g(x) = 0$ sont

$$S_1 + 4a = 0,$$
$$S_2 + 4aS_1 + 12b = 0,$$
$$S_3 + 4aS_2 + 6bS_1 = 0,$$
$$S_4 + 4aS_3 + 6bS_2 = 0;$$

elles donnent successivement

$$S_1 = -4a, \qquad S_2 = 16a^2 - 12b,$$
$$S_3 = 72ab - 64a^3,$$

et
$$S_4 = 4a(64a^3 - 72ab) + 6b(12b - 16a^2)$$
$$S_4 = 256a^4 - 384a^2b + 72b^2.$$

Il n'y a plus qu'à porter ces valeurs dans le premier membre de l'inégalité trouvée pour obtenir celle que nous cherchons.

Si cette inégalité n'a pas lieu, l'équation proposée n'a qu'une racine réelle.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1184.** — On considère $n$ quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$; puis, les $n$ quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que l'on en déduit par les relations

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \qquad b_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}, \qquad \ldots, \qquad b_n = \frac{a_n + a_1}{2};$$

de même, les $n$ quantités $c_1, c_2, \ldots c_n$ que l'on en déduit par les relations

$$c_1 = \frac{b_1 + b_2}{2}, \qquad c_2 = \frac{b_2 + b_3}{2}, \qquad \ldots, \qquad c_n = \frac{b_n + b_1}{2};$$

et ainsi de suite.

Soit alors

$$\begin{aligned} u_1 &= (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \ldots + (a_n - a_1)^2, \\ u_2 &= (b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + \ldots + (b_n - b_1)^2, \\ u_3 &= (c_1 - c_2)^2 + (c_2 - c_3)^2 + \ldots + (c_n - c_1)^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

montrer que la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente et a pour somme $\frac{4}{n}\Sigma(a_i - a_j)^2$. WEILL.

**1185.** — Étant données une quadrique S et deux droites $D_1$, $D_2$ quelconques, on considère les deux droites $\delta$, $\delta'$ s'appuyant sur $D_1$, $D_2$ et sur leurs conjuguées $\Delta_1$, $\Delta_2$ par rapport à S.

1° Trouver le lieu des droites $\delta$, $\delta'$ lorsque, $D_1$ étant fixe, $D_2$ reste dans un plan P et tourne autour d'un point fixe $\pi$ de ce plan. Ce lieu est une surface $\Sigma$ dont on indiquera les droites remarquables et les systèmes de droites s'appuyant sur $D_1$, $\Delta_1$. Pour quelles positions du point $\pi$ dans le plan P la surface $\Sigma$ se décompose-t-elle?

2° On suppose les droites $D_1$, $D_2$ choisies de telle sorte que les quatre droites $D_1$, $D_2$, $\Delta_1$, $\Delta_2$ soient sur une même quadrique Q. Dans ces conditions, le lieu des conjuguées $\Delta$, par rapport aux quadriques Q, d'une droite donnée D est une quadrique. Comment doit être située la droite D pour que cette quadrique se confonde avec la surface S?

VASNIER.

**1186.** — Étant donnés dans le plan des $xy$ l'ellipse (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et dans le plan variable $z = mx$ le cercle (C) décrit sur l'axe de l'ellipse comme diamètre :

1° Discuter la nature de la quadrique de révolution (S) qui passe par les coniques (C) et (E).

2° Trouver les lieux des foyers et des sommets des méridiennes du plan des $zx$ des quadriques (S).

3° Trouver le lieu des génératrices des surfaces (S) qui passent par un point donné de l'ellipse (E).

4° En supposant que $b$ varie en même temps que $m$ et que la quadrique (S) soit un cylindre, trouver l'enveloppe des génératrices de ce cylindre contenues dans un plan fixe parallèle au plan des $zx$.

TH. LECONTE.

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE CENTRALE (1902, 1re Session.)

### Géométrie analytique et Cinématique.

**1134.** — 1° *Étant donnée la relation* $\rho = \frac{\sin^2\theta + \cos\theta}{2\sin\theta}$, *on propose d'examiner comment varie la fonction* $\rho$ *quand la variable* $\theta$ *croît de* 0 *à* $2\pi$.

2° *Considérant la ligne* S *représentée en coordonnées polaires par l'équation proposée, déterminer la position de la tangente en un point arbitraire. En particulier, construire les tangentes aux points situés sur la perpendiculaire menée par le pôle à l'axe polaire.*

3° *Construire les asymptotes de la ligne* S, *ainsi que les tangentes parallèles à ces droites et tracer la ligne* S.

4° *Un point parcourt la ligne* S *de sorte que le rayon vecteur tourne uniformément autour du pôle avec une vitesse angulaire égale à l'unité; on prend comme origine du temps l'instant où l'angle* $\theta$ *égale* $\frac{\pi}{2}$. *Un second mobile, occupant la position* M $\left(\rho = \sqrt{2},\ \theta = \frac{\pi}{4}\right)$ *à l'instant* $\frac{\pi}{6}$ *parcourt, dans le plan de* S, *une ligne* S' *d'un mouvement tel que* S *soit son hodographe. Représenter les vecteurs vitesse et accélération dans ce mouvement au temps* $-\frac{\pi}{6}$.

**1.** On constate que si on remplace $\theta$ par $\theta + 2\pi$, $\rho$ reprend la même valeur; on aura donc la courbe tout entière en faisant varier $\theta$ dans un intervalle d'amplitude $2\pi$, soit de 0 à $2\pi$ (comme l'indique l'énoncé), soit de $-\pi$ à $+\pi$. D'autre part, si on remplace $\theta$ par $-\theta$, $\rho$ se change en $-\rho$: la courbe est symétrique par rapport à la perpendiculaire à l'axe polaire menée par le pôle $Oy$. Il suffira de faire varier $\theta$ de 0 à $\pi$; on obtiendra ainsi une première branche de courbe. Aux valeurs de $\theta$ comprises entre 0 et $-\pi$, correspond une autre branche symétrique de la précédente par rapport à $Oy$. L'ensemble de ces deux branches donnera la courbe demandée.

Pour suivre les variations de $\rho$, lorsque $\theta$ varie de 0 à $\pi$, prenons la dérivée par rapport à $\theta$. On a

$$\rho = \frac{1}{2}(\sin\theta + \operatorname{cotg}\theta),$$

d'où

$$\rho' = \frac{1}{2}\left(\cos\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta\sin^2\theta - 1}{\sin^2\theta}.$$

Quel que soit $\theta$, le produit $\cos\theta\sin^2\theta$ est toujours plus petit que 1; la dérivée $\rho'$ est constamment négative; $\theta$ variant de 0 à $\pi$, $\rho$ décroît de $+\infty$ à $-\infty$ et par suite s'annule une fois dans l'intervalle. La valeur correspondante de $\theta$ est donnée par l'équation

$$\sin^2\theta + \cos\theta = 0,$$

ou en remplaçant $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$,

$$\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0.$$

L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a ses deux racines réelles, l'une comprise entre $-1$ et 0, l'autre plus grande que 1. La première racine seule peut convenir puisqu'il s'agit d'un cosinus; soit $\theta_0$ la valeur de $\theta$ pour laquelle $\rho$ s'annule; on aura

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Pour $\theta = \theta_0$ la courbe viendra passer par le pôle et sera tangente au rayon vecteur (voir sur la figure la construction de la tangente).

Notons en passant le point de rencontre A avec $Oy$; pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on trouve $\rho = \frac{1}{2}$.

**2.** Pour avoir la tangente en ce point, calculons

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sin^2\theta + \cos\theta}{2\sin\theta} \times \frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta\sin^2\theta - 1} = \frac{\sin\theta(\sin^2\theta + \cos\theta)}{\cos\theta\sin^2\theta - 1}.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} V = -1$; la tangente, dirigée dans le sens des angles $\theta$ croissants, fait un angle égal à $\frac{3\pi}{4}$ avec la direction positive du rayon vecteur, c'est-à-dire avec $Oy$.

**3.** Il nous reste à déterminer les asymptotes aux deux branches infinies de la courbe, obtenues l'une en faisant tendre $\theta$ vers 0 par valeurs supérieures, l'autre en faisant tendre $\theta$ vers $\pi$ par valeurs inférieures.

1° $\theta = 0$. La distance de l'asymptote au pôle comptée sur la direction $\theta = +\frac{\pi}{2}$ est donnée par la formule

$$h = \lim [\rho \sin \theta].$$

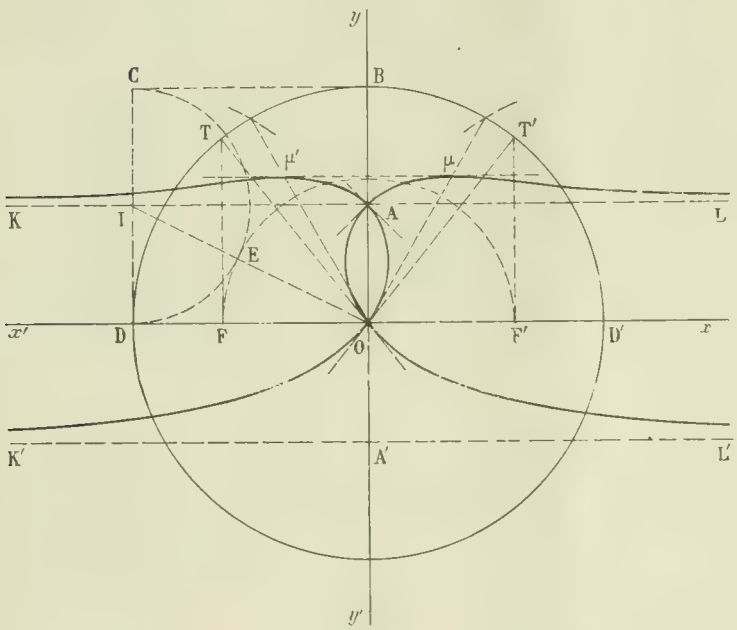
Or on a

$$\rho \sin \theta = \frac{1}{2} \sin^2 \theta - \cos \theta ;$$

d'où $h = \frac{1}{2}$. L'asymptote est la parallèle à l'axe polaire menée par le point A. Pour étudier la disposition de la courbe par rapport à cette asymptote, étudions le signe de la différence

$$\delta = \rho \sin \theta - h = \frac{1}{2}(\sin^2 \theta + \cos \theta) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos \theta (1 - \cos \theta).$$

Cette différence a le signe de $\cos \theta$; donc pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\delta$ est positif, la courbe est au-dessus de l'asymptote, et pour $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\delta$ est négatif, la courbe est au-dessous. On obtiendra les points où la tangente est parallèle à l'asymptote en cherchant le maximum ou le minimum de $\delta$ qui représente la distance du point qui décrit la courbe à l'asymptote. Le maximum a lieu pour $\cos \theta = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $\theta = \frac{\pi}{3}$; pour cette valeur, on a $\delta = \frac{1}{8}$ $\left(\text{autrement dit } y = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}\right)$.




2° $\theta = \pi$. La distance de l'asymptote au pôle comptée sur la direction $\theta = \frac{3\pi}{2}$ est donnée par la formule $h = \lim [\rho \sin (\theta - \pi)] = \rho \sin (\theta - \pi) = -\rho \sin \theta = -\frac{1}{2}(\sin^2 \theta + \cos \theta)$; d'où encore $h = \frac{1}{2}$. L'asymptote est la parallèle à l'axe polaire menée par le point A'. Etudions le signe de la différence

$$\delta = \rho \sin (\theta - \pi) - h = -\frac{1}{2}(\sin^2 \theta + \cos \theta) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\sin^2 \theta + \cos \theta + 1).$$

$\delta$ est constamment négatif; par suite la courbe est tout entière du même côté que le pôle par rapport à cette seconde asymptote.

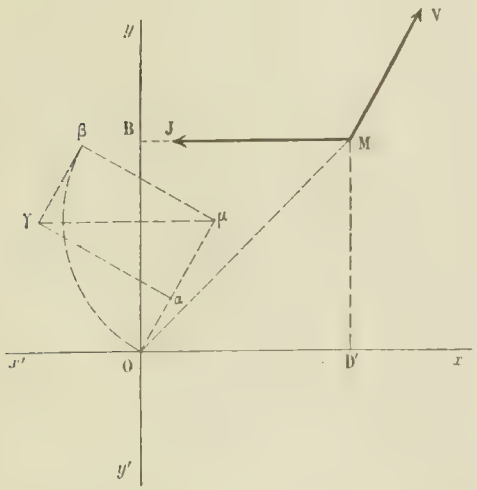
La courbe complète S a la disposition ci-dessus.

4. Soit $\mu$ un point mobile sur cette courbe. Si on suppose que le rayon vecteur $O\mu$ tourne uniformément autour du pôle avec une vitesse angulaire $\omega = 1$, $\theta$ ayant la valeur $\frac{\pi}{2}$ à l'origine du temps.

on aura

$$\theta = t + \frac{\pi}{2}.$$

A l'instant $t = -\frac{\pi}{6}$, on a $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$; la position du point $\mu$ sur la courbe S n'est autre que la position du point déterminé plus haut par la condition que la tangente y soit parallèle aux asymptotes $\left(\theta = \frac{\pi}{3},\ y = \frac{5}{8}\right)$.




La vitesse du point $\mu$ sur sa trajectoire est un vecteur (dirigé suivant la tangente) et dont les projections sur le rayon vecteur $O\mu$ et sur la direction perpendiculaire sont respectivement $\left(\text{pour } \theta = \frac{\pi}{3}\right)$

$$\rho' = \frac{1}{2}\frac{\cos\theta\sin^2\theta - 1}{\sin^2\theta} = -\frac{5}{12}.$$

et

$$\rho\theta' + \rho = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta + \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{5\sqrt{3}}{12}.$$

La longueur de ce vecteur est $\mu\gamma = \frac{5}{6}$.

Considérons maintenant la courbe S comme l'hodographe du mouvement d'un point M sur une trajectoire S'. Les vecteurs $O\mu$ et $\mu\gamma$ font connaître le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point M à l'instant $t = -\frac{\pi}{6}$. Construisons la position correspondante du point M $\left(\rho = \sqrt{2},\ \theta = \frac{\pi}{4}\right)$. Le vecteur MV équipollent à $O\mu$ représente la vitesse et le vecteur MJ équipollent à $\mu\gamma$ représente l'accélération.

Remarque. — Désignons par X, Y les coordonnées du point M et par $x$, $y$ celles du point $\mu$. On a

$$x = X'_t, \qquad y = Y'_t.$$

D'autre part,

$$x = \rho\cos\theta = \frac{\sin^2\theta + \cos\theta}{2\sin\theta}\cdot\cos\theta = -\frac{\cos^2 t - \sin t}{2\cos t}\cdot\sin t$$

$$y = \rho\sin\theta = \frac{\sin^2\theta + \cos\theta}{2} = \frac{\cos^2 t - \sin t}{2},$$

en tenant compte de ce que $\theta = t + \frac{\pi}{2}$. On en déduit

$$X'_t = \frac{\sin^2 t}{2\cos t} - \frac{1}{2}\sin t\cos t,$$

$$Y'_t = \frac{1}{2}\cos^2 t - \frac{1}{2}\sin t.$$

En intégrant, on aura les expressions de X et Y en fonction de $t$

$$X = \frac{1}{4}L\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{8}\cos 2t + X_0,$$

$$Y = \frac{t}{4} + \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos t + Y_0.$$

P. L.

## Mécanique.

**1135.** — 1° *Démontrer qu'un système de forces quelconques appliquées à un corps solide est équivalent à une force unique égale à leur somme géométrique, appliquée en un point arbitraire et à un couple unique dont l'axe est le moment résultant par rapport à ce même point.*

2° *On suppose un cube* OABC O'A'B'C', *dont les milieux des arêtes* OA *et* A'B' *sont* D *et* E.

*Ce solide étant sollicité par trois forces, représentées en mégadynes par les vecteurs* O'E, CD, C'B, *on réduit ces forces à une force* F *passant par le point* O, *et à un couple dont l'axe passe par ce point* O. *Calculer l'intensité de* F *et le moment du couple.*

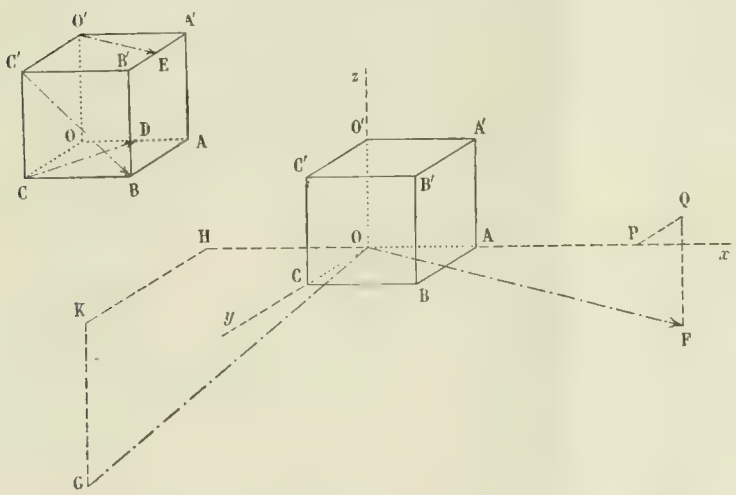
3° *Le cube étant figuré par un croquis en perspective, tracer la force* F *et l'axe du couple.*

1. Question de cours.

2. Prenons pour axes de coordonnées les trois arêtes du cube issues du sommet O. La longueur de l'arête étant prise pour unité de longueur, nous aurons le tableau suivant :

| | $x$ | $y$ | $z$ | X | Y | Z | L | M | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O'E | 0 | 0 | 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| CD | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ |
| C'B | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | $-1$ | $-1$ | 1 | $-1$ |

On en déduit pour les composantes de la résultante générale F




$$X = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2},$$

$$Y = \frac{1}{2} - 1 + 0 = -\frac{1}{2},$$

$$Z = 0 + 0 - 1 = -1,$$

$\left(\text{d'où } F^2 = \frac{25}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{30}{4}\right.$ et $\left. F = \frac{\sqrt{30}}{2}\right)$, et pour les projections de l'axe du couple

$$L = -\frac{1}{2} + 0 - 1 = -\frac{3}{2},$$

$$M = 1 + 0 + 1 = 2,$$

$$N = 0 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2},$$

$$\left(\text{d'où } G^2 = \frac{9}{4} + 4 + \frac{9}{4} = \frac{34}{4} \text{ et } G = \frac{\sqrt{34}}{2}\right).$$

3. La figure (1) représente le cube avec les forces données (en trait mixte) ; la figure (2) représente à la même échelle le cube après la réduction à une force unique OF et à un couple OG.

Le vecteur OF est la somme géométrique des vecteurs

$$OP = \frac{5}{2}, \qquad PQ = -\frac{1}{2}, \qquad QF = -1.$$

L'axe du couple, OG, est la somme géométrique des vecteurs

$$OH = -\frac{3}{2}, \qquad HK = 2, \qquad KG = -\frac{3}{2}.$$

Solution exacte de M. Laurence, lycée de Bordeaux. P. L.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1151.** *On donne un triangle $A_1A_2A_3$ et l'on désigne par $H_1$, $H_2$, $H_3$ les pieds des hauteurs issues de points $A_1$, $A_2$, $A_3$ ; on décrit sur $A_1H_1$ comme diamètre un cercle $(C_1)$ et on considère le cercle $(\Gamma_1)$ ayant pour centre le point $A_1$ et passant aux points de rencontre du cercle $(C_1)$ avec la parallèle au côté $A_2A_3$ menée par l'orthocentre H du triangle ; on considère de même les deux cercles analogues $(\Gamma_2)$ et $(\Gamma_3)$ relatifs aux deux autres sommets $A_2$ et $A_3$. Montrer que ces cercles sont deux à deux orthogonaux et se coupent deux à deux sur les hauteurs du triangle $A_1A_2A_3$.*

Prenons pour axe des $x$ le côté $A_1A_2$ et pour axe des $y$ la hauteur abaissée du point $A_3$ ; désignons par $a$, $a'$ les abscisses des points $A_1$, $A_2$ et par $b$ l'ordonnée du point $A_3$. La droite $A_1A_3$ aura pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

et la droite $A_2A_3$,

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

La hauteur abaissée du point $A_2$ a donc pour équation $\qquad y = \frac{a}{b}(x - a')$,

et les coordonnées du point H sont 0, $-\frac{aa'}{b}$ ; celles du point $H_2$ sont

$$x = \frac{a(aa' + b^2)}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{b(a^2 - aa')}{a^2 + b^2}.$$

Le cercle décrit sur $A_2H_2$ comme diamètre a donc pour équation

$$(x - a')\left(x - a\frac{aa' + b^2}{a^2 + b^2}\right) + y\left(y - b\frac{a^2 - aa'}{a^2 + b^2}\right) = 0 ;$$

d'autre part, la parallèle à $A_1A_3$ menée par le point H a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y + \frac{aa'}{b}}{b} = 0, \qquad \text{ou} \qquad b^2x + aby + a^2a' = 0.$$

Le cercle $\Gamma_2$, qui fait partie du faisceau linéaire défini par ce cercle et cette droite, a dès lors pour équation

$$(x - a')\left(x - a\frac{aa' + b^2}{a^2 + b^2}\right) + y\left(y - b\frac{a^2 - aa'}{a^2 + b^2}\right) + \lambda(b^2x + aby + a^2a') = 0,$$

et, en exprimant que le centre est au point $A_2$, on a de suite $\lambda = \frac{a - a'}{a^2 + b^2}$ et, en définitive, l'équation

$$x^2 + y^2 - 2a'x + aa' = 0.$$

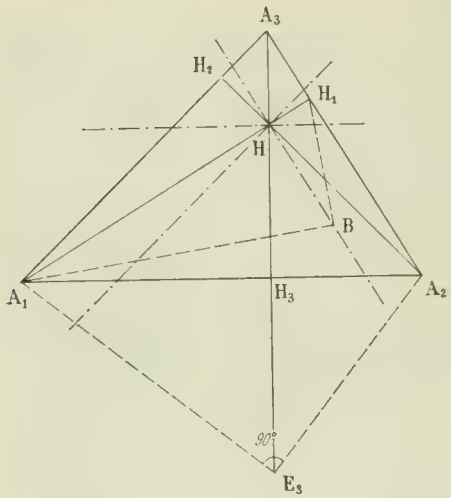
Le cercle $\Gamma_1$ se déduit de celui-ci par l'échange de $a$ et de $a'$ et a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax + aa' = 0.$$

Il est visible que ces deux cercles sont orthogonaux et ont pour axe radical l'axe des $y$, c'est-à-dire la hauteur abaissée du point $A_3$ sur le côté $A_1A_2$. Tout découle immédiatement de ce résultat.

Nous avons reçu de M. Victor Jonas, à Amiens, une solution très détaillée pour les coordonnées barycentriques, mais qui n'est pas à la portée des lecteurs de la deuxième partie.

**Solution géométrique.** — Soit B un des deux points de rencontre du cercle $(C_1)$ et de la parallèle à $A_2A_3$ menée par H. Dans le triangle rectangle $A_1BH_1$, dont HB est une hauteur, on a




$$\overline{A_1B}^2 = A_1H.A_1H_1.$$

Or, dans le quadrilatère inscriptible $A_2H_1HH_3$ on a

$$A_1H.A_1H_1 = A_1H_3.A_1A_2.$$

$A_1B$ est le rayon $R_1$ du cercle $(\Gamma_1)$. En appelant de même $R_2$ le rayon du cercle $(\Gamma_2)$, on a

$$R_1^2 = A_1H_3.A_1A_2,$$
$$R_2^2 = A_2H_3.A_2A_1.$$

Si on décrit le cercle de diamètre $A_1A_2$, on a, $E_3$ étant le point de rencontre de ce cercle et de la hauteur $A_3H_3$,

$$\overline{A_1E_3}^2 = A_1H_3.A_1A_2,$$
$$\overline{A_2E_3}^2 = A_2H_3.A_2A_1,$$

ou $\qquad A_1E_3 = R_1, \qquad A_2E_3 = R_2.$

$E_3$ est donc un des points d'intersection des cercles $(\Gamma_1)$ et $(\Gamma_2)$; ce point est bien situé sur la hauteur $A_3H_3$. Il en est de même de leur second point d'intersection, symétrique de $E_3$ par rapport à $A_1A_2$. L'angle des rayons $A_1E_3$, $A_2E_3$ étant droit, les deux cercles sont bien orthogonaux.

VASNIER.

Bonnes solutions : MM. J.-G. Nicolesco, à Bucarest ; R. Manen, à Toulouse ; J.-D. Dufaut, à Poitiers ; T. Lemoyne, à Troyes ; E. Sauvet ; J. Haag, à Pont-à-Mousson ; Treillou ; Monfreix, à Toulouse ; Blanchet, lycée d'Aurillac ; Kaddour ben Tahar ; Laurence, à Bordeaux ; F. Pégorier, à Carcassonne.

Assez bonnes solutions : MM. L. Sade, à Marseille ; J.-B. Martin ; H. Janois, à Châlons-sur-Marne.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1187.** — Une fonction $y$ de la variable $x$ a pour dérivée

$$y' = \frac{2x - 1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

et se réduit à 0 pour $x = 0$. Déterminer cette fonction et étudier ses variations quand $x$ reçoit toutes les valeurs pour lesquelles la fonction $y$ est définie. — Courbe figurative.

**1188.** — Une fonction $y$ de la variable $x$ est définie par l'équation :

$$e^x - e^y(x - y)^2 = 0.$$

Calculer sa dérivée $y'$ et expliquer le résultat obtenu.

**1189.** — Construire la courbe représentée par l'équation

$$a = x^y,$$

$a$ désignant une constante positive (qu'on supposera plus grande que 1, pour fixer les idées). Déterminer le point d'inflexion et la tangente en ce point.

**1190.** — On donne une droite $\Delta$ dans le plan d'un triangle ABC. Un point M est mobile sur la droite $\Delta$. Etudier comment varie la somme

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$$

des carrés des distances du point M aux trois sommets du triangle. Cas particulier où la droite $\Delta$ passe par le centre de gravité du triangle ABC.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

13e Année. N° 6 Mars 1903.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### NOTE SUR L'HOMOLOGIE

par M. **Pierre SICARD**, ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

PROBLÈME. — *Trouver la transformation la plus générale qui fasse correspondre à un point $m$ du plan un autre point $m_1$, tel que les tangentes aux points $m$ et $m_1$ aux trajectoires correspondantes décrites par ces points se coupent suivant une droite fixe.*

Ce problème est en quelque sorte le problème inverse de l'homologie.

Prenons la droite fixe pour axe des $y$, pour axe des $x$ une perpendiculaire à cette droite.

Soient $(x,y)$ les coordonnées de $m$, $(\xi,\eta)$ les coordonnées de $m_1$; les équations des tangentes aux points $m$ et $m_1$ aux trajectoires de ces points sont

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

$$Y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(X - \xi).$$

En exprimant que ces tangentes se coupent sur l'axe des $y$, nous obtenons la condition

$$y - x\frac{dy}{dx} = \eta - \xi\frac{d\eta}{d\xi}$$

ou, en remplaçant $d\eta$ par $\frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy$ et $d\xi$ par $\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy$,

$$y - x\frac{dy}{dx} = \eta - \xi\frac{\frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy}{\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy}.$$

Cette égalité devant avoir lieu quels que soient $dx$ et $dy$, conduit aux trois relations

$$(1) \qquad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0,$$

$$(2) \qquad x\frac{\partial\xi}{\partial x} - \xi\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0,$$

$$(3) \qquad (\eta - y)\frac{\partial\xi}{\partial x} = \xi\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

La relation (1) montre que $\xi$ est fonction de $x$ seule. La relation (3), qui peut aussi s'écrire

$$\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\xi} = \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x}}{\eta - y},$$

est immédiatement intégrable par rapport à $x$, car ses deux membres sont tous les deux des dérivées logarithmiques.

En intégrant, nous obtenons : $L\xi = L(\eta - y) + L\varphi(y)$,

$\varphi$ étant une fonction d'$y$, que nous déterminerons ultérieurement.

On déduit de là

$$(a) \qquad \eta - y = \xi\varphi(y).$$

En tirant de cette relation $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ par l'équation

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = 1 - \xi\frac{d\varphi}{dy},$$

et en portant dans l'équation (2), nous obtenons la condition

$$\frac{x\frac{\partial\xi}{\partial x} - \xi}{\xi^2} = \frac{d\varphi}{dy}.$$

La fonction $\xi$ étant fonction de $x$ seule, la fonction $\varphi$ de $y$ seule, cette égalité ne peut avoir lieu que si ses deux membres sont égaux à une constante $-c_0$ :

$$(4) \qquad \frac{x\frac{\partial\xi}{\partial x} - \xi}{\xi^2} = -c_0,$$

$$(5) \qquad \frac{d\varphi}{dy} = -c_0.$$

Ces équations (4) et (5), sont immédiatement intégrables. (Le 1er membre de l'équation (4) est visiblement la dérivée de $-\frac{x}{\xi}$.) Les deux intégrations conduisent aux deux relations :

$$\frac{x}{\xi} = c_0x + c_1,$$

$$\varphi = c_2 - c_0y.$$

La relation $(a)$ trouvée précédemment donne $\eta$, lorsqu'on y remplace $\varphi$ et $\xi$ par leurs valeurs.

Dès lors, la transformation cherchée est la suivante :

$$\xi = \frac{x}{c_0x + c_1}, \qquad \eta = \frac{c_2x + c_1y}{c_0x + c_1}.$$

Nous allons démontrer que cette transformation n'est autre que la transformation homologique. A cet effet, nous allons faire voir que les points $m(x,y)$, $m_1(\xi,\eta)$ sont constamment en ligne droite avec un point fixe $(a,b)$, et qu'en outre le rapport anharmonique des 3 points $(a,b)$, $(x,y)$, $(\xi,\eta)$, et du point $t$ où la droite qui joint les points correspondants rencontre $Oy$, est fixe.

1° *La droite $mm_1$ passe par un point fixe.* — Cherchons à déterminer les coordonnées $(a,b)$ d'un point, tel que $mm_1$ passe toujours par ce point. Ces coordonnées doivent vérifier quels que soient $x$ et $y$, l'équation de la droite $mm_1$. Nous devons donc avoir

$$\frac{a - x}{\xi - x} = \frac{b - y}{\eta - y},$$

ou, en remplaçant $\xi$ et $\eta$ par leurs valeurs,

$$\frac{a - x}{1 - (c_0x + c_1)} = \frac{b - y}{c_2 - c_0y}.$$

Nous sommes conduits aux trois relations :

$$ac_2 = b(1 - c_1),$$
$$ac_0 = (1 - c_1),$$
$$c_2 = bc_0.$$

Ces trois conditions sont visiblement compatibles. Elles donnent les coordonnées du point fixe.

2° *Le rapport anharmonique des quatre points $(a,b)$, $(x,y)$, $(\xi,\eta)$, $t$ est fixe.* — Si nous faisons passer l'axe des $x$ par le point fixe, les formules de transformations se simplifient, car $c_2 = 0$.

Elles s'écrivent $\qquad \xi = \frac{x}{c_0x + c_1}, \qquad \eta = \frac{c_1y}{c_0x + c_1}.$

Le rapport anharmonique des 4 points $(a,b)$, $(x,y)$, $t$, $(\xi,\eta)$ est égal à

$$\frac{\xi - a}{\xi} \times \frac{x}{x - a},$$

c'est-à-dire, en remplaçant $\xi$ et $a$ par leurs valeurs

$$\frac{\dfrac{x}{c_0x + c_1} - \dfrac{1 - c_1}{c_0}}{x - \dfrac{1 - c_1}{c_0}}(c_0x + c_1) \qquad \text{ou, après simplification, } c_1.$$

Le rapport anharmonique est donc constant.

La transformation la plus générale qui réponde à la question, est donc la transformation homologique.

---

## ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1902).

### Mathématiques.

**1122.** — *On considère la courbe* (C) *décrite, lorsque* $\alpha$ *varie, par le point* M, *dont les coordonnées rectangulaires sont*

$$x = \frac{\cos 4\alpha}{\cos^2\alpha}, \qquad y = \frac{\sin 4}{\cos^2\alpha};$$

*on montrera que* $x$, $y$ *s'expriment rationnellement au moyen de* $t = \operatorname{tg}\alpha$; *on formera l'équation en coordonnées polaires de la courbe* (C) *et on construira cette courbe.*

*Soit* A *le point double réel de la courbe* (C); *le lieu du point d'intersection* P *de la droite* AM *et de la droite dont l'équation est* $y = x\operatorname{tg}\alpha$, *lorsque* $\alpha$ *varie, est un cercle* (K).

*A chaque point* M *de la courbe* (C) *correspond par la construction précédente un point* P *du cercle* (K); *la droite* OM, *qui joint l'origine des coordonnées* O *au point* M, *rencontre la courbe* (C) *en trois points* $M_1$, $M_2$, $M_3$, *autres que le point* M; *soient* $P_1$, $P_2$, $P_3$ *les points du cercle* (K) *qui correspondent respectivement aux points* $M_1$, $M_2$, $M_3$ *comme le point* P *correspond au point* M.

*On montrera que les coordonnées des points* $M_1$, $M_2$, $M_3$ *s'expriment rationnellement au moyen de* $\operatorname{tg}\alpha$, *et que les points* P, $P_1$, $P_2$, $P_3$ *sont les sommets d'un carré, dont la grandeur est indépendante de* $\alpha$.

*Quels sont les lieux décrits, lorsque* $\alpha$ *varie, par les points d'intersection de* OM *avec les diagonales du carré, de la droite dont l'équation est* $y = x\operatorname{tg}\alpha$ *avec les côtés du carré ?*

*Soit* $M_1$ *celui des points* $M_1$, $M_2$, $M_3$ *qui est du même côté que le point* M *par rapport au point* O; *quels sont, lorsque* $\alpha$ *varie, le lieu du conjugué harmonique du point* O *par rapport aux points* M, $M_1$ *et le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée sur la droite* OM *du point d'intersection des tangentes en* M, $M_1$ *à la courbe* (C) ?

De la formule de Moivre $\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^4$
on déduit $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$, $\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha$,
et par suite les coordonnées $x$ et $y$ du point M sont données par les formules

$$x = \frac{\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}, \qquad y = \frac{4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha},$$

et en y remplaçant $\cos\alpha$ par $\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin\alpha$ par $\pm\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, *les signes se correspondant,*

$$x = \frac{1 - 6t^2 + t^4}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{4t - 4t^3}{1 + t^2}.$$

On voit ainsi que la courbe (C) est une courbe unicursale du quatrième degré.

Pour avoir son équation en coordonnées polaires, remplaçons dans les formules $x = \dfrac{\cos 4\alpha}{\cos^2\alpha}$,

$y = \frac{\sin 4\alpha}{\cos^2 \alpha}$, $x$ par $\rho \cos \omega$, $y$ par $\rho \sin \omega$ et éliminons $\alpha$ entre les relations obtenues.

Nous avons

$$(1) \qquad \rho \cos \omega = \frac{\cos 4\alpha}{\cos^2 \alpha}, \qquad \rho \sin \omega = \frac{\sin 4\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

En les divisant membre à membre, nous en déduisons $\operatorname{tg} 4\alpha = \operatorname{tg} \omega$, ou $4\alpha = \omega + k\pi$, $k$ désignant un nombre entier quelconque, et en remplaçant $\alpha$ par cette valeur dans l'une quelconque des équations (1), nous obtenons

$$(2) \qquad \rho = \frac{(-1)^k}{\cos^2 \frac{\omega + k\pi}{4}}.$$

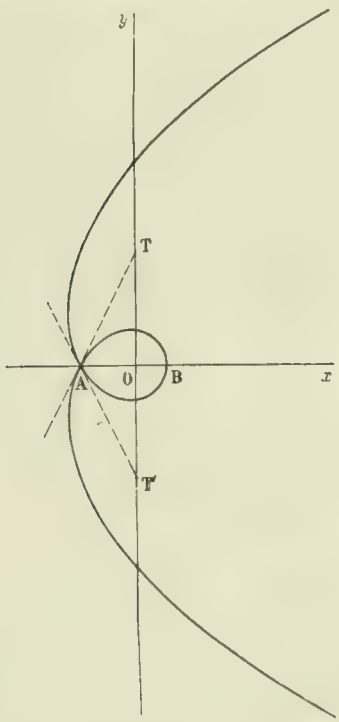
Si l'on donne à $k$ deux valeurs entières consécutives quelconques, $\lambda$ et $\lambda + 1$, on obtient les deux équations

$$\rho = \frac{(-1)^\lambda}{\cos^2 \frac{\omega + \lambda\pi}{4}}, \qquad \rho = \frac{-(-1)^\lambda}{\cos^2 \frac{\omega + \pi + \lambda\pi}{4}};$$

or la seconde équation se déduit de la première en changeant $\rho$ en $-\rho$ et $\omega$ en $\omega + \pi$. On en conclut que ces deux équations représentent la même courbe. Et par conséquent la courbe (C) sera représentée en coordonnées polaires par l'équation (2) où l'on donnera à $k$ une valeur entière absolument arbitraire. Donnons à $k$ la valeur 0, nous aurons

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega}{4}}.$$

Construisons la courbe définie par cette équation. En changeant $\omega$ en $\omega + 4\pi$, $\rho$ ne change pas; donc il suffit de faire varier $\omega$ dans un intervalle dont l'étendue est égale à $4\pi$. Mais en changeant $\omega$ en $-\omega$, $\rho$ ne change pas non plus, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire. Nous ferons varier $\omega$ de 0 à $2\pi$, nous construirons la portion de courbe correspondante, et nous prendrons la symétrique de cette portion par rapport à l'axe polaire.




Quand $\omega$ croît de 0 à $2\pi$, $\frac{\omega}{4}$ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\cos \frac{\omega}{4}$ décroît de 1 à 0, il en est de même de $\cos^2 \frac{\omega}{4}$, et par suite $\rho$ croît de 1 à $+\infty$. En particulier

pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} = 2(2 - \sqrt{2})$;

pour $\omega = \pi$, $\rho = 2$;

pour $\omega = \frac{3\pi}{2}$, $\rho = \frac{1}{\cos^2 \frac{3\pi}{8}} = 2(2 + \sqrt{2})$.

Pour avoir la tangente en un point, calculons la dérivée de $\rho$ par rapport à $\omega$; nous avons $\rho' = \frac{\sin \frac{\omega}{4}}{2 \cos^3 \frac{\omega}{4}}$,

et par suite

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{\omega}{4}}.$$

Il en résulte qu'au point B($\omega = 0$, $\rho = 1$) la tangente est perpendiculaire à $Ox$. Pour $\omega = \pi$, $\operatorname{tg} V = 2$; par conséquent au point double A($\omega = \pi$,

$\rho = 2$), les tangentes passent par les points T et T′ situés sur $Oy$ à une distance du point O égale à 4.

Enfin, il est facile de voir que les branches infinies sont paraboliques. Cherchons en effet la limite de $\rho \sin(\omega - 2\pi)$ pour $\omega = 2\pi$. Nous avons

$$\rho \sin(\omega - 2\pi) = \frac{\sin(\omega - 2\pi)}{\cos^2 \frac{\omega}{4}};$$

posons $\omega = 2\pi + \theta$, $\theta$ tendant vers zéro; le second membre devient égal à $\dfrac{\sin\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{4}}$; il a même limite que $\dfrac{\theta}{\left(\frac{\theta}{4}\right)^2}$, et on voit que cette quantité est infinie pour $\theta = 0$.

Prenons les coordonnées du point M sous la forme

$$x = \frac{1 - 6t^2 + t^4}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{4t - 4t^3}{1 + t^2}.$$

L'équation de la droite AM est alors

$$\frac{y}{x+2} = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4 + 2(1 + t^2)} = \frac{4t(1 - t^2)}{(1 - t^2)(3 - t^2)}$$

ou

$$\frac{y}{x+2} = \frac{4t}{3 - t^2}.$$

Pour avoir le lieu du point P, il faut éliminer $t$ entre cette équation et $y = tx$, ce qui donne immédiatement

(K) $$x^2 + y^2 + 8x = 0;$$

c'est l'équation du cercle (K).

Dans l'élimination s'introduit la solution singulière $y = 0$, qui représente l'axe des $x$ et qui correspond à la valeur $t = 0$ pour laquelle des droites AM et $y = tx$ sont confondues suivant $Ox$.

On a facilement les coordonnées du point P en prenant l'intersection du cercle (K) et de la droite $y = tx$, nous trouvons ainsi

$$x = -\frac{8}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{-8t}{1 + t^2},$$

ce qu'on peut écrire $$x + 4 = -\frac{4(1 - t^2)}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{-8t}{1 + t^2},$$

ou, en remplaçant $t$ par $\operatorname{tg}\alpha$, $$x + 4 = -4\cos 2\alpha, \qquad y = -4\sin 2\alpha.$$

Soit $\alpha_0$ la valeur de $\alpha$ relative au point M; la droite OM a pour équation $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} 4\alpha_0$; elle rencontre la courbe (C) en quatre points dont les $\alpha$ sont définis par l'équation $\operatorname{tg} 4\alpha = \operatorname{tg} 4\alpha_0$, ou $4\alpha = 4\alpha_0 + k\pi$, en donnant à $k$ quatre valeurs entières consécutives quelconques, par exemple 0, 1, 2 et 3. On obtient ainsi les valeurs $\alpha_0$, $\alpha_0 + \dfrac{\pi}{4}$, $\alpha_0 + \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha_0 + \dfrac{3\pi}{4}$ relatives aux points M, $M_1$, $M_2$, $M_3$.

Les points correspondants P, $P_1$, $P_2$, $P_3$ ont alors pour coordonnées

$$P \begin{cases} x + 4 = -4\cos 2\alpha_0, \\ y = -4\sin 2\alpha_0, \end{cases} \qquad P_1 \begin{cases} x + 4 = -4\cos\left(2\alpha_0 + \dfrac{\pi}{2}\right), \\ y = -4\sin\left(2\alpha_0 + \dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

$$P_2 \begin{cases} x + 4 = -4\cos(2\alpha_0 + \pi), \\ y = -4\sin(2\alpha_0 + \pi), \end{cases} \qquad P_3 \begin{cases} x + 4 = -4\cos\left(2\alpha_0 + \dfrac{3\pi}{2}\right), \\ y = 4\sin\left(2\alpha_0 + \dfrac{3\pi}{2}\right). \end{cases}$$

On reconnaît immédiatement que ces quatre points sont les sommets d'un carré inscrit dans un cercle dont le rayon est égal à 4 et dont le centre I a pour coordonnées $-4$ et 0. C'est précisément le cercle (K). Comme ce cercle est fixe, la grandeur du carré est indépendante de $\alpha_0$.

D'autre part les coordonnées du point $M_k$ sont

$$x = \frac{\cos(4\alpha_0 + k\pi)}{\cos^2\left(\alpha_0 + \frac{k\pi}{4}\right)}, \qquad y = \frac{\sin(4\alpha_0 + k\pi)}{\cos^2\left(\alpha_0 + \frac{k\pi}{4}\right)};$$

ces valeurs sont visiblement des fonctions rationnelles de $\operatorname{tg}\alpha_0$.

Pour simplifier l'écriture, nous remplacerons dans ce qui va suivre $\alpha_0$ par $\alpha$, qui sera la variable indépendante.

La diagonale $PP_2$ a pour coefficient angulaire $\operatorname{tg} 2\alpha$, son équation est $\frac{y}{x+4} = \operatorname{tg} 2\alpha$. D'autre part, la droite OM a pour équation $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} 4\alpha$. Le lieu du point de rencontre de ces deux droites s'obtient en éliminant $\alpha$ entre ces deux équations. Or on a

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha},$$

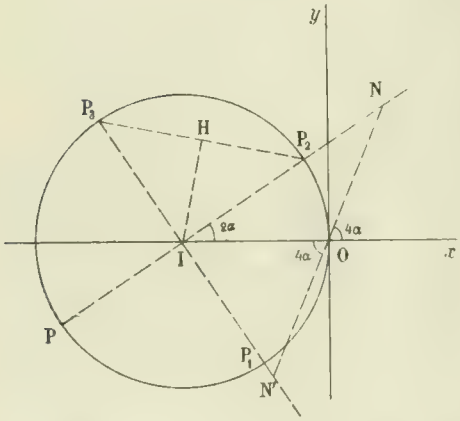
Nous remplaçerons dans cette relation $\operatorname{tg} 4\alpha$ par $\frac{y}{x}$ et $\operatorname{tg} 2\alpha$ par $\frac{y}{x+4}$, nous aurons l'équation du lieu. Nous trouvons ainsi

$$x^2 + y^2 = 16,$$

et cette équation représente un cercle ayant pour centre le point O et pour rayon 4.

On trouve de même que ce cercle est aussi le lieu du point de rencontre de OM avec la seconde diagonale $P_1P_3$ dont l'équation est $\frac{y}{x+4} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$.

Ces résultats peuvent s'établir géométriquement d'une manière fort simple. Soient en effet N et N' les points de rencontre de OM avec les droites $PP_2$ et $P_1P_3$. L'angle $NOx$ est double de l'angle NIO, par conséquent $\widehat{INO} = \widehat{OIN}$, le triangle ION est isocèle et $ON = OI$. On voit de même que $ON' = OI$, et par suite les points N et N' sont sur le cercle qui a pour centre le point O et qui passe par le point I.




Cherchons maintenant les lieux des points de rencontre des côtés du carré avec la droite $y = x \operatorname{tg}\alpha$.

Cette droite passe par le point P, par conséquent ce point est le point de rencontre de la droite avec les côtés $PP_1$ et $PP_3$; comme le point P décrit le cercle (K), on voit que ce cercle constitue une partie des lieux cherchés.

Déterminons l'équation du côté $P_2P_3$; nous pourrions nous servir pour cela des coordonnées des points $P_2$ et $P_3$, qui ont été calculées plus haut. Mais il est plus simple d'observer que si l'on abaisse IH perpendiculaire sur $P_2P_3$, IH est égal à $\frac{4}{\sqrt{2}}$ et l'angle $x$IH est égal $2\alpha + \frac{\pi}{4}$. Par suite l'équation de $P_2P_3$ est

$$(x+4)\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + y\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{\sqrt{2}} = 0,$$

ou $$(x+4)(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) + y(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) - 4 = 0,$$

ou encore $$(y + x + 4)\cos 2\alpha + \sin 2\alpha(y - x - 4) - 4 = 0.$$

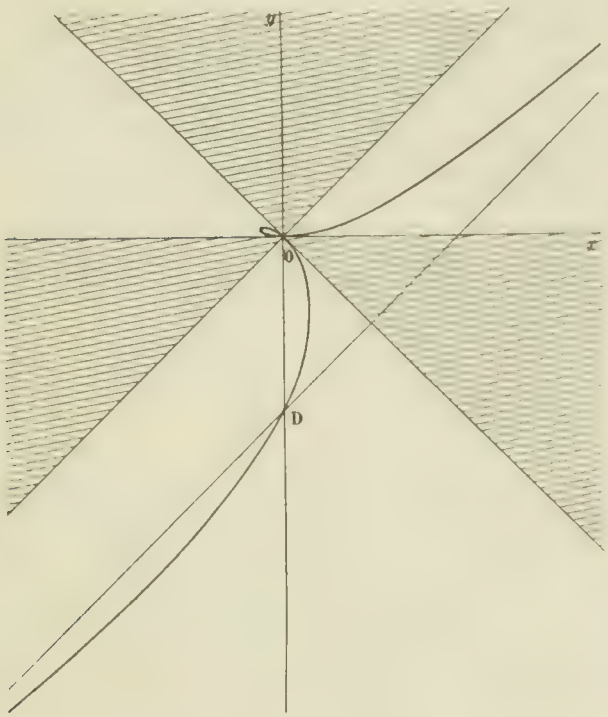
Eliminons $\alpha$ entre cette équation et l'équation $y = x \operatorname{tg}\alpha$. De celle-ci nous tirons $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

et $$\cos 2\alpha = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

et en portant ces valeurs dans l'équation précédente, nous obtenons

$$(y + x + 4)(x^2 - y^2) + 2xy(y - x - 4) - 4(x^2 + y^2) = 0,$$

ou $$(x - y)(x^2 + y^2) - 8y(x + y) = 0.$$




Telle est l'équation du lieu. Elle représente une cubique circulaire admettant à l'origine un point double réel dont les tangentes sont $y = 0$, $x - y = 0$. L'asymptote a pour équation

$$y = x - 8;$$

elle rencontre la courbe au point D ($x = 0$, $y = -8$) situé sur l'axe des $y$. Cela nous permet de placer la courbe par rapport à son asymptote.

On verrait par une méthode analogue que le lieu du point de rencontre du côté $P_1P_2$ et de la droite $y = x \operatorname{tg}\alpha$ est aussi une cubique, symétrique de la précédente par rapport à $Ox$.

D'après les notations précédentes, c'est le point $M_2$, correspondant à la valeur $\alpha + \frac{\pi}{2}$ du paramètre, qui est par rapport au point O du même côté que le point M. Comme l'équation de la courbe (C) est $\rho = \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega}{4}}$, les coordonnées polaires de M sont $\omega = 4\alpha$, $\rho = \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{4}}$, et celles du point $M_2$ $\omega_2 = 4\alpha + 2\pi$, $\rho_2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{4}}$.

Soit L le conjugué harmonique de O par rapport à M et $M_2$ ; nous avons

$$\frac{2}{OL} = \frac{1}{OM} + \frac{1}{OM_2} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_2} = \cos^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\alpha}{4} = 1;$$

par suite $OL = 2$, ce qui montre que le lieu du point L est le cercle de centre O et de rayon 2.

D'autre part la tangente au point M à la courbe (C) a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \cos^2\alpha\cos(\omega - 4\alpha) - \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\sin(\omega - 4\alpha).$$

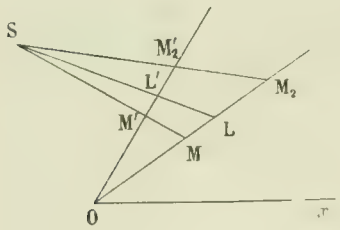
Changeons-y $\alpha$ en $\alpha + \frac{\pi}{2}$, nous obtenons l'équation de la tangente au point $M_2$ :

$$\frac{1}{\rho} = \sin^2\alpha\cos(\omega - 4\alpha) + \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\sin(\omega - 4\alpha).$$

En ajoutant ces deux équations, nous avons $\frac{2}{\rho} = \cos(\omega - 4\alpha)$,

équation qui représente une droite passant par l'intersection des deux tangentes. Mais cette droite est visiblement perpendiculaire à la droite OM $(\omega = 4\alpha)$, par suite les coordonnées du point du lieu considéré sont $\rho = 2$, $\omega = 4\alpha$; et nous voyons ainsi que le lieu est encore le cercle de centre O et de rayon 2.

On peut d'ailleurs établir géométriquement que les deux derniers lieux sont les mêmes. Considérons en effet deux sécantes voisines $OMM_2$, $OM'M'_2$, et soient L et L' les conjugués harmoniques de O par rapport aux points $M, M_2$ et $M', M'_2$. Les droites $MM'$, $M_2M'_2$ et $LL_2$ passent par un même point S. Si OM' se rapproche indéfiniment de OM, MS et $M_2S$ ont pour limites les tangentes en M et $M_2$ à la courbe (C), SL a pour limite la tangente en L au lieu du point L. Or ce lieu est un cercle de centre O, donc SL a pour limite une perpendiculaire à OM. Par suite le conjugué harmonique de O par rapport à M et $M_2$ est aussi le pied de la perpendiculaire abaissée sur la droite OM du point d'intersection des tangentes en M et $M_2$ à la courbe (C).




M. LAURENCE, lycée de Bordeaux.

Solutions par : MM. J. D. Dufaut, à Nontron ; G. Dulimbert, à Grenoble ; Joseph Franceschini ; H. Lefèvre ; J.-B. Martin, pensionnat de Valbenoite à Saint-Étienne ; M. Rebeix ; R. Bouvaist ; F. Pégorier, à Carcassonne.

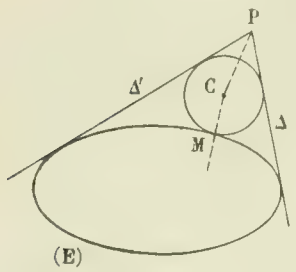
## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1148.** — *Il existe quatre cercles tangents à une ellipse et à deux quelconques de ses tangentes. Les points de contact de ces cercles avec l'ellipse sont sur l'hyperbole homofocale à cette ellipse qui passe par le point de rencontre des deux tangentes.*

Soit P le point de rencontre des tangentes $\Delta$ et $\Delta'$ à l'ellipse (E); considérons un cercle de centre C, touchant l'ellipse au point M et tangent aux droites $\Delta$ et $\Delta'$. Prenons des axes rectangulaires quelconques, désignons par $E = 0$ l'équation tangentielle de l'ellipse, et par

$$(\alpha u + \beta v + w)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0$$

celle du cercle, les coordonnées du point C étant $\alpha$ et $\beta$.




Les points P et M constituent un couple d'ombilics relatifs à l'ellipse et au cercle ; il existe donc deux nombres $\lambda$ et $\mu$ tels que l'on ait

$$\lambda E + (\alpha u + \beta v + w)^2 - R^2(u^2 + v^2) \equiv \mu PM,$$

P et M désignant les premiers membres des équations tangentielles des points P et M. De cette identité on déduit

$$\lambda E - R^2(u^2 + v^2) \equiv \mu PM - (\alpha u + \beta v + w)^2.$$

Or l'équation $\lambda E - R^2(u^2 + v^2) = 0$ représente une conique homofocale à l'ellipse (E) ; l'équation $\mu PM - (\alpha u + \beta v + w)^2 = 0$, représente une conique tangente en P et M aux droites CP et CM. On en conclut qu'il existe une conique homofocale à l'ellipse (E) et touchant les droites CP et CM respectivement aux points P et M. Cette conique est une hyperbole puisqu'elle coupe l'ellipse orthogonalement au point M, c'est donc bien l'hyperbole homofocale à l'ellipse qui passe par le point P.

Réciproquement, soit M un des points de rencontre de cette hyperbole et de l'ellipse, je dis qu'il

existe un cercle tangent en M à l'ellipse et touchant les droites $\Delta$ et $\Delta'$. En effet, soit C le point de rencontre des tangentes en M et P à l'hyperbole ; l'équation de cette courbe peut s'écrire sous l'une des formes

$$E + \lambda(u^2 + v^2) = 0, \qquad \text{ou} \qquad C^2 + \lambda' MP = 0.$$

Nous aurons donc l'identité

$$E + \lambda(u^2 + v^2) = \mu(C^2 + \lambda' MP), \qquad \text{ou} \qquad E + \lambda(u^2 + v^2) - \mu C^2 = \mu\lambda' MP.$$

Il en résulte que les points M et P sont des ombilics associés du faisceau tangentiel défini par l'ellipse (E) et par le cercle qui a pour équation tangentielle $\lambda(u^2 + v^2) - \mu C^2 = 0$. Comme le point M est sur l'ellipse, le cercle est tangent à l'ellipse au point M, ce qui démontre la proposition.

P. MONFRAIX, lycée de Toulouse.

**Autre solution**. — Considérons le cône de révolution engendré par les droites $\Delta$ et $\Delta'$ tournant autour de leur bissectrice PC, et l'ellipsoïde qui admet pour section principale l'ellipse (E) et qui est inscrit dans le cône. Toute sphère inscrite dans le cône coupe l'ellipsoïde suivant deux cercles dont les plans sont perpendiculaires aux plans de l'ellipse (E), et réciproquement par tout cercle de l'ellipsoïde il passe une sphère inscrite dans le cône.

Il résulte de là qu'il existe quatre sphères inscrites dans le cône et tangentes à l'ellipsoïde, les points de contact étant les ombilics réels situés sur l'ellipse (E). Or ces ombilics appartiennent à la focale hyperbolique de l'ellipsoïde, et comme cette focale passe aussi par le point P, le théorème est démontré.

T. CHOLLET, professeur au lycée d'Orléans, PARROD, professeur au lycée de Vesoul.

Bonnes solutions par MM. Robert Bouvaist ; Lemoyne, à Troyes ; Nicolesco, à Bucarest.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1191**. — On considère la droite D qui, rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires, a pour équations $z = 0$, $x = a$.

1° Équation de la surface S engendrée par les droites $\Delta$ qui rencontrent la droite D, l'axe des $z$ et font avec ce dernier l'angle constant $\alpha$.

2° Construire les sections de la surface S par des plans parallèles aux plans de coordonnées et les définir géométriquement.

3° Construire le contour apparent de la surface S sur le plan des $yz$.

4° Enveloppe des plans directeurs, menés par l'origine, des paraboloïdes des normales de la surface S, le lieu de leurs sommets et le lieu de leurs axes.

Th. Leconte.

**1192**. — Par un point A pris sur la courbe

$$(C) \qquad y = \frac{x^3}{x^2 - 1},$$

on mène les tangentes autres que celle qui touche la courbe en A et on désigne par B et D leurs points de contact. La droite BD rencontre (C) en un troisième point E. Cela posé, on demande, lorsque A varie :

1° De trouver le lieu du milieu du segment BD, et le lieu du point de rencontre des tangentes en A et en E ;

2° De démontrer que le point de contact de BD avec son enveloppe est le conjugué harmonique du point E par rapport aux points B et D ;

3° De trouver le lieu du centre de gravité du triangle ABD et de construire ce lieu.

J.-B. Martin.

**1193**. — Par un point P on mène deux tangentes à une ellipse, elles rencontrent l'une des directrices en A et B, démontrer que PF est bissectrice de l'angle AFB, F étant le foyer correspondant à la directrice considérée.

Robert Bouvaist.

**1194**. — Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse donnée intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales.

ROBERT BOUVAIST.

**1195**. — Un projectile de fer étant arrêté net par une plaque de blindage, à quelle température, au maximum, peut-il être porté par le choc, si on lui suppose une vitesse initiale de 700$^m$ par seconde ? Chaleur spécifique du fer 0,13.

# DEUXIÈME PARTIE

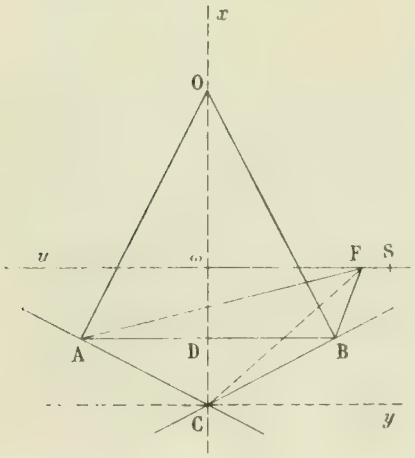
## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1152**. — *Le lieu des foyers des coniques normales aux deux côtés égaux d'un triangle isocèle, en chacun des sommets adjacents à la base du triangle, est un cercle. Le lieu des sommets est une parabole.*

Les coniques normales aux deux côtés égaux OA et OB sont tangentes aux droites respectivement perpendiculaires à celles-ci en A et B. Ces deux droites, AC et BC, se coupent sur la bissectrice de l'angle O qui est un axe de symétrie de la figure ; si donc nous prenons pour origine le point C, pour axe des $x$ la droite CO et pour axe des $y$ la perpendiculaire à CO en C, l'équation générale des coniques indiquées est

$$y^2 - m^2x^2 + \lambda(x-a)^2 = 0,$$

en désignant par $y - mx = 0$ l'équation de la droite AC et par $x - a = 0$ celle de la corde des contacts AB. Il y a un premier lieu de foyers qui coïncide avec la droite CO, ici l'axe des $x$ ; de même, un lieu de sommets.




Pour avoir les autres lieux, il faut envisager l'autre axe qui a ici pour équation $f'_x = 0$, c'est-à-dire

$$\lambda(x-a) - m^2x = 0.$$

Le lieu des sommets s'obtient immédiatement en éliminant $\lambda$ entre l'équation de la conique et celle de l'axe. On trouve ainsi

$$y^2 - m^2ax = 0,$$

qui représente bien une parabole comme il est indiqué dans l'énoncé.

Nous aurons le lieu des foyers en cherchant les longueurs des axes de la conique et écrivant que l'ordonnée est égale à $\sqrt{B^2 - A^2}$. Le procédé le plus court consiste à porter les axes au centre, c'est-à-dire à changer $x$ en $x + \frac{\lambda a}{\lambda - m^2}$ ; ce calcul donne $(\lambda - m^2)x^2 + y^2 - \frac{\lambda a^2 m^2}{\lambda - m^2} = 0$ ;

nous pouvons donc écrire $$A^2 = \frac{\lambda a^2 m^2}{(\lambda - m^2)^2}, \qquad B^2 = \frac{\lambda a^2 m^2}{\lambda - m^2}.$$

Par suite l'ordonnée du foyer est fournie par

$$y^2 = B^2 - A^2 = \frac{\lambda a^2 m^2}{\lambda - m^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda - m^2}\right);$$

d'autre part, dans l'ancien système d'axes, l'abscisse est égale à $\frac{+\lambda a}{\lambda - m^2}$ ; nous aurons donc le lieu en éliminant $\lambda$ entre l'équation précédente et l'équation $x = \frac{-a\lambda}{\lambda - m^2}$ ; ce calcul très simple nous donne l'équation

$$y^2 - am^2x\left(1 - \frac{x-a}{am^2}\right) = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 - ax(1 + m^2) = 0.$$

C'est l'équation d'un cercle passant à l'origine et ayant son centre sur $Ox$. C'est le cercle circonscrit au quadrilatère OACB.

J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist ; J.-B. Martin ; Kaddour-ben-Tahar ; P. Canet, lycée de Nancy ; J. Louin, lycée de Toulouse ; T. Lemoyne, à Troyes.

Y. Collin, à Laval ; F. Pégorier, à Carcassonne ; M. Laurence, à Bordeaux ; L. Sade, à Marseille ; H. Janois, à Châlons-sur-Marne ; R. Javelot, à Givet.

**Solution géométrique**. — Toutes les coniques du faisceau ont évidemment pour axe de symétrie la droite OC ; par suite un premier lieu de sommets et aussi de foyers est la droite OC ou $Cx$. Si on considère alors une droite quelconque $u$ perpendiculaire à OC, c'est le second axe de l'une des coniques du faisceau ; soit F un des foyers situés sur cet axe, la droite FC est bissectrice de l'angle (FA, FB) ; donc le cercle circonscrit au triangle FAB passe au point C ; il est donc fixe et le lieu de F est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Soient maintenant $\omega$ le centre de cette conique et S un sommet. Nous avons $\overline{\omega S}^2 = \overline{\omega F}^2 + b^2$, $b^2$ étant le carré du demi-axe situé sur OC ; mais C étant le pôle de AB, nous avons aussi $b^2 = \omega C . \omega D$ ; d'autre part, dans le cercle circonscrit au quadrilatère, $\overline{\omega F}^2 = \omega O . \omega C$.

Donc finalement, $\overline{\omega S}^2 = \omega C(O\omega + \omega D) = \omega C . OD$. Or, OD est fixe, $\omega C$ est l'abscisse du point S ; donc le lieu de S est une parabole ayant pour axe CO, pour sommet le point C, et pour paramètre $p = \frac{DO}{2}$. Elle passe aux points A et B.

J. HAAG.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist ; M. Laurence ; Parrod, à Vesoul ; J.-D. Dufau, à Poitiers ; J. Louin ; P. Canet ; Kaddour-ben-Tahar ; T. Lemoyne ; R. Javelot.

## GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

**1138**. — *On demande de déterminer l'intersection d'un cône circulaire avec un paraboloïde hyperbolique, les deux surfaces étant définies de la manière suivante :*

1° *Le cône a pour sommet le point* $(s, s')$ *et pour base le cercle de centre* O *situé dans le plan horizontal.*

2° *Le paraboloïde hyperbolique a comme plan directeur le plan horizontal et pour directrices rectilignes les deux droites* $(\Delta, \Delta')$ *et* $(s\theta, s'\theta')$.

*La droite* $(\Delta, \Delta')$ *est dans le plan vertical de projection, elle se confond en projection verticale avec la génératrice* $s'B'$ *du cône.*

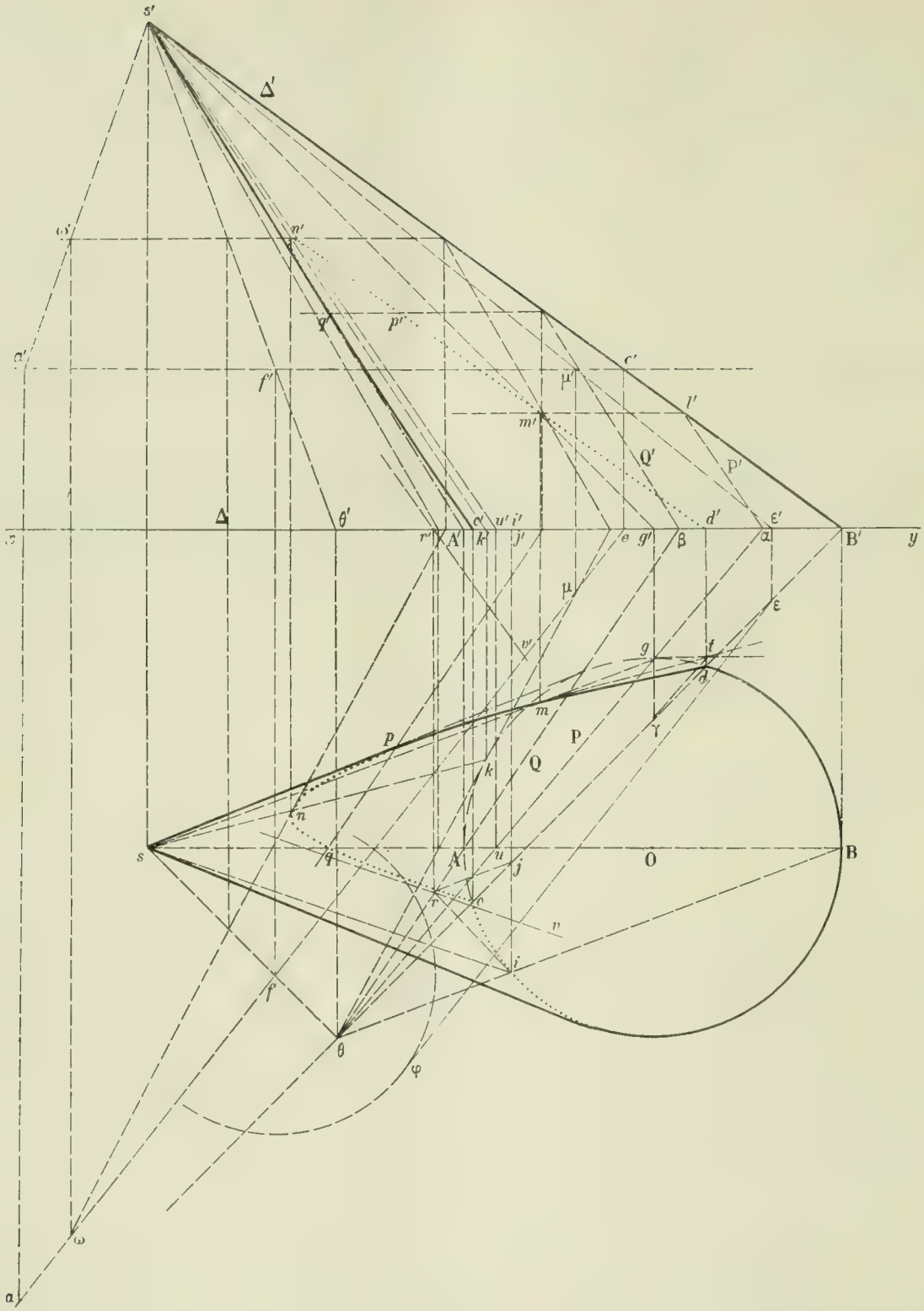
*La droite* $(s\theta, s'\theta')$ *qui passe par le sommet du cône est définie par sa trace horizontale* $(\theta, \theta')$.

*On représentera seulement la portion du cône extérieure au paraboloïde comprise entre le sommet et le plan horizontal.*

*On déterminera les asymptotes de la courbe d'intersection dont les parties extérieures au solide limité comme il vient d'être dit, se figureront en traits bleus.*

*On tracera en particulier la génératrice horizontale du paraboloïde à* $50^{mm}$ *au-dessus du plan horizontal de projection, sur laquelle on déterminera rigoureusement le point de contact du plan tangent vertical et du plan tangent à* 45° *sur le plan horizontal.*

Tableau des données : *Ligne de terre* $xy$ *parallèle aux petits côtés du cadre, à* $160^{mm}$ *du côté supé-*


s'
Δ'
ω'
n'
q'
p'
α'
c'
f'
μ'
l'
m'
Q'
P'
Δ
θ'
α
u'
i'
d'
ε'
x
r'
A'
k'
j'
e
g'
β
a
B'
y
μ
ε
v'
g
t
δ
m
p
P
γ
Q
k
n
s
q
A
u
j
O
B
r
c
v
i
f
θ
φ
ω
a

*rieur ; distance de la projetante de (ss') au côté gauche :* 25$^{mm}$ *; distance de la projetante de* θ *au côté gauche :* 85$^{mm}$ *; longueur horizontale* sO, *parallèle à* $xy$, 160$^{mm}$ *; éloignement de* s *et de* O : 100$^{mm}$ *; éloignement de* θ : 160$^{mm}$ *; cote de* s : 160$^{mm}$ *; rayon du cercle* O : 60$^{mm}$ *; cadre de* 27$^{cm}$ *sur* 45$^{cm}$.

*Titre extérieur :* GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. — *Titre intérieur :* CÔNE ET PARABOLOIDE HYPERBOLIQUE.

(*Ecole centrale, 1re session 1902.*)

*Détermination d'un point quelconque de l'intersection et de la tangente en ce point.* — Nous emploierons des plans auxiliaires passant par (sθ, s'θ') ; chacun d'eux coupera le cône suivant deux génératrices et le paraboloïde suivant une seconde génératrice.

Soit Pα la trace horizontale d'un plan auxiliaire, le plan de front sAB le coupe suivant (su, s'u') en sorte que la trace verticale de ce plan auxiliaire est αP' parallèle à s'u'. Ce plan coupe (Δ, Δ') au point L dont nous avons l' et la seconde génératrice du paraboloïde contenue dans ce plan auxiliaire, étant parallèle au plan directeur horizontal, a pour projection verticale l'm', parallèle à $xy$. Ce même plan auxiliaire coupe le cône suivant deux génératrices dont l'une est (sg, s'g') ; le point de rencontre de ces deux droites est un point (m, m') de l'intersection des deux surfaces.

La seconde génératrice du cône donnerait un second point de l'intersection. La tangente au point (m, m') est l'intersection des plans tangents. Le plan tangent au cône en ce point a pour trace horizontale gt, tangente à la base. Le plan tangent au paraboloïde est défini par les deux génératrices de cette surface qui passent par (m, m') ; nous avons la génératrice horizontale (ml, m'l'). L'autre génératrice, étant du second système, rencontre toutes les génératrices du premier système, et en particulier la droite de bout de (s, s') qui est une génératrice particulière. Donc, la projection verticale de cette seconde génératrice cherchée est s'm'g' ; cette seconde génératrice rencontre la génératrice θB', trace horizontale du paraboloïde, au point (γ, g'), et par suite γ est la trace horizontale de cette seconde génératrice. La trace horizontale du plan tangent est alors γt parallèle à ml, c'est-à-dire à Pα. La projection horizontale de la tangente est donc mt ; on en déduirait sa projection verticale.

Si l'on fait tourner Pα autour de θ, on aura autant de points que l'on voudra de l'intersection cherchée. Nous avons pris le plan limite θk, qui a donné le point le plus haut (ω, ω'), ainsi que le plan auxiliaire (QQ') qui nous a, ici, donné simultanément les points sur les contours apparents du cône.

Les points de l'intersection situés dans le plan horizontal s'obtiennent immédiatement : ce sont (c, c') et (d, d').

*Recherche des asymptotes.* — Pour avoir les génératrices parallèles sur les deux surfaces, nous menons par le sommet du cône les plans parallèles aux deux plans directeurs ; l'un est horizontal et ne coupe pas le cône ; l'autre est défini par (sθ, s'θ') et (sB, s'B') qui est parallèle à (Δ, Δ'). Ce plan coupe le cône suivant les deux génératrices (sB, s'B') et (si, s'i').

Les deux génératrices (Δ, Δ') du paraboloïde et (sB, s'B') du cône étant parallèles donnent un point de l'intersection à l'infini ; l'asymptote correspondante est l'intersection du plan tangent au cône suivant (sB, s'B') et du plan tangent à l'infini sur (Δ, Δ'). Mais le plan BB's' tangent au cône contient (Δ, Δ') qui est l'asymptote cherchée.

Cherchons maintenant la génératrice du paraboloïde parallèle à (si, s'i') ; elle est parallèle au plan directeur qui n'est pas horizontal et par conséquent sa projection verticale, passant par s', est s'i'. Cette génératrice rencontre la trace horizontale du paraboloïde en (j, j'). Le plan tangent à l'infini sur cette génératrice est parallèle au plan directeur correspondant ; sa trace horizontale est donc jr parallèle à θB, qui rencontre en r la trace horizontale du plan tangent au cône suivant (si, s'i'). On mènera par (r, r') la parallèle (rv, r'v') à (si, s'i') et on aura la seconde asymptote de l'intersection.

*Représentation de la surface du cône.* — Nous avons représenté la portion de la surface du cône extérieure au paraboloïde, c'est-à-dire que nous avons conservé les portions de génératrices du cône comprises entre son sommet, qui est sur le paraboloïde, et cette surface. La visibilité est immédiate.

*Plans tangents menés par la génératrice donnée.* — Nous avons en (ef, e'f') la génératrice de cote 50$^{mm}$. Le plan tangent vertical mené par cette génératrice coupe la surface suivant une seconde génératrice dont la projection horizontale coïncide avec ef. Une génératrice horizontale quelconque (ωn, ω'n') rencontre cette seconde génératrice au point (ω, ω') et la projection verticale de cette seconde génératrice est s'ω' qui coupe e'f' au point α' ; le point de contact de ce plan tangent vertical est donc (α, α').

Cherchons enfin le plan tangent mené par (ef, e'f') et faisant un angle de 45° avec le plan horizontal. Ce

plan passant par $(f, f'')$ est tangent au cône de révolution qui a ce point pour sommet, pour axe la verticale de ce point et pour rayon de base sur le plan horizontal de projection la cote de ce point, nous avons tracé ce cercle de base qui a pour centre $f$. La trace horizontale de ce plan tangent, qui contient $(ef, e'f'')$, est parallèle à $ef$ ; c'est $\varphi\varepsilon$ qui rencontre la trace horizontale du paraboloïde en $(\varepsilon, \varepsilon')$, d'où la projection verticale $s'\varepsilon'$ de la seconde génératrice contenue dans ce plan tangent. Elle rencontre $(ef, e'f'')$ au point de contact cherché $(\mu, \mu')$.

N. C.

# QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

## ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (1902).

### I. — Algèbre.

**104.** — Étudier les séries qui ont pour termes généraux :

$$\frac{1}{n\mathrm{L}n}, \quad e^{\frac{1}{n}} - 1, \quad \frac{(\mathrm{L}x)^{n-1}}{n!}, \quad \sqrt[n]{3} - 1, \quad e^{-n^2}, \quad e^{2n-n^2}, \quad \mathrm{L}\cos\frac{x}{2^n}, \quad x^{\sqrt{n}}.$$

**105.** — Trouver les dérivées des fonctions :

$$\sin(\arccos x), \qquad \sin \operatorname{arc\,tg} e^{x^2}, \qquad \mathrm{LL}\ldots\mathrm{L}x.$$

**106.** — Etudier les variations des fonctions :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x^x, \quad x^{-x}, \quad e^{x^x}, \quad x^{x^x}, \quad x - \operatorname{tg} x, \quad x^{-\frac{1}{x^2}}.$$

**107.** — Trouver les limites des fonctions :

$$\left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 2}\right)^x \text{ pour } x \text{ infini}, \qquad \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \text{ pour } x \text{ infini}, \qquad \frac{1}{x^3 e^{\frac{1}{x}}} \text{ pour } x = 0,$$

$$\frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)} \text{ pour } x = 0, \qquad \frac{x - \sin x}{(1 - \cos x)\mathrm{L}(1 + x)} \text{ pour } x = 0.$$

**108.** — Soit $p$ le nombre des chiffres de l'entier $n$, l'expression $\frac{p^2}{n!}$ a-t-elle une limite quand $n$ augmente indéfiniment ?

**109.** — L'expression

$$\frac{\sin x - \mathrm{L}\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{3} - \mathrm{L}\left(1 + \frac{x}{4}\right) + \cdots}{\mathrm{L}(1 + x) + \sin\frac{x}{2} + \mathrm{L}\left(1 + \frac{x}{2^2}\right) + \sin\frac{x}{2^3} + \mathrm{L}\left(1 + \frac{x}{2^4}\right) + \cdots}.$$

a-t-elle une limite pour $x = 0$ ?

**110.** — Etudier les équations :

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 = 0, \qquad x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} = 0,$$

$$x^9 - x^8 - x^5 + 2x^4 - 1 = 0, \qquad \frac{x^7}{7} - \lambda^5\frac{x^2}{2} + 1 = 0, \qquad x^5 - \frac{\lambda^2 x^3}{3} + \mu = 0,$$

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \lambda = 0, \qquad x^6 + ax^7 + bx + c = 0, \qquad \sin x = \frac{x}{20}, \qquad \mathrm{L}x = \frac{x}{3},$$

$$\sin^2 x - \sin x^3 = 0, \qquad x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x + x + 2\sin x = 0.$$

**111.** — Résoudre graphiquement le système $x + y = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 20$, en construisant les courbes représentées par ces deux équations.

**112.** — Écrire que l'équation $x^3 + px + q = 0$ n'a qu'une racine réelle qui est comprise entre les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$.

## II. — Géométrie analytique.

**113.** — Construire les courbes représentées par les équations :

$$y = x^2 + 2x - 9, \qquad 2 \operatorname{arc\,sin} x = 3 \operatorname{arc\,sin} y, \qquad x + 2y = L\frac{x - 3y}{x + 2y},$$

$$x^4 + y^4 = 1, \qquad x^{2n} + y^{2n} = 1, \qquad x^{2n+1} + y^{2n+1} = 1,$$

$$x^3 + 4x^2y - y^3 = 0, \qquad 4(x - 1)^4 + (2 - 3x + y)^2 = 0;$$

$$\rho = \omega(\omega - 1), \qquad \sin\rho = \omega, \qquad \rho = \sin\frac{1}{\omega}, \qquad \rho = \sin\frac{\omega}{6}, \qquad \rho = \frac{1}{\omega(\omega - 1)}.$$

**114.** — Ecrire que les deux systèmes de droites

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

ont une droite commune.

**115.** — Etant donnée l'équation aux coefficients angulaires des axes d'une ellipse, quelle est la racine qui correspond au grand axe ?

**116.** — Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients des équations de deux coniques

$$Ax^2 + 2Bxy + \cdots = 0, \qquad A'x^2 + 2B'xy + \cdots = 0,$$

pour que l'origine des coordonnées soit le point de rencontre de deux tangentes communes.

**117.** — Ecrire que l'hyperbole $Ax^2 + 2Bxy + \cdots = 0$ a pour axe réel 1 mètre et que les asymptotes font un angle de 45°.

**118.** — On donne une hyperbole $Ax^2 + 2Bxy + \cdots = 0$, trouver l'équation de l'axe réel.

**119.** — Démontrer qu'il passe une conique par les sommets de deux triangles autopolaires par rapport à une conique.

**120.** — Etant donnée l'hyperbole $Ax^2 + 2Bxy + \cdots = 0$, écrire que l'origine des coordonnées est entre les asymptotes et la courbe.

**121.** — Lieu des centres des coniques passant par quatre points.

**122.** — Lieu des centres des coniques tangentes aux deux axes de coordonnées et qui ont pour axes 1 mètre et 2 mètres.

**123.** — Etant données les deux coniques $Ax^2 + 2Bxy + \cdots = 0$, $A'x^2 + 2B'xy + \cdots = 0$, conditions pour qu'elles soient tangentes à l'origine et en un autre point.

**124.** — Ecrire que la droite $y = mx + p$ coupe l'hyperbole $x^2 + 3xy - y^2 + 13x + 13y = 0$ en deux points situés sur une même branche.

**125.** — Ecrire que les deux coniques $Ax^2 + \cdots = 0$, $A'x^2 + \cdots = 0$ ont un foyer commun.

**126.** — Combien y a-t-il de coniques ayant un foyer donné et passant par trois points ?

**127.** — On donne deux coniques passant par l'origine. Exprimer qu'elles sont osculatrices en un autre point.

**128.** — Equation d'une conique assujettie à avoir son centre à l'origine et à être tangente à deux coniques données.

**129.** — On donne deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$ et une droite D. Trouver sur cette droite un point M tel qu'en désignant par P et Q les projections de M sur les deux axes, la droite PQ soit à une distance donnée de l'origine.

**130.** — Etant donnée l'équation générale des courbes du troisième degré, on demande la relation qui doit exister entre les coefficients pour que la courbe ait deux points doubles.

**131.** — Equation générale des cubiques qui ont mêmes asymptotes qu'une cubique donnée.

**132.** — Etant donné le paraboloïde $xy + x + y + z = 0$, trouver sur la surface le lieu des points où le plan tangent fait avec l'axe un angle de 30°.

**133.** — Faire passer par la droite $x = y = z$ un plan qui coupe l'ellipsoïde $x^2 + y^2 + 3z^2 - 6 = 0$ suivant une conique ayant pour axe la droite $x = y = z$.

**134.** — Peut-on mener une normale commune aux deux surfaces

$$yz + zx + xy = 0 \qquad \text{et} \qquad xx^2 + 3y^2 + yz^2 + 2x + 2y + 2z = 0\,?$$

## III. — Géométrie descriptive.

**135.** — Construire un parallélépipède admettant comme arêtes la ligne de terre, une droite quelconque et une droite de profil.

**136.** — Déterminer la plus courte des horizontales qui rencontrent deux droites données.

**137.** — Mener par une droite un plan perpendiculaire au plan bissecteur du premier dièdre.

**138.** — On considère un cylindre ayant pour directrice un cercle tangent à la ligne de terre et situé dans un plan passant par la ligne de terre et un point. Trouver les contours apparents de ce cylindre et sa trace sur le plan horizontal.

**139.** — On donne un cercle dans le plan horizontal. Construire un cylindre ayant ce cercle pour directrice et coupant le plan vertical suivant un cercle. On considère le cylindre vertical ayant pour directrice le cercle donné. Intersection des deux cylindres.

**140.** — Trouver les asymptotes de la section faite par le plan horizontal de projection dans un cône circonscrit à une sphère donnée.

**141.** — Intersection d'un tore et d'un cylindre dont l'axe est perpendiculaire à l'axe du tore et qui a pour directrice le cercle générateur du tore.

**142.** — Intersection d'un cône et d'un cylindre ayant pour directrice commune un cercle horizontal.

**143.** — Plans tangents communs à une sphère et à un cône de révolution.

**144.** — On donne un paraboloïde de révolution, un point A et une droite D. Qu'ont de commun tous les cercles, projections horizontales des sections faites par les plans passant par le point A ou par la droite D ?

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1196.** — Lieu des foyers des paraboles de grandeur constante qui passent par deux points donnés. Construire la courbe.

E.-N. Barisien.

**1197.** — On considère les cercles $\Sigma$ tangents au cercle fixe C et à la droite fixe D. Le lieu des centres de similitude des cercles C et $\Sigma$ se compose du cercle C et d'une conique. Discuter le genre de la conique et voir quelle doit être la position de D par rapport à C pour que la conique soit : 1° une hyperbole équilatère ; 2° une parabole ; 3° un système de deux droites.

E.-N. Barisien.

**1198.** — On donne deux axes rectangulaires $x'x, y'y$ se coupant au point O et sur $Oy$ un point A $(OA = h)$. Un angle droit tourne autour du point A et détermine avec $x'x$ un triangle rectangle ABC. Etudier comment varie la longueur $y$ de la médiane BM de ce triangle quand le point B parcourt la demi-droite $Ox$ $(OB = x)$. Tracer la courbe qui représente les variations de cette fonction.

Chercher pour quelles valeurs de $x$ la fonction $y$ prend une valeur donnée $l$ et mettre ces valeurs sous la forme d'une somme ou d'une différence de deux radicaux simples. En déduire une construction de la courbe par points.

**1199.** — Une cloche cylindrique a une hauteur extérieure $a$, une hauteur intérieure $b$, une section extérieure $s$, une section intérieure $\sigma$, un poids $m$. On la place verticalement, l'ouverture en bas, sur l'eau et on suppose qu'elle flotte d'abord en équilibre stable. L'eau est contenue dans une éprouvette de section S qu'on ferme, à une certaine distance au-dessus de la cloche, par un piston sans frottement. Quelle charge M doit-on mettre sur ce piston, poids du piston compris, pour faire couler la cloche au fond de l'eau ?

*Application numérique :* $a = 20^{cm}$, $b = 19^{cm}$, $s = 18^{cmq}$, $\sigma = 16^{cmq}$, $m = 248^{gr}$.

La température est 0°, la hauteur barométrique $H = 75^{cm}$, la masse spécifique du mercure $\mu = 13{,}6$, celle de l'eau $e = 1$ et celle de l'air négligeable.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

13e Année. N° 7 Avril 1903.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### NOTE SUR UNE CUBIQUE

par M. **A. Vacquant**, professeur au lycée de Nancy.

Il s'agit du problème suivant :

On considère les coniques S inscrites à un triangle ABC et telles que les normales aux points de contact soient concourantes. Trouver le lieu de leur point de concours.

Ce problème est connu ; on en trouve, par exemple, l'énoncé dans l'ouvrage de M. Papelier : *Leçons sur les coordonnées tangentielles*, première partie, page 284, avec l'équation du lieu en coordonnées trilinéaires et les principales propriétés. Ce lieu est une cubique générale. Je me propose, dans cette note, de donner une solution géométrique du problème.

**1.** Tout d'abord je vais montrer que le lieu peut être considéré comme celui des points communs aux éléments homologues de deux faisceaux homographiques de droites et d'hyperboles. Soient (*fig.* 1) D, E, F les points de contact d'une conique S avec les côtés BC, CA, AB du triangle ABC, les normales en ces points concourant en P. Si EF coupe BC en $\alpha$, le point $\alpha$ est conjugué harmonique de D par rapport aux points B et C, puisque les droites AD, BE, CF sont concourantes. Cherchons combien il y a de points du lieu sur la perpendiculaire EE′ au côté AC du triangle ABC. Faisons tourner la droite EF autour du point E ; le point D, conjugué harmonique de $\alpha$ par rapport aux points B, C, et le point F décrivent sur BC et BA des divisions homographiques à la division $\alpha$, donc homographiques entre elles. Les perpendiculaires DD′ et FF′ à BC et BA décrivent des faisceaux homographiques ayant pour sommets les points à l'infini $D'_\infty$, $F'_\infty$ des perpendiculaires à BC et BA. Les rayons homologues de ces faisceaux se coupent sur une hyperbole $\eta$ dont les directions asymptotiques sont les perpendiculaires à BC et BA. Pour la position AC de la droite EF on voit que l'hyperbole $\eta$ passe par le point de rencontre B′ des perpendiculaires AB′ et CB′ aux côtés BA et CA du triangle. Il y a autant de points du lieu sur la perpendiculaire EE′ à AC que de points communs à EE′ et à l'hyperbole $\eta$, c'est-à-dire deux au plus à distance finie. Quand le point E décrit la droite AC, les hyperboles $\eta$ passent par les points fixes B, B′, $D'_\infty$, $F'_\infty$ et les droites EE′ par le point fixe $E'_\infty$. Ces droites EE′ et les hyperboles $\eta$ forment des faisceaux homographiques. Le lieu cherché est donc une cubique $\Gamma$ définie comme le lieu des points d'intersection des éléments homologues de ces faisceaux homographiques de droites et d'hyperboles. On voit aussi que $\Gamma$ passe par les sommets A, B, C du triangle, par les points A′, B′, C′, symétriques de A, B, C par rapport au centre

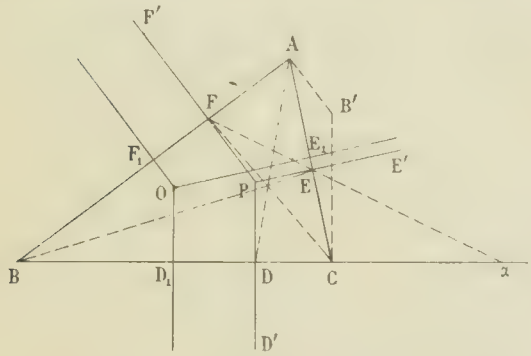


Fig. 1.

O du cercle circonscrit au triangle, et par les points $D'_\infty$, $E'_\infty$, $F'_\infty$, c'est-à-dire que $\Gamma$ a pour directions asymptotiques les perpendiculaires aux côtés du triangle. (Consulter, par exemple, la Revue, 1899, page 137).

D'ailleurs la cubique $\Gamma$ passe évidemment par les centres $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ des cercles inscrit et exinscrits au triangle, car ces cercles sont des coniques S ; elle passe aussi par le point de concours H des hauteurs du triangle, car les pieds de ces hauteurs peuvent être pris pour points de contact d'une conique S avec les côtés du triangle.

Les asymptotes de $\Gamma$ sont les perpendiculaires $OD_1$, $OE_1$, $OF_1$ aux côtés BC, CA, AB du triangle. En effet, si le point E vient en $E_1$, milieu de AC, sur la perpendiculaire $OE_1$, l'hyperbole $\eta_1$ correspondante au point $E_1$ passe par le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, comme on le voit en prenant la sécante $E_1F_1$ ; le centre O étant sur le diamètre BB′ de ce cercle, on a trois points B, O, B′ en ligne droite sur l'hyperbole $\eta_1$ qui se décompose dès lors dans cette droite BOB′ et la droite de l'infini ; donc, sur la direction asymptotique $OE_1$, il y a un seul point O du lieu à distance finie et par suite $OE_1$ est une asymptote ; il en est de même de $OD_1$ et $OF_1$.

2. Je vais maintenant donner une autre définition de la cubique $\Gamma$ en partant de cette propriété : *elle est à elle-même sa transformée par points inverses*, le triangle de référence étant ABC. En effet (*fig.* 2), je peux considérer un point quelconque P de la cubique $\Gamma$ comme le foyer d'une conique $\Sigma$ tangente aux trois côtés du triangle ; soit P′ le deuxième foyer de cette conique ; si D, E, F et D′, E′, F′ sont les projections des points P et P′ sur les côtés BC, CA, AB du triangle, on sait que les six points D, E, F, D′, E′, F′ sont sur le cercle principal de la conique $\Sigma$. Je dis que la conique S′ tangente en E′, F′ à AC, AB et qui passe par D′ est tangente en D′ à BC. Pour cela il suffit de prouver que les trois droites AD′, BE′, CF′ concourent. Or, par hypothèse, P étant sur $\Gamma$, les droites AD, BE, CF concourent, et on a, d'après la théorie des transversales,

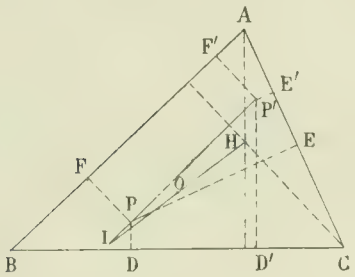


Fig. 2.

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB} = -1,$$

mais, dans le cercle DEFD′E′F′, on a

$$DB \times D'B = FB \times F'B,$$
$$EC \times E'C = DC \times D'C,$$
$$FA \times F'A = EA \times E'A,$$

et par suite

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB} = \frac{D'C}{D'B}\cdot\frac{F'B}{F'A}\cdot\frac{E'A}{E'C} = -1,$$

et la dernière égalité prouve que les droites AD′, BE′, CF′ concourent. Donc le point P′ appartient à $\Gamma$ ; d'ailleurs les foyers P et P′ de la conique $\Sigma$ étant des points inverses par rapport au triangle ABC, la propriété est démontrée.

Il est facile ensuite de montrer que les cordes PP′ de $\Gamma$ passent par un point fixe I appartenant à $\Gamma$ et situé aussi sur HO puisque H et O sont inverses et appartiennent à $\Gamma$. En effet, considérons le point I commun aux droites HO et PP′, et la cubique $\Gamma_1$ définie comme lieu des points communs aux éléments homologues des faisceaux homographiques des droites I$\Delta$ et des coniques $\Phi$ inverses de ces droites ; les coniques $\Phi$ passent par A, B, C et I′ inverse de I. Cette cubique $\Gamma_1$ passe par A, B, C, $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, H, O, P, P′, I et I′ ; les onze premiers de ces points appartiennent à $\Gamma$ ; donc $\Gamma$ coïncide avec $\Gamma_1$ et par suite passe par I (et aussi par I′), c'est-à-dire que les cordes PP′ de $\Gamma$ passent par un point fixe I de $\Gamma$ appartenant à HO.

Si l'on considère la droite $I\omega_0$, comme le point $\omega_0$ est à lui-même son inverse, on voit que $I\omega_0$ est tangente en $\omega_0$ à $\Gamma$; de même $I\omega_1$, $I\omega_2$, $I\omega_3$ sont respectivement tangentes à $\Gamma$ aux points $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$; donc P et P′ sont conjugués dans la transformation du second ordre admettant $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ comme points doubles et A, B, C pour pôles, (on peut consulter, par exemple, Picquet, *Géométrie analytique*, page 555, et E. Duporcq, *Principes de géométrie moderne*, page 136) et on peut énoncer le résultat suivant :

La cubique $\Gamma$ est le lieu des points de contact des tangentes issues du point I aux hyperboles équilatères passant par les points $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$.

Il reste à déterminer ce point I : c'est le troisième point commun à HO et à $\Gamma$; il est tel que si on le projette en $d$, $e$, $f$ sur BC, CA, AB, les droites A$d$, B$e$, C$f$ concourent. Or on voit facilement, en appliquant la théorie des transversales, que le symétrique de H par rapport à O jouit de cette propriété ; par suite ce symétrique est le point I; donc :

*La cubique $\Gamma$ est le lieu des points de contact des tangentes issues du point* I, *symétrique de* H *par rapport à* O, *aux hyperboles équilatères passant par les points* $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$.

J'ajouterai, soit comme application de la transformation par points inverses, soit comme application d'un théorème sur les cubiques (Picquet, page 556), que les tangentes à la cubique $\Gamma$ issues du point I de $\Gamma$ ont pour points de contact A, B, C et I.

## NOTE DE GÉOMÉTRIE

par M. **T. Lemoyne**, à Troyes.

Je me propose de donner, dans cette note, une généralisation du théorème 2 de la note de M. E. Legrand (voir le N° de juin 1902) relative à un quadrilatère inscrit dans un cercle. Voici l'énoncé de ce théorème :

*Lorsqu'un quadrilatère est inscrit dans un cercle, les cercles des neuf points des quatre triangles* ABC, ABD, ACD, BCD *se coupent en un même point* $\omega$. *Les cercles des neuf points des triangles formés par les quatre orthocentres passent aussi au même point.*

Considérons un quadrilatère quelconque ABCD et supposons que l'un des sommets ne soit pas l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. Il y a dans ce cas une hyperbole équilatère et une seule passant aux quatre sommets. Cette hyperbole passe aussi aux quatre orthocentres des triangles ABC, ABD, ACD, BCD; soient $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ ces points. On sait en outre que le centre d'une hyperbole équilatère circonscrite à un triangle est sur le cercle des neuf points de ce triangle; donc tous les cercles des neuf points des triangles formés par les huit points mentionnés passent par un même point $\omega$.

D'autre part, si nous remarquons que l'hyperbole équilatère est conjuguée par rapport au triangle diagonal du quadrangle ABCD, nous voyons que le cercle circonscrit à ce triangle passe aussi au point $\omega$.

Quand l'un des quatre points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres, tous les cercles indiqués coïncident.

*Remarque.* — Il est facile de se rendre compte du nombre de cercles que l'on obtient ainsi : il semble a priori qu'il y ait autant de cercles des neuf points qu'il y a de combinaisons des huit points A, B, C, D, $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ trois à trois, c'est-à-dire 56; il n'en est rien, car les quatre combinaisons des points A, B, C, $H_1$ donnent le même cercle; il y a quatre groupes de ce genre, il faut donc retrancher 16 combinaisons qui ne donnent en tout que quatre cercles; cela fait en tout 44 cercles des neuf points, plus le cercle circonscrit au triangle diagonal du quadrangle, par suite, 45 cercles qui passent au point $\omega$.

## QUESTION D'EXAMEN

*Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation*

$$x^5 + px^3 + qx + r = 0$$

*ait toutes ses racines réelles et distinctes.*

Cette équation présente deux lacunes ; il faut d'abord que les équations binomes correspondantes n'aient pas de racines imaginaires, par conséquent, que $p$ soit négatif et $q$ positif. Les deux premières conditions sont donc $p < 0$, $q > 0$.

Cela posé, prenons l'équation dérivée

$$5x^4 + 3px^2 + q = 0\,;$$

c'est une équation du second degré en $x^2$ dont la somme des racines est positive et dont le produit des racines est aussi positif ; les deux valeurs de $x^2$ seront donc positives si la quantité sous le radical est positive, c'est-à-dire si

$$9p^2 - 20q > 0.$$

C'est une troisième condition.

Soient alors

$$-\alpha,\ -\beta,\ \beta,\ \alpha,$$

les quatre racines réelles de la dérivée. La suite de Rolle est

$$-\infty,\ -\alpha,\ -\beta,\ \beta,\ \alpha,\ +\infty,$$

et les valeurs de $f(x)$ qui correspondent aux nombres de cette suite ne doivent présenter que des variations. Les autres conditions sont donc

$$f(-\alpha) > 0, \qquad f(-\beta) < 0, \qquad f(\beta) > 0, \qquad f(\alpha) < 0\,;$$

nous allons montrer qu'elles se réduisent à deux. En effet, en écrivant que

$$f(-\alpha)f(-\beta) < 0,$$

et

$$f(\alpha)f(\beta) < 0,$$

nous écrivons qu'il y a une racine dans le second intervalle et une dans l'avant-dernier ; donc il y en a une dans le premier et une dans le dernier ; dès lors, l'équation a quatre racines réelles, donc elle en a cinq.

Mais les conditions écrites antérieurement assurent la réalité des quatre nombres $-\alpha$, $-\beta$, $\beta$, $\alpha$ ; donc les deux inégalités que nous venons de trouver peuvent se remplacer par

$$f(-\alpha)f(-\beta)f(\beta)f(\alpha) > 0,$$

et

$$f(-\alpha)f(-\beta) + f(\beta)f(\alpha) < 0.$$

Le premier membre de la première inégalité est le résultant entre le polynome et sa dérivée ; c'est une fonction symétrique des racines de cette dernière ; on peut donc la calculer en fonction des coefficients de la dérivée et l'exprimer sous forme entière à l'aide des coefficients $p$, $q$, $r$.

Pour calculer la seconde, nous réduisons d'abord $f(x)$ au troisième degré par le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes en nous appuyant sur l'identité

$$5f(x) \equiv xf'_x + f'_y\,;$$

pour les racines de la dérivée, $5f(x) = f'_y$ et la deuxième inégalité peut s'écrire

$$f'_y(-\alpha)f'_y(-\beta) + f'_y(\beta)f'_y(\alpha) < 0\,;$$

or

$$f'_y \equiv 2px^3 + 4qx + 5r,$$

par suite, en divisant par 2, on obtient l'inégalité

$$\alpha\beta(2p\alpha^2 + 4q)(2p\beta^2 + 4q) + 25r^2 < 0\,;$$

mais

$$(2p\alpha^2 + 4q)(2p\beta^2 + 4q)$$

est une fonction symétrique des racines de l'équation du second degré en $x^2$

$$5x^4 + 3px^2 + q = 0\,;$$

sa valeur, aisée à calculer, est

$$\frac{4p^2q}{5} - \frac{24p^2q}{5} + 16q^2$$

ou

$$16q^2 - 4p^2q.$$

L'inégalité cherchée devient donc

$$4\alpha\beta q(4q - p^2) + 25r^2 < 0;$$

elle exige d'abord que $4q - p^2$ soit négatif ou $q < \frac{p^2}{4}$; d'ailleurs celle-ci peut remplacer l'inégalité

$$9p^2 - 20q > 0,$$

qui équivaut à

$$q < \frac{9p^2}{20}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$25r^2 < 4\alpha\beta q(p^2 - 4q),$$

et élever les deux membres de cette nouvelle inégalité au carré; ce calcul nous donne

$$\overline{25}^2 r^4 < 16q^2 \left(\frac{q}{5}(p^2 - 4q)\right)^2,$$

et finalement

$$5^5 r^4 < 16q^3 (p^2 - 4q)^2.$$

Cette dernière relation oblige $q$ à être positif; donc enfin les conditions cherchées sont

$$p^2 < 20, \quad q < \frac{p^2}{4}, \quad R > 0 \qquad \text{et} \qquad 5^5 r^4 < 16q^3 (p^2 - 4q)^2.$$

R désignant le résultant du polynome et de sa dérivée, c'est-à-dire le discriminant.

Il était évident a priori que $r$ n'entrerait dans les conditions que par son carré, car changer $r$ en $-r$ revient à changer $x$ en $-x$ et n'a aucune influence sur la réalité des racines de l'équation.

Nous pouvons maintenant calculer facilement le résultant R entre l'équation proposée et sa dérivée, c'est-à-dire la fonction symétrique

$$f(-\alpha)f(-\beta)f(\beta)f(\alpha).$$

Nous remplacerons encore ici $f(x)$ par $f'_y(x)$ et nous évaluerons le produit

$$f'_y(-\alpha)f'_y(-\beta)f'_y(\beta)f'_y(\alpha)$$

qui ne diffère du précédent que par le facteur $5^4$. Nous avons vu que

$$f(-\alpha)f(-\beta) - f(\beta)f(\alpha)$$

est égal à

$$8\alpha\beta q(4q - p^2) + 50r^2;$$

il nous suffit donc de calculer la différence

$$f'_y(\alpha)f'_y(\beta) - f'_y(-\alpha)f'_y(-\beta)$$

et de faire ensuite la différence des carrés; or

$$f'_y(\alpha)f'_y(\beta) - f'_y(-\alpha)f'_y(-\beta)$$

est égal à

$$20r[p(\alpha^2 + \beta^2) + 2q(\alpha - \beta)]$$

ou à

$$20r(\alpha - \beta)[p(\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta) - 2q],$$

et, comme $\alpha^2 + \beta^2 = -\frac{3p}{5}$, nous aurons finalement

$$20r(\alpha - \beta)\left(2q - \frac{3p^2}{5} - p\alpha\beta\right).$$

Effectuons maintenant le carré de cette expression que nous aurons à retrancher du carré de

$$8\alpha\beta q(4q - p^2) - 50r^2;$$

nous aurons d'abord

$$400r^2(\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta)\left(2q - \frac{3p^2}{5} - p\alpha\beta\right)^2$$

ou
$$400r^2\left(2\alpha\beta - \frac{3p}{5}\right)\left[\frac{p^2q}{5} + \left(2q - \frac{3p^2}{5}\right)^2 - 2p\alpha\beta\left(2q - \frac{3p^2}{5}\right)\right],$$
le coefficient de $\alpha\beta$ est
$$400r^2\left[\frac{2p^2q}{5} + 2\left(2q - \frac{3p^2}{5}\right)^2 + \frac{6p^2}{5}\left(2q - \frac{3p^2}{5}\right)\right],$$
ou, toutes réductions faites,
$$800r^2q(4q - p^2).$$
C'est le même que le coefficient de $\alpha\beta$ dans l'autre carré; par suite le terme en $\alpha\beta$ disparaît dans la différence des carrés. Donc
$$4f'_y(\alpha)f'_y(\beta)f'_y(-\alpha)f'_y(-\beta)$$
s'évalue immédiatement en fonction de $\alpha^2\beta^2$; c'est
$$64q^2\alpha^2\beta^2(4q - p^2)^2 + \overline{50}^2r^4 + 400r^2\left[\frac{3p^3q}{25} + \frac{3p}{5}\left(2q - \frac{3p^2}{5}\right)^2 + 4p\alpha^2\beta^2\left(2q - \frac{3p^2}{5}\right)\right].$$

Il n'y a qu'à y remplacer $\alpha^2\beta^2$ par $\frac{q}{5}$ pour avoir R à un facteur numérique près; nous trouvons ainsi
$$\frac{64q^3}{5}(4q - p^2)^2 + \overline{50}^2r^4 + 400r^2\left[\frac{3p^2q}{5} + \frac{3p}{5}\left(2q - \frac{3p^2}{5}\right)^2 + \frac{4pq}{5}\left(2q - \frac{3p^2}{5}\right)\right],$$
ou enfin, en achevant les calculs indiqués dans le dernier crochet,
$$16q^3(4q - p^2)^2 + 5^5r^4 + 4r^2p(500q^2 - 165p^2q + 27p^4).$$

Il n'y a plus qu'à écrire que cette quantité est positive et à joindre l'inégalité ainsi trouvée aux trois inégalités
$$p < 0, \qquad q < \frac{p^2}{4}.$$
$$5^5r^4 < 16q^3(4q - p^2)^2.$$

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1144.** — *Le paramètre tangentiel d'un cône du second degré est* $\frac{\Sigma(AA' - B'^2)}{\sqrt[3]{\Delta^2}}$.

*Montrer que si on considère un cône circonscrit à une quadrique, son paramètre tangentiel a pour expression*
$$I = \frac{P}{\sqrt[3]{a^2b^2 . SK . SC}},$$
*où* P *est la puissance du sommet* S *de ce cône par rapport à la sphère orthoptique de la quadrique, où* $a^2$ *et* $b^2$ *sont les carrés de deux demi-axes de la quadrique,* SC, *la distance du point* S *au plan principal de ces axes, et* SK, *la distance du point* S *à son plan polaire.*

Si on prend pour origine le sommet du cône et pour axes des parallèles aux directions principales de la quadrique, l'équation de cette quadrique est
$$A(x - \alpha)^2 + B(y - \beta)^2 + C(z - \gamma)^2 + D = 0;$$
celle du cône est
$$(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D)[A(x - \alpha)^2 + B(y - \beta)^2 + C(z - \gamma)^2 + D] - [A\alpha(x - \alpha) + B\beta(y - \beta) + C\gamma(z - \gamma) - D]^2 = 0.$$

Cette équation se réduit évidemment aux termes du second degré et prend la forme plus simple
$$(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D)(Ax^2 + By^2 + Cz^2) - (A\alpha x + B\beta y + C\gamma z)^2 = 0.$$

En posant, pour abréger,
$$K = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D,$$

les coefficients que l'on désigne habituellement par A, A′, A″, B, B′, B″, sont :

$$AK - A^2\alpha^2, \qquad -BC\beta\gamma,$$
$$BK - B^2\beta^2, \qquad -CA\gamma\alpha,$$
$$CK - C^2\gamma^2, \qquad -AB\alpha\beta.$$

et l'on a

$$AA' - B''^2 = K(ABK - AB^2\beta^2 - A^2B\alpha^2)$$

ou

$$AA' - B''^2 = ABK(K - A\alpha^2 - B\beta^2) = ABK(C\gamma^2 + D);$$

par suite,

$$\Sigma(AA' - B''^2) = ABCK(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + ABCDK\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right).$$

Or, en désignant par $a^2$, $b^2$, $c^2$ les carrés des longueurs des demi-axes de la quadrique, on a

$$\frac{1}{A} = -\frac{a^2}{D}, \qquad \frac{1}{B} = -\frac{b^2}{D}, \qquad \frac{1}{C} = -\frac{c^2}{D}.$$

et

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{D};$$

donc finalement

$$\Sigma(AA' - B''^2) = ABCK(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2 - b^2 - c^2).$$

D'autre part, le discriminant $\Delta$ est égal à

$$ABCDK^2;$$

donc le paramètre I est égal à

$$I = \frac{ABC(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2 - b^2 - c^2)}{\sqrt[3]{A^2B^2C^2D^2K}}$$
$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2 - b^2 - c^2}{\sqrt[3]{\dfrac{D^2K}{ABC}}};$$

Comme

$$\frac{1}{ABC} = -\frac{a^2b^2c^2}{D^3},$$

on a finalement

$$I = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2 - b^2 - c^2}{\sqrt[3]{-\dfrac{a^2b^2c^2K}{D}}};$$

d'ailleurs la distance de l'origine à son plan polaire est égale à

$$SK = \frac{\pm K}{\sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2}}.$$

Les coordonnées du point C où la perpendiculaire abaissée de S sur son plan polaire rencontre le plan principal des axes $a$ et $b$ sont données par

$$\frac{x}{A\alpha} = \frac{y}{B\beta} = \frac{z}{C\gamma}, \qquad \text{pour} \qquad z = \gamma;$$

on a donc

$$SC = \frac{\sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2}}{C},$$

et, par suite,

$$SK.SC = \frac{K}{C};$$

en outre

$$-\frac{Cc^2}{D} = 1;$$

donc
$$I = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2 - b^2 - c^2}{\sqrt[3]{a^2 b^2 . SK . SC}},$$
ce qui démontre le théorème annoncé.

L'énoncé est incomplet ; il fallait dire que SC désigne la distance du point S au plan principal des axes $a$ et $b$ comptée sur la perpendiculaire SK au plan polaire.

## PHYSIQUE

**1123.** — *Un solide a la forme d'un prisme droit dont la base* ABC, *horizontale, est un triangle équilatéral dont la hauteur a* 3 *centimètres. Ce solide est monté sur un axe vertical, passant par le centre* O *de la base, qui permet de le faire tourner d'un mouvement uniforme, à raison de* 10 *tours par seconde.*

*On suppose d'abord que ce prisme est formé d'une substance transparente et qu'il est éclairé par un faisceau parallèle de rayons lumineux dirigés horizontalement. Pour ces rayons, qui sont monochromatiques, l'indice de la substance formant le prisme est égal à* $\sqrt{3}$. *A la suite de ce prisme tournant, on dispose une lunette astronomique dont l'axe optique est horizontal.*

*Montrer que cet axe optique doit être incliné de* 60° *au moins sur la direction des rayons incidents pour que des rayons qui ont traversé le prisme sans subir aucune réflexion viennent converger au foyer principal de l'objectif.*

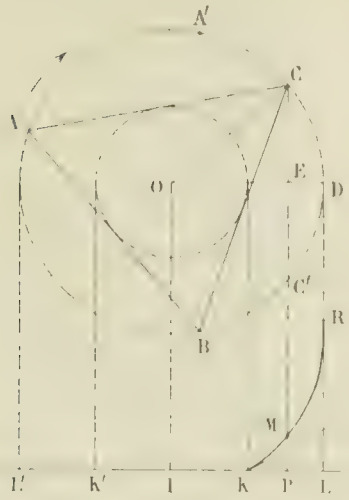
*On recouvre maintenant les faces de ce prisme d'un vernis noir parfaitement absorbant, et on l'éclaire par le même faisceau. Etudier l'ombre portée par le solide tournant sur un écran normal à la direction des rayons incidents. On admettra qu'un éclairement discontinu agissant pendant la fraction* $\frac{1}{p}$ *du temps total produit sur l'œil la même impression qu'un éclairement continu* $p$ *fois plus faible.*

*On suppose enfin que les faces de ce prisme sont argentées et parfaitement réfléchissantes et qu'il est éclairé pendant sa rotation par une source lumineuse très petite placée en un point* S, *à* $3^{cm}$ *de distance de l'axe de rotation. L'œil d'un observateur, placé de manière à recevoir des rayons réfléchis, aperçoit une ligne lumineuse. Montrer que cette ligne appartient à une courbe plane* C *dont on donnera la définition géométrique et dont on indiquera sommairement la forme. Dans quelle région du plan horizontal passant par* S *devra être situé l'œil, pour qu'il aperçoive un point donné* M *de cette courbe ?*

*Montrer qu'il y a un arc de cette courbe* C, *relative au point* S, *qui restera toujours invisible, quelle que soit la position de l'œil, si la source placée en* S *est réelle. Décrire un dispositif qui permettrait de rendre cet arc visible.*

**1.** Pour que la lunette reçoive des rayons ayant traversé le prisme, il faut que son axe fasse avec la direction des rayons incidents un angle au moins égal au minimum de déviation D ; or ce dernier est lié à l'angle et à l'indice du prisme par la formule connue
$$\sin \frac{A + D}{2} = n \sin \frac{A}{2},$$
qui devient ici $\sin \frac{60^\circ + D}{2} = n \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60^\circ$ ; donc $D = 60^\circ$.

**2.** Supposons maintenant le prisme opaque et considérons l'ombre qu'il porte sur un écran IL normal aux rayons lumineux. Elle se compose évidemment d'une partie centrale, KK′, de 2 centimètres de




largeur, parfaitement noire, bordée de deux zones dégradées, KL et K'L', larges d'un centimètre chacune, dans lesquelles l'éclairement variera depuis zéro jusqu'à l'éclairement de la partie éclairée d'une façon continue. Etudions l'éclairement des divers points de KL.

Soit I la projection du centre O de la base du prisme sur l'écran, et P un point de l'ombre, d'abscisse $x$ par rapport à I ; la parallèle menée par P à la direction des rayons lumineux rencontre le cercle circonscrit à ABC en C et C'. Supposons que le prisme tourne dans le sens de la flèche, et considérons l'un des sommets de la base ; tant que ce sommet parcourra l'arc CC', le point P ne sera pas éclairé. Quand un sommet C sera venu en C', le sommet suivant, A, sera venu en A' et, à partir de cet instant, le point P restera éclairé jusqu'à ce que A soit venu à son tour en C, c'est-à-dire pendant que le prisme tournera de A'C. Les arcs A'C et CC' représentent donc les durées relatives des éclairements et des éclipses. Or on a

$$A'C = A'C' - CC' = 120^\circ - 2CD$$

et, dans le triangle COE, $OE = OC \cos CD$ ou $\cos CD = \frac{x}{2}$,

donc
$$A'C = 120^\circ - 2 \arccos \frac{x}{2}.$$

La durée de la rotation du prisme est $\frac{1}{10}$ de seconde et il y a 3 éclipses par tour. La durée de l'éclairement en P pendant un tour du prisme sera donc

$$\frac{1}{10} \times 3 \times \frac{A'C}{360} = \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{60} \arccos \frac{x}{2}\right).$$

Si nous prenons pour unité d'éclairement celui des points de l'écran qui sont extérieurs à l'ombre portée, on voit que l'éclairement en P sera donné par la formule

$$y = 1 - \frac{1}{60} \arccos \frac{x}{2},$$

dans laquelle l'arc doit être exprimé en degrés. Si on exprime cet arc en fonction du rayon, la formule doit s'écrire

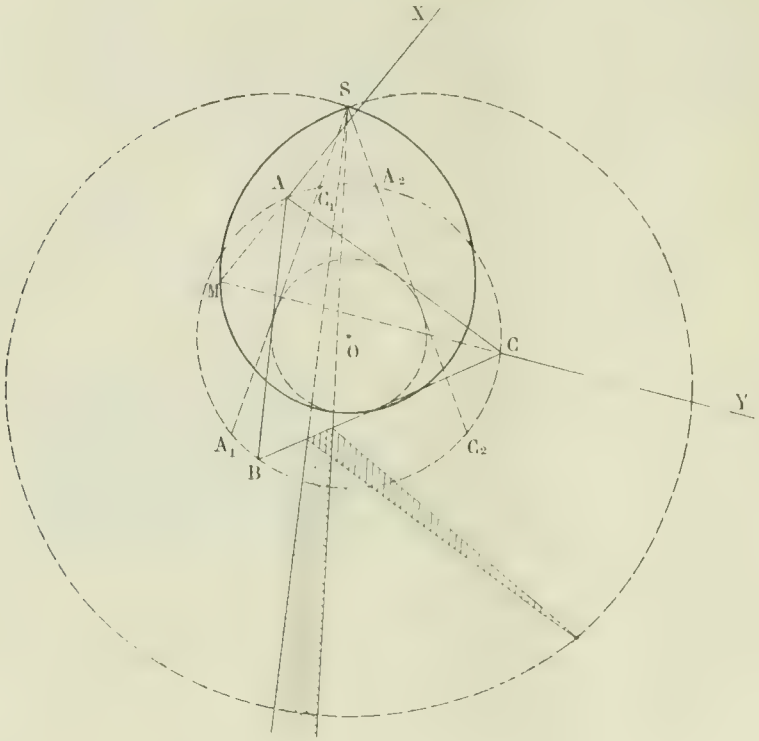
$$y = 1 - \frac{3}{\pi} \arccos \frac{x}{2}.$$

Représentons cet éclairement par l'ordonnée PM. Si $x$ croit de 1 à 2, $y$ varie, comme cela doit être a priori, de 0 à 1. Formons la dérivée de $y$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\pi\sqrt{4 - x^2}}.$$

Cette dérivée varie de $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ à l'infini, ce qui permet de tracer d'une manière vraisemblable la courbe KMR représentative de l'éclairement.

3. Supposons maintenant que les faces du prisme réfléchissent la lumière issue de S. L'image M du point S donnée par la face AC est symétrique de S par rapport à AC. Pendant la rotation, AC




enveloppe un cercle d'un centimètre de rayon ; le milieu de SM décrit la podaire de ce cercle par rapport à S, c'est-à-dire un limaçon de Pascal et le point M décrit un limaçon homothétique du premier par rapport à S. Pour que S donne une image, il est nécessaire qu'il soit du côté de la face réfléchissante, ce qui fait que M ne décrira que la boucle intérieure du limaçon, car M viendra en S quand le prolongement de AC passera par ce point. L'œil pourra donc apercevoir cette boucle ou une partie seulement de cette boucle.

Pour que l'œil de l'observateur aperçoive un point donné, M, de la courbe, il doit être compris dans l'angle AMC formé par les rayons réfléchis extrêmes. Supposons AC dans la position $A_1C_1$ dont le prolongement passe par S ; les deux côtés de l'angle AMC sont alors confondus suivant cette droite. Quand la face AC, en tournant, ira prendre la position symétrique $A_2C_2$, le faisceau réfléchi aura balayé tout l'espace compris dans l'angle rentrant $A_1SC_2$. Donc de tout point situé à l'intérieur de cet angle, on pourra voir une partie de la courbe décrite par M, et de tout point extérieur on ne verra rien.

Nous avons supposé la source S réelle ; alors les rayons qui en émanent doivent, pour donner une image, rencontrer la surface réfléchissante. Mais si la source S est virtuelle, il est possible que les rayons lumineux qui se croisent en ce point rencontrent une face du prisme dans une position quelconque ; alors la seconde boucle du limaçon devient visible. On peut imaginer, à cet effet, ou bien que les rayons incidents tournent en même temps que le prisme, tout en convergeant au point fixe S, ou bien que l'on envoie des rayons convergeant en S à l'aide de sources situées dans des directions diverses. Par exemple, plaçons en S une source réelle ; recueillons une partie de sa lumière avec une lentille convergente placée dans le voisinage et, à l'aide de miroirs convenablement disposés, ramenons le faisceau ainsi intercepté en S de façon qu'il tombe sur le prisme du côté opposé à son point de départ. La seconde boucle devient visible et réelle, comme le montre la portion de faisceau indiquée sur la figure, et si le faisceau de retour est assez large, on aura cette boucle toute entière.

M. LAURENCE, lycée de Bordeaux.

# QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

## ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

### I. — Mathématiques (M. Tannery).

**431.** — Résoudre algébriquement

$$(x + i\sqrt{1-x^2})^m + (x - i\sqrt{1-x^2})^m = 2A,$$

sans faire intervenir de lignes trigonométriques.

Discussion. — Les racines sont-elles distinctes, réelles ?

**432.** — Construire une conique connaissant un foyer et trois tangentes. Construire le deuxième foyer ; — le cercle directeur ayant pour centre ce second foyer.

Comment sera modifiée la solution si on donne un foyer, deux tangentes et un point ; — un foyer et trois points ?

**433.** — Définition d'un système de diamètres conjugués dans une quadrique à centre — Équation d'une quadrique rapportée à trois diamètres conjugués.

Réalité des points de rencontre de trois diamètres conjugués et de la quadrique. — Cas de l'hyperboloïde à une nappe.

**434.** — On donne l'équation

$$(1) \qquad (\lambda a' + a)x^2 + 2(\lambda b' + b)x + (\lambda c' + c) = 0.$$

Conditions pour qu'elle ait deux racines égales.

Démontrer que si l'une des équations $ax^2 + 2bx + c = 0$, $a'x^2 + 2b'x + c' = 0$ a ses racines imaginaires, l'équation (1) a ses racines réelles.

Le discriminant de (1) égalé à 0 est une équation du 2e degré en $\lambda$. Cette équation en $\lambda$ a elle-même un discriminant qui est une fonction de $a$, $b$, $c$. Si on considère $a$, $b$, $c$ comme les coordonnées d'un point, que représente l'équation obtenue en égalant la fonction à 0 ?

**435.** — On donne deux coniques :

$$f(x, y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

et une droite $ux + vy + w = 0$, qui ne rencontre pas $f$.

Combien de coniques du faisceau $f + \lambda\varphi$ sont tangentes à la droite ? En écrivant la condition on aurait une équation en $\lambda$. Démontrer qu'elle a ses racines réelles.

Énoncer et démontrer la proposition analogue pour l'espace.

**436.** — Construire la courbe

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2}.$$

Ayant supprimé la droite qu'elle contient, décomposer la courbe qui reste. Généralisation du calcul fait : si l'on a la courbe $Ay^2 + 2By + C = 0$ (A, B, C sont des polynomes en $x$) et que $B^2 - AC = P^2$, démontrer que dans les fractions $\frac{-B+P}{A}$, $\frac{-B-P}{A}$, le numérateur et le dénominateur ont un facteur commun.

**437.** — Si l'on pose

$$y = x + \frac{1}{x},$$

montrer que $P_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ s'exprime rationnellement en fonction de $y$.

Montrer que

$$P_n = yP_{n-1} - P_{n-2}.$$

Ramener la question au calcul de la somme des puissances $n^{es}$ des racines d'une équation.

Montrer que les racines du polynome $P_n$ en $y$ sont séparées par les racines de $P_{n-1}$ et sont par suite toutes réelles. Calculer ces racines. Calculer les racines de

$$P_n = a^n + \frac{1}{a^n}.$$

On considère la courbe

$$P_n = x^n + \frac{1}{x^n};$$

se décompose-t-elle ? Parties réelles, parties imaginaires.

**438.** — Deux quadriques qui ont en commun une courbe plane en ont une seconde. Équation générale des quadriques qui passent par une conique donnée.

**439.** — Limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ dans le cas de $m$ entier et positif.

**440.** — Plans diamétraux dans les quadriques.

Cas particulier où la direction donnée est asymptotique.

Cas particulier du paraboloïde. Incidemment : étude de la section d'un paraboloïde hyperbolique par un plan.

**441.** — Etude analytique de la distance d'un point fixe à un plan tournant autour d'une droite.

**442.** — $x, y, z$ étant les coordonnées d'un point, on considère la surface

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2xYZ + 2yZX + 2zXY = 0.$$

Conditions pour qu'elle représente deux plans. On obtient ainsi l'équation d'une surface. Etudier ses sections par des plans voisins de $z = 1$. Variations de l'angle des deux plans quand $(x, y, z)$ décrit la droite de la surface située dans $z = 1$.

**443.** — Développement de $L(1 + x)$.

**444.** — Conique passant par cinq points. Discussion analytique du problème.

**445.** — Equation générale des coniques bitangentes à la conique $f(x,y) = 0$ aux points de rencontre avec $ax + by + c = 0$.

**446.** — Etant donnée une quadrique rapportée à ses axes, trouver l'équation des quadriques concentriques et ayant mêmes plans cycliques.

On rend constant l'un des paramètres de l'équation, de façon à avoir un faisceau ponctuel de quadriques. Montrer qu'il y a alors trois de ces quadriques tangentes à un plan donné, qu'elles sont réelles, que les droites joignant l'origine aux points de contact forment un trièdre trirectangle.

**447.** — Degré du résultant obtenu en éliminant $x$ entre $f(x) = 0$ et $f(x) - y = 0$. La résolution de l'équation en $y$ obtenue en annulant ce résultant peut-elle servir à résoudre $f(x) = 0$ et comment ?

**448.** — Méthode d'approximation de Newton. L'appliquer à $x^3 - 100x + 1 = 0$ en se servant de la courbe $x^3 - xy + 1 = 0$.

**449.** — Exprimer qu'un plan est tangent à une quadrique.

**450.** — Génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe rapporté à ses axes ordinaires. Lieu des perpendiculaires communes à ces génératrices et à $Oz$. Projection sur le plan des $xy$ de l'intersection de ce lieu avec l'hyperboloïde.

**451.** — On donne un point M, de coordonnées $x, y, z$, par rapport à trois axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$, et une droite $O\lambda$ passant par l'origine. On fait tourner M autour de $O\lambda$ d'un angle V. Coordonnées de la nouvelle position M' de M (On introduit le moment du vecteur $OA = \operatorname{tg}\frac{V}{2}$ pris sur $O\lambda$ par rapport au milieu K de MM').

**452.** — Propriétés des cubiques gauches.

**453.** — Equation générale des quartiques ayant pour point double l'origine. Etude de ces courbes.

**454.** — La conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

coupe le faisceau

$$(a + \lambda a')x^2 + 2(b + \lambda b')xy + (c + \lambda c')y^2 = 0$$

en quatre points. Enveloppe de la droite qui joint deux de ces points. Etude du cas particulier où $b = b' = 0$.

**455.** — Trièdre trirectangle inscrit dans un cône de degré quelconque ; le problème est-il déterminé ? A-t-il toujours des solutions ? Cas du cône de second degré.

## Mathématiques (M. Borel).

**456.** — Somme des puissances semblables des racines d'une équation algébrique.

**457.** — Construire la courbe

$$x = \frac{t^2 - 3}{t^3}, \qquad y = \frac{2(t^2 - 2)}{t^3}.$$

Quelle est sa classe ? Propriétés des tangentes issues d'un point. Lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires.

**458.** — Développement en série de $(1 + x)^m$.

**459.** — Lieu du point commun aux droites

$$t^2x + ty + 1 = 0, \qquad t^2(ax + by + c) + t(a'x + b'y + c') + a''x + b''y + c'' = 0$$

quand $t$ varie. — Recherche des points doubles.

**460.** — Sur le cercle $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, on considère les points définis par les paramètres $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Trouver l'équation de la parabole passant par ces quatre points. Interprétation géométrique des résultats obtenus.

**461.** — Série de Taylor.

**462.** — Théorème de Descartes.

**463.** — Etude de la courbe

$$x = \frac{1}{t - a}, \qquad y = \frac{1}{t - b}, \qquad z = \frac{1}{t - c}.$$

On considère les tétraèdres $m_1 m_2 m_3 m_4$ dont les sommets sont sur la courbe et dont les arêtes opposées sont rectangulaires. Les hauteurs de ces tétraèdres concourent en un point de la cubique.

Le cône dont le sommet est un point quelconque de la courbe et la directrice la courbe elle-même est capable d'une infinité de trièdres trirectangles.

**464.** — Déterminants. — Définition ; propriétés ; développement.

**465.** — On donne la conique

$$x = \frac{at^2 + bt + c}{a''t^2 + b''t + c''}, \qquad y = \frac{a't^2 + b't + c'}{a''t^2 + b''t + c''}.$$

$M_1$, $M_2$ étant les points définis par $t_1$, $t_2$, trouver l'équation de $M_1M_2$. Enveloppe de cette droite quand

$$\alpha t_1 t_2 + \beta t_1 + \beta t_2 + \gamma = 0.$$

Cas où $\beta = \beta'$ ; cas général.

**466.** — Théorème de Rolle.

**467.** — On considère en coordonnées rectangulaires la courbe

$$x = t^2, \qquad y = t^3, \qquad z = t^4.$$

Degré de cette courbe. Relation entre les $t$ de 4 points de cette courbe situés dans un même plan.

Intersection de la courbe avec une sphère. Relation entre les $t$ de 8 points situés sur une même sphère. Si 4 de ces points sont dans un même plan, les 4 autres le sont aussi. Condition pour que les 4 points de la courbe situés dans un plan soient sur un cercle. Surface engendrée par ce cercle quand le plan se déplace parallèlement à lui-même.

**468.** — Résolution de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues.

**469.** — On donne en coordonnées rectangulaires la courbe

$$x = t^3 - t, \qquad y = t^2 - t^4.$$

Construire cette courbe.

Intersection avec une droite. Relation entre les $t$ de trois points en ligne droite.

Recherche des points d'inflexion.

Intersection avec une conique. Relation entre les $t$ de six points placés sur une même conique. L'appliquer à la recherche des coniques tritangentes à la courbe. Équation générale des coniques passant par l'origine et bitangentes à la courbe. Recherche des coniques coupant la courbe en 6 points confondus en un seul.

**470.** — On donne une ellipse et un cercle qui a pour centre un foyer de l'ellipse ; on demande le lieu du pôle par rapport au cercle d'une normale variable à l'ellipse.

**471.** — Construire la courbe

$$x^2 = (t-a)(t-b),$$
$$y^2 = (t-c)(t-d)$$

Discussion.

**472.** — On considère les deux coniques

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2x = 0,$$
$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2y = 0,$$

on demande le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites au triangle MNP formé par les trois points communs à ces coniques autres que l'origine. Quelle est la position du lieu trouvé par rapport au triangle. Équation du cercle circonscrit au triangle ; trouver les coordonnées de son orthocentre.

**473.** — Soit la courbe

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi.$$

condition pour que les points correspondants aux paramètres $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ soient sur un même cercle.

## Physique (M. Cotton.)

**474.** — Spectroscope.

**475.** — Oculaire à micromètre.

**476.** — Variations de $g$. Incidemment : équation aux dimensions d'une vitesse angulaire ; qu'est-ce que la force centrifuge ?

**477.** — Manomètres. Cas des hautes pressions et des basses pressions.

**478.** — Lunette astronomique. Mesure du grossissement.

**479.** — Achromatisme dans les prismes et les lentilles.

**480.** — Mesure de la tension maxima de la vapeur d'eau pour les températures voisines de la température ambiante.

**481.** — Mesure de la distance focale d'une lentille divergente.

**482.** — Anomalies de l'œil.

**483.** — Baromètre-balance.

**484.** — Capillarité. — Formule de Laplace.

**485.** — Miroirs concaves.

**486.** — Mesure du coefficient de dilatation de l'air par Regnault.

**487.** — Mesure du coefficient de dilatation du mercure par Regnault.

**488.** — Mesure de la vitesse de la lumière par la méthode de Foucault.

**489.** — Détermination du coefficient de dilatation du mercure par Regnault.

**490.** — Lunette de Galilée. — Mise au point.

**491**. — Densité des gaz.

**492** — Niveau à bulle d'air. — A l'aide du niveau comment rend-on un plan horizontal ?

**493**. — Mesure de la distance minima de la vision distincte.

**494**. — Lunette astronomique. — Mise au point et grossissement.

**495**. — Mesure de la densité des solides par la méthode du flacon.

**496**. — Comment reconnaît-on que la chambre d'un baromètre contient de l'air ? Correction correspondante des mesures faites avec ce baromètre.

**497**. — Réglage d'un collimateur pour l'infini.

**498**. — Chaleur spécifique des gaz. — Méthode de Regnault pour la détermination de C.

**499**. — Détermination de l'aberration longitudinale d'un miroir.

**500**. — Poids d'un volume donné d'air humide connaissant la pression et l'état hygrométrique.

**501**. — Détermination du centre optique d'une lentille plan-convexe.

**502**. — Mesure des indices de réfraction par la méthode de la réflexion totale.

**503**. — Mesure des tensions maxima de la vapeur d'eau aux hautes températures.

**504**. — Phénomènes capillaires.

**505**. — Calorimètre à glace de Bunsen.

**506**. — Indices de réfraction des gaz. — Méthodes de Biot et Arago et de Dulong.

**507**. — Oculaire d'Huyghens.

**508**. — Rendre un miroir vertical, le rendre horizontal, l'incliner à 45°.

**509**. — Chaleur spécifique des solides.

**510**. — Vitesse de la lumière. — Méthode de Fizeau.

**511**. — Principe des hygromètres à condensation. — Masse d'un volume d'air humide.

**512**. — Formation de l'image et marche des rayons lumineux dans le microscope. — Variation de l'image définitive avec la distance de visée et la distance frontale. Miroirs de Foucault.

**513**. — Appareil de Mr Berthelot pour la chaleur de vaporisation.

**514**. — Loupe.

**515**. — Balance.

**516**. — Propriétés et usages de l'anneau oculaire dans les instruments d'optique, en particulier dans le télescope de Newton.

**517**. — Distribution des images dans un système de deux miroirs plans inclinés.

(*A suivre.*)

## QUESTIONS PROPOSÉES

**2000**. — Étant données deux coniques S et S′ de centres O et O′, une tangente à S parallèle à OO′ est rencontrée par les quatre tangentes communes aux deux coniques aux points $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. Montrer que si M est le point de contact de la tangente et si $a$ est la longueur du demi-diamètre de S dirigé suivant OO′, on a

$$MA_1 . MA_2 . MA_3 . MA_4 = a^4.$$

VASNIER.

**2001**. — Étant donnée une hypocycloïde à trois rebroussements, on mène par chaque point A de la courbe la droite Δ qui fait avec la tangente en A un angle donné θ. Par un point M du plan passent trois droites Δ auxquelles correspondent trois points $A_1$, $A_2$ et $A_3$.

1° Trouver le lieu S des points M tels que les trois points $A_1$, $A_2$, $A_3$ soient sur une même droite D et montrer que ce lieu ne dépend pas de θ.

2° Trouver l'enveloppe des droites D correspondant à l'angle θ et étudier les variations de cette enveloppe quand θ varie.

3° Trouver l'enveloppe des droites D correspondant à un même point M de S et étudier les variations de cette enveloppe quand M se déplace sur S.

L. BICKART.

**2002**. — Étant données deux droites rectangulaires $Ox$ et $Oy$ et une circonférence touchant ces deux droites, démontrer que le foyer d'une parabole touchant $Ox$, $Oy$ et la circonférence donnée décrit une circonférence tangente à $Ox$ et $Oy$.

Démontrer que la corde de contact de la parabole avec l'angle $xOy$ enveloppe une hyperbole équilatère ayant pour foyer le point O.

Robert Bouvaist.

**2003.** — L'équation

$$x^n + \frac{n^2}{1!\,n}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!\,n^2}x^{n-2} + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!\,n^3}x^{n-3} + \ldots = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Montrer que si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$f^{(n)} + \frac{n^2}{1!\,n}f^{(n-1)}(x) + \frac{n^2(n-1)^2}{2!\,n^2}f^{(n-2)}(x) + \ldots = 0.$$

N. Abramescu, étudiant à Bucarest.

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE CENTRALE 1902, 1re session, *fin*.

### Trigonométrie.

PROBLÈME

**1139.** — *Dans un trapèze* ABCD, *on donne les deux bases* DA $= d$, BC $= b$, *le côté* AB $= a$ *et la surface* S :

1° *Calculer les angles et le côté* CD *du trapèze :*

2° *Calculer les angles et le côté* CD *dans l'hypothèse*

$$S = \frac{d+b}{2}\sqrt{a^2 - (d-b)^2};$$

3° *Construire les solutions précédentes sur les données suivantes :*

$$a = 8^{\text{cm}}, \qquad b = 4^{\text{cm}}, \qquad d = 7^{\text{cm}}.$$

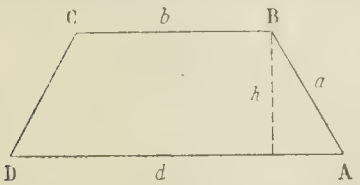
Désignons par $h$ la hauteur du trapèze, on a

$$S = \frac{d+b}{2} \times h,$$

d'où on tire

$$h = \frac{2S}{d+b};$$

on est donc ramené à déterminer un trapèze connaissant les deux bases $d$, $b$, le côté $a$ et la hauteur $h$.




1° *Calcul des angles et du côté* CD.

Il suffira pour déterminer les angles du trapèze de calculer les angles A et D. Or on a

$$h = a \sin A$$

d'où

$$\sin A = \frac{h}{a} = \frac{2S}{a(d+b)}.$$

Cette valeur n'est acceptable que si

$$\frac{2S}{a(d+b)} \leqslant 1 \qquad \text{ou encore} \qquad 2S \leqslant a(d+b).$$

Supposons cette condition remplie; à la valeur trouvée pour $\sin A$ correspondront deux angles, l'un aigu, l'autre obtus, acceptables tous les deux. Le problème admettra deux solutions.

Reste à calculer le côté $c$ et l'angle D. Nous aurons les deux équations :

$$h = c \sin D,$$
$$d = c \cos D + b + a \cos A,$$

dans lesquelles il faut remplacer $h$ par sa valeur $\frac{2S}{d+b}$ et $\cos A$ par

$$\pm\sqrt{1 - \frac{4S^2}{a^2(d+b)^2}} = \pm\frac{\sqrt{a^2(d+b)^2 - 4S^2}}{a(d+b)},$$

le signe $+$ correspondant à A aigu, le signe $-$ à A obtus. On a donc

$$c \sin D = \frac{2S}{d+b}.$$

$$c \cos D = \frac{d^2 - b^2 \mp \sqrt{a^2(d+b)^2 - 4S^2}}{d-b},$$

d'où

$$c^2 = (d-b)^2 + a^2 \mp 2\frac{d-b}{d-b}\sqrt{a^2(d+b)^2 - 4S^2},$$

$$\operatorname{cotg} D = \frac{d^2 - b^2 \mp \sqrt{a^2(d+b)^2 - 4S^2}}{2S};$$

ces formules résolvent le problème dans le cas général. Il serait facile de les rendre calculables par logarithmes.

2° *Cas particulier où* $S = \frac{d+b}{2} \cdot \sqrt{a^2 - (d-b)^2}$. — Dans ce cas

$$h = \sqrt{a^2 - (d-b)^2}.$$

$$\sin A = \frac{h}{a} = \sqrt{1 - \frac{(d-b)^2}{a^2}}.$$

$$\cos A = \pm\frac{d-b}{a}.$$

(supposant $d > b$ pour fixer les idées).

Les équations qui donnent $c$ et D deviennent

$$c \sin D = \sqrt{a^2 - (d-b)^2}.$$
$$c \cos D + b \pm (d-b) = d.$$

Prenant le signe $+$, il vient

$$c \cos D = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \cos D = 0, \qquad D = 90^\circ.$$
$$c = \sqrt{a^2 - (d-b)^2}\ (= h).$$

On a un premier trapèze ayant un angle aigu en A; l'angle B supplémentaire de A est obtus, les angles C et D droits.

Prenant le signe $-$, on trouve

$$c \cos D = 2(d-b).$$
$$c \sin D = \sqrt{a^2 - (d-b)^2},$$

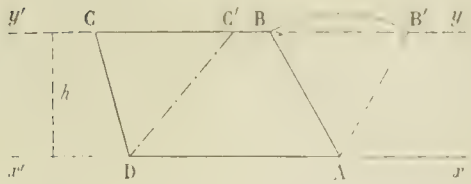
d'où

$$c^2 = a^2 + 3(d-b)^2,$$

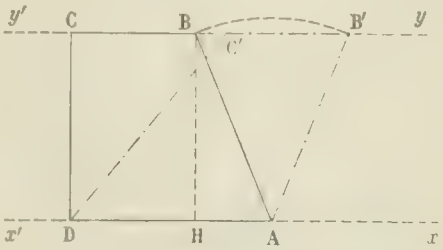
$$\operatorname{cotg} D = \frac{2(d-b)}{\sqrt{a^2 - (d-b)^2}}.$$

On a ainsi un second trapèze présentant un angle obtus en A; l'angle B est aigu, l'angle D aigu également et l'angle C, supplémentaire de D, obtus.

3° *Construction du trapèze.* — Prenons d'abord le cas général ; on donne $d$, $a$, $b$ et la surface S, ce qui revient à donner $d$, $a$, $b$ et la hauteur $h$. Nous tracerons deux droites parallèles $x'x$, $y'y$ dont la distance soit égale à $h$. Sur l'une d'elles, $x'x$, nous prendrons $AD = d$ et du point A comme centre avec un rayon égal à $a$ nous décrirons encore un cercle qui coupera $y'y$ $(a \geqslant h)$ en deux points B et B'. En portant sur la gauche $BC = B'C' = b$ nous obtiendrons




les sommets C et C' des deux trapèzes répondant à la question ; savoir ABCD ayant un angle aigu en A, AB'C'D ayant un angle obtus en A.




Dans le cas particulier du n° 2, $h$ est le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est $AB = a$ et l'autre côté $AH = d - b$. Ce triangle a été construit sur la figure avec les données numériques de l'énoncé réduites au tiers (n° 3). $AB = a = 8^{cm}$, $AH = d - b = 3^{cm}$. Connaissant $h$, on trace la droite $y'y$ parallèle à $x'x$. La construction s'achève comme précédemment.

P. L.

Bonne solution de M. A. Haour, élève de Mathématiques Supérieures au lycée de Lyon et de M. Joseph Franceschini, lycée de Marseille.

---

## Calcul

**1140.** — *Calculer le plus petit des angles positifs qui satisfont à l'équation*

$$\log \sin^2 x = (\log a^3)^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\alpha = 146^\circ\, 58'\, 27''\, 13, \qquad a = 1.240561.$$

L'équation proposée peut s'écrire

$$\log \sin^2 x = -(\log a^3)^2 \times \operatorname{tg}(\pi - \alpha).$$

Désignons par $\varphi$ l'arc du premier quadrant défini par l'équation

$$\log \sin^2 \varphi = -(\log a^3)^2 \operatorname{tg}(\pi - \alpha).$$

L'équation proposée devient

$$\log \sin^2 x = \log \sin^2 \varphi,$$

d'où

$$\sin^2 x = \sin^2 \varphi,$$

$$\sin x = \pm \sin \varphi = \sin(\pm \varphi).$$

On en déduit deux séries de solutions :

$$x' = 2k\pi \pm \varphi,$$

$$x'' = (2k+1)\pi \mp \varphi,$$

qu'on peut réunir dans la formule unique

$$x = k\pi \pm \varphi.$$

Nous aurons le plus petit des angles positifs répondant à la question en prenant

$$x = \varphi$$

L'équation qui donne l'arc $\varphi$ peut encore s'écrire

$$2 \operatorname{colog} \sin \varphi = (\log a^3)^2 \operatorname{tg}(\pi - \alpha).$$

Prenant les logarithmes des deux membres, il vient

$$\log 2 + \log[\operatorname{colog} \sin \varphi] = 2 \log(3 \log a) + \log \operatorname{tg}(\pi - \alpha),$$

d'où

$$\log[\operatorname{colog} \sin \varphi] = 2 \log 3 + 2 \log(\log a) + \log \operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{colog} 2.$$

Faisant le calcul, on trouve

$$\log[\operatorname{colog}\sin\varphi] = \overline{2},4088777.$$

On en déduit

$$\operatorname{colog}\sin\varphi = 0,0256376,$$
$$\log\sin\varphi = \overline{1},9743624,$$
$$\varphi = 70^\circ 30' 21'',21.$$

P. L.

# QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

## ECOLE CENTRALE (1902).

### Arithmétique (M. Combette).

**2021.** — Preuve par 9 de la division.

**2022.** — $\Delta$ étant le plus grand commun diviseur entre A et B, quel est le plus grand commun diviseur entre $A^3$ et $B^3$ ?

**2023.** — Si un nombre N est divisible séparément par trois nombres A, B, C premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.

**2024.** — Plus petit multiple commun de deux nombres A et B non décomposés en leurs facteurs premiers.

**2025.** — Plus petit multiple commun de trois nombres A, B, C premiers entre eux deux à deux.

**2026.** — Le produit de cinq nombres entiers consécutifs est divisible par 5 !

**2027.** — Si $m$ est un nombre premier, $C_m^p$ est divisible par $m$.

**2028.** — Sachant que 16 et 21 sont premiers entre eux, démontrer que la fraction $\frac{16}{21}$ est irréductible. La fraction $\frac{16^3}{21^3}$ est-elle aussi irréductible ?

**2029.** — Condition pour qu'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ soit égale à une fraction dont le dénominateur est une puissance de 15.

**2030.** — Calculer les produits

$$8,591 \times \pi \text{ à } \frac{1}{1000} \text{ près,}$$
$$\pi \times \sqrt{3} \text{ à } \frac{1}{100}, \text{ à } \frac{1}{1000} \text{ près,}$$
$$\pi \times e \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près,}$$
$$e^2 \text{ à } \frac{1}{1000} \text{ près,}$$
$$\pi^3 \text{ à } \frac{1}{100}, \text{ à } \frac{1}{1000} \text{ près.}$$

**2031.** — Calculer les quotients

$$\frac{45,7}{0,28} \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près,}$$
$$\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{e}{\sqrt{5}} \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près,}$$
$$\frac{3}{\pi}, \frac{\pi}{e} \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près.}$$

**2032.** — Calculer

$$\sqrt{\pi} \text{ à } \frac{1}{100}, \text{ à } \frac{1}{1000} \text{ près,}$$
$$\sqrt{\frac{7,8}{e}} \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près,}$$
$$\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près.}$$

**2033.** — Démontrer que $\sqrt[mp]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}$. Appliquer au calcul de $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{\pi}$ à $\frac{1}{100}$ près.

**2034.** — Les dimensions d'un rectangle sont $45^m,7$ et $38^m,6$ à $\frac{1}{10}$ près. Avec quelle approximation peut-on avoir sa surface ? — Même question avec un rectangle dont les dimensions sont $2^m,39$ et $1^m,75$ à $\frac{1}{100}$ près.

**2035.** — La surface latérale d'un cône droit à base circulaire est $32^{dm}1,7$ ; l'apothème mesure $23^{cm}$. Calculer le rayon de base à $1^{mm}$ près.

**2036.** — La surface d'un cercle est $42^{mq}1,37$. — Calculer son rayon à $\frac{1}{100}$ près.

**2037.** — La surface d'un cercle est 381 ares. — Calculer son rayon à $1^{m}$ près.

**2038.** — Le volume d'un cylindre est de $753^{dmc}$ ; la hauteur est de $2^{m}$ ; calculer le rayon de base à $1^{m}$ près.

## Algèbre (M. Combette).

**2039.** — Résoudre le système $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$ par la méthode de substitution.

**2040.** — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 11, \\ 2x + 3y - 4z = 5, \\ 3x + y + z = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y + z = 1, \\ 4x + 3y - 3z = 3, \\ 7x + y - 2z = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 12y + 3z = 2, \\ 5x - 3y - 2z = 3, \\ 2x - 4y - 3z = 5. \end{cases}$$

Employer la méthode des coefficients indéterminés.

**2041.** — Discuter les systèmes

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ 3x - 2y + 3z = 0, \\ 7x - 5y + 4z = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 2y - 3z = 0, \\ x - 3y + 4z = 0, \\ 5x - y + z = 0. \end{cases}$$

**2042.** — Déterminer les coefficients A, B, C d'un polynome du second degré, de façon que ce polynome prenne les valeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ pour les valeurs $a$, $b$, $c$ de la variable $x$.

**2043.** — Conditions pour que les deux équations $ax^2 + bx + c = 0$, $a'x^2 + b'x + c' = 0$ aient : 1° une racine commune ; 2° deux racines communes.

**2044.** — Résoudre l'inégalité :

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} < \frac{x + 1}{x + 2}.$$

**2045.** — Transformer $\sqrt{A - \sqrt{B}}$ en une expression de la forme $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, $x$ et $y$ étant rationnels.

**2046.** — Rendre rationnel le dénominateur de la fraction $\frac{1}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}}$.

**2047.** — Démontrer la formule $C_m^p = C_{m-2}^p + 2C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-2}$.

**2048.** — Soient $m$ lettres $a, b, c \ldots l$. Quel est le nombre des termes de la forme $ab^3c^2$, $ab^2c^2$ que l'on peut former avec ces $m$ lettres ?

**2049.** — Nombre des termes du développement de $(a + b + c + d)^4$. — Coefficient du terme en $a^3c$.

**2050.** — Développer $(a + b + c + d)^{10}$ par la formule du binome. — Coefficient du terme en $a^3b^5c^2$ ; du terme en $a^3b^2c^4d$.

**2051.** — Etudier les séries

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$1 + \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{1.2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n!} + \cdots$$

$$1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{1.2} + \cdots + \frac{\cos nx}{n!} + \cdots$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \cdots$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \cdots$$

**2052.** — Que représentent les séries

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

Comment obtient-on les développements de $\cos x$ et $\sin x$ en séries ?

**2053.** — Limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ pour $m$ infini.

**2054.** — Calculer $e$ à $\frac{1}{1000}$ près.

**2055.** — Développer $e^{-\frac{1}{3}}$ en série.

**2056.** — Résoudre l'équation $a^x = b$.

**2057.** — Que devient une somme de 20 000 fr. placée à 3 °/₀ pendant 7 ans 4 mois 10 jours, les intérêts étant capitalisés à la fin de chaque année ?

**2058.** — Au bout de combien de temps une somme de 10 000 fr. placée à intérêts composés deviendra-t-elle égale à 12 000 fr., taux 4 °/₀, intérêts capitalisés à la fin de chaque année ?

**2059.** — Au bout de combien de temps une somme C placée à 4 °/₀ et à intérêts composés prend-elle une valeur triple ?

**2060.** — Quelle somme peut-on emprunter aujourd'hui en s'engageant à verser tous les ans pendant dix ans une somme de 5 000 fr. à la fin de chaque année : $t = 4$ °/₀ ?

**2061.** — Valeur de l'annuité à verser pendant dix ans pour rembourser une dette de 20 000 fr. (taux 4 °/₀).

**2062.** — On verse à la fin de chaque année une annuité de 4 000 fr. pour rembourser une dette de 60,000 fr. (taux 4°/₀). Combien de temps faudra-t-il pour rembourser la dette ?

**2063.** — Trouver directement la dérivée de $y = \sqrt[3]{x}$.

**2064.** — Dérivée $n^e$ de $y = \dfrac{1}{x-a}$.

**2065.** — Dérivées des fonctions suivantes :

$\sqrt[3]{7x^4}$, $\sqrt[4]{5x^2-1}$, $\sqrt[3]{\sin^2 5x^4}$, $\sqrt[4]{\cos 8x^3}$,
$\sqrt[4]{\operatorname{tg} 8x^4}$, $\sqrt{\cos^5 4x^2}$, $\sqrt[4]{\cos^2 8x^4}$, $\sqrt[3]{\sin^4 7x^5}$,
$\sqrt[3]{\cos^4 4x^2}$, $4\sin^5 2x^4$, $\cos^4 5x^4$, $tg^3 8x^5$,
$\sin^3(4x^2+1)$, $5\cos^4 8x^4$, $\cos^5 4x^2$, $\operatorname{tg}^4 5x^3$,
$8\sin^4 7x^3$, $\sin^3(7x)$, $(\text{arc}\sin 5x^3)^4$, $[\text{arc}\sin(x^8-1)]^2$,
$(\text{arc}\cos 4x^3)^6$, $(\text{arc}\cos 5x^4)^3$, $5(\text{arc}\cos 8x^4)^3$, $(\text{arc}\operatorname{tg} 5x^2)^3$,
$(\text{arc}\operatorname{tg} 8x^3)^5$, $3(\text{arc}\operatorname{tg} 7x^3)^2$, $8(\text{arc}\operatorname{tg} 5x^3)^4$, $L(\cos 8x^4)$,
$L(\text{arc}\operatorname{tg} 7x^3)$, $L(\text{arc}\sin 8x^3)$, $(L\,\text{arc}\cos 8x^3)^2$, $L(7x^3\sin^2 x^4)$,
$\sqrt[4]{L(\text{arc}\cos 8x^3)}$, $\sin^2 4x \times \operatorname{tg}^3 7x^4$, $\operatorname{tg}^4(x^2-1)\times 3^{7x^2}$,

$\dfrac{4x^2+1}{\sqrt{x+3}}$, $\dfrac{4x^4}{5\sqrt{3x^2-5}}$, $\dfrac{\operatorname{tg}^2 7x^3}{\sqrt{8x^5}}$, $\dfrac{\sin^5 4x^3}{\cos^3 2x^5}$,

$\dfrac{\sin^4 5x^3}{\cos^3 3x^2}$, $\dfrac{4\sin^3 5x^2}{\operatorname{tg}^2 8x^5}$, $\dfrac{4^{6x}}{\cos^4 4x^2}$, $\dfrac{4\operatorname{tg}^3 8x^2}{5^{4x}}$,

$x^x$, $(3x)^{2x+1}$, $5^{x^2}$, $(2x^3-1)^{4x^2}$,
$(2x-1)^{4x^3}$, $(4x^2+3)^{x^4}$, $(x^2-3)^{\sin^2 x}$, $(\sin x)^{\cos x}$, $(\sin x)^{\operatorname{cotg} x}$.

**2066.** — Calculer la dérivée par rapport à $x$ de la fonction $y$ définie par chacune des équations

$$\sin^3 x - 3\cos^2 y + 1 = 0,$$
$$\sin^2 3x - 5^{4y} = 1,$$
$$3^{4x^2} - 5Ly + \sin^4 x^4 - 1 = 0.$$

**2067.** — Primitives des fonctions suivantes :

$y' = 5^{4x}$, $y' = 2x.5^{3x^2}$, $y' = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$.

$y' = \dfrac{x}{x^2-5x+6}$, $y' = \dfrac{2x-1}{3x^2-4x+1}$, $y' = \dfrac{7x-1}{x^2+3}$,

$y' = \dfrac{1}{x^2-x+1}$, $y' = \dfrac{x-3}{x^2-x+1}$, $y' = \dfrac{4x+1}{x^2+x+1}$,

$y' = \dfrac{3x-1}{x^2+x+2}$, $y' = \dfrac{ax+b}{(x-2)^3}$, $y' = \dfrac{x^2+1}{(x-2)^3}$.

$y' = \dfrac{x^2-1}{(x-3)^3}$, $y' = \dfrac{x^2-1}{(x+2)(x-3)^2}$, $y' = \dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-3)^2}$,

$y' = \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2(x-2)^2}$, $y' = \dfrac{x}{\sqrt{5x^2+1}}$, $y' = \dfrac{x-1}{\sqrt{1-4x^2}}$,

$y' = \dfrac{5x+3}{\sqrt{1-4x^2}}$, $y' = \dfrac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}$, $y' = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-1}}$.

$y' = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+1}}$, $y' = \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+5}}$, $y' = \dfrac{5x+1}{\sqrt{x^2-2}}$,

$y' = \dfrac{3x+1}{\sqrt{4x^2-1}}$, $y' = \dfrac{x+2}{\sqrt{5x^2+1}}$, $y' = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

$y' = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $y' = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-1}}$.

$$y' = \sin^2 x, \qquad y' = \sin^3 x, \qquad y' = \sin^3 x \cos^2 x,$$
$$y' = \operatorname{tg} x, \qquad y' = \operatorname{tg} x, \qquad y' = \operatorname{tg}^3 x, \qquad y' = \operatorname{tg}^4 x.$$

$$y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) . \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \qquad y' = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) . \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$y' = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) . \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \qquad y' = \sin(3x + \alpha) . \sin(2x + \beta).$$

**2068.** — Limites de $\dfrac{x^5 - a^5}{x^3 - a^3}$, $\dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ quand $x$ tend vers $a$.

**2069.** — Limites de $\dfrac{\sin^2 5x - \operatorname{tg}^2 5x}{\operatorname{tg} 4x . \sin 7x}$, $\dfrac{\sin^2 5x - \operatorname{tg} 2x . \sin 4x}{\sin 8x . \operatorname{tg} 3x}$ quand $x$ tend vers 0.

**2070.** — Limite pour $x = 0$ de $\dfrac{3^x - 7^x}{2^x - 5^x}$, $\dfrac{3^x - 5^x}{2^x - 5^x}$.

**2071.** — Limite de $(1 + x)^{1/x}$, quand $x$ tend vers 0, sachant que $xy = 2$.

**2072.** — Limites pour $x = 0$ des expressions suivantes :

$$(1 - \sin x)^{\cot(x/2)}, \qquad (1 - \sin x)^{\cot x}, \qquad (1 - 3\sin x)^{\cot x},$$
$$(1 + \operatorname{tg} x)^{2\cot 2x}, \qquad (1 - 2\operatorname{tg} x)^{\cot 2x}, \qquad (1 - 2\operatorname{tg} 3x)^{\cot 6x}.$$

**2073.** — Etudier les variations des fonctions :

$$y = x^2(a - x)^3, \qquad y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}, \qquad y = \frac{x^3}{x^2 - 1},$$
$$y = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 4}, \qquad y = \frac{x^4 + 1}{2x^4 - 1}, \qquad y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x - 1},$$
$$y = \sin^4 x . \cos^2 x, \qquad y = \sin^3 x . \cos x, \qquad y = \frac{1 + 3\sin x}{1 - \cos x}, \qquad y = \frac{\sin^3 x - 1}{3\sin^2 x - 1}.$$

**2074.** — Minimum de $3x + 7y$ sachant que $x^2 y^3 = 1$.

**2075.** — Développer le polynome $f(x)$ par rapport aux puissances croissantes de $x - a$. — Limite de $\dfrac{f(x)}{(x - a)^p}$, sachant que $a$ est racine multiple d'ordre $p$ de l'équation $f(x) = 0$.

**2076.** — Equation qui donne $\operatorname{tg} \dfrac{a}{3}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$ ; ramener cette équation à la forme $x^3 + px + q = 0$.

**2077.** — Conditions pour que $x^3 + px + qx + r = 0$ ait une racine double.

**2078.** — Conditions pour que $a$ soit racine triple de $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

**2079.** — On donne l'équation $x^3 - 5x + r = 0$ : déterminer $r$ pour que cette équation ait une racine double.

**2080.** — $f(x) = 0$ étant une équation entière qui a toutes ses racines réelles, montrer que l'équation $f(x) + \lambda f'(x) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles, $\lambda$ désignant une constante donnée

**2081.** — Démontrer que si $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de $f'(x)$.

**2082.** — On donne une équation algébrique à coefficients entiers, reconnaître si cette équation a des racines commensurables.

**2083.** — Si $\dfrac{\alpha}{\beta}$ est racine de l'équation $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ à coefficients entiers, le quotient de $f(x)$ par $x - \dfrac{\alpha}{\beta}$ a lui aussi des coefficients entiers.

**2084.** — Condition pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$ ait ses trois racines réelles. — Même question pour l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

**2085.** — Résoudre les équations

$$x^3 - x + 5 = 0, \qquad x^3 - 5x + 2 = 0, \qquad x^3 - 4x - 1 = 0.$$

**2086.** — Etudier les racines de l'équation $x^4 - 2x^3 + 1 = 0$. L'équation admet la racine $x = 1$ ; on fait disparaître cette racine ; étudier l'équation obtenue $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

**2087.** — On donne l'équation $x^4 + px + q = 0$. — Condition entre $p$ et $q$ pour que cette équation ait le plus grand nombre possible de racines réelles. — Ne reconnait-on pas à première vue l'existence de racines imaginaires. — Discuter en étudiant les points de rencontre de la courbe $y = x^4$ avec la droite $y = -px - q$.

**2088.** — Etudier les équations

$$x^4 + x - 5 = 0, \qquad x^4 - 2x - 3 = 0, \qquad x^4 - 5x - 2 = 0, \qquad x^4 - 3x - 3 = 0,$$
$$x^4 + x^3 - 1 = 0, \qquad x^4 + x^3 - 3 = 0, \qquad x^4 - 2x^3 - 1 = 0, \qquad x^4 + 2x^3 - 1 = 0,$$
$$x^5 - 3x - 1 = 0, \qquad x^5 + 7x - 1 = 0, \qquad x^5 - 2x^3 - 1 = 0, \qquad x^5 - 2x^3 + 1 = 0,$$
$$x^5 + 2x^3 - 1 = 0, \qquad 3x^5 - 2x^4 + 4 = 0, \qquad x^6 - 5x - 2 = 0.$$

**2089.** — Etudier l'équation $x^4 - 2x - 1 = 0$. — Concavité de la courbe $y = x^4 - 2x - 1$ entre $x = 1$ et $x = 2$. — Approcher de la racine comprise entre 1 et 2 par la méthode de Newton.

**2090.** — Même question pour l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$.

### Trigonométrie (M. Combette).

**2091.** — Résoudre les équations

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=0,$$

$$\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{cotg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

**2092.** — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ connaissant $\cos a$ ; $\cos\frac{a}{2}$, $\sin\frac{a}{2}$ connaissant $\operatorname{tg} a$ ; $\cos\frac{a}{3}$ connaissant $\cos a$ ; $\operatorname{tg}\frac{2a}{3}$ connaissant $\operatorname{tg} a$ ; $\cos\frac{a}{3}$ connaissant $\cos 2a$ ; $\sin\frac{a}{3}$ connaissant $\sin 2a$ ; $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$ connaissant $\operatorname{tg} a$.

**2093.** — Calculer $\sin 9°$, $\sin 15°$, $\sin 18°$.

**2094.** — Limite du produit $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}$ pour $n$ infini.

**2095.** — Transformer en produits les expressions

$$\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c),$$
$$1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c$$

**2096.** — Calculer $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ sachant que $a\cos x+b\sin x=c$. — Résoudre la même équation en prenant $\sin x$ comme inconnue.

**2097.** — Eliminer $x$ entre les deux équations $a\cos x+b\sin x=c$, $a'\cos x+b'\sin x=c'$.

**2098** — Racines cubiques de $i$.

**2099.** — Discuter l'équation $\sin^3 x-7\sin x+2=0$.

**2100.** — Résoudre les inégalités

$$\frac{\cos x}{1+2\cos x}>\frac{1-\cos x}{1-2\cos x},\qquad \frac{\cos x}{1-2\cos x}<\frac{1-\cos x}{1-9\cos^2 x},\qquad \frac{1-\sin x}{1-3\sin x}<\frac{1+\sin x}{1-9\sin^2 x},$$

$$\frac{\sin x}{1+2\sin x}<\frac{1+3\sin x}{1-4\sin^2 x},\qquad \frac{\sin x}{1-2\sin x}<\frac{1-\sin x}{1-4\sin^2 x}.$$

**2101.** — Résoudre un triangle connaissant $a-b$, $c$, C.

**2102.** — Résoudre un triangle connaissant $a$, A, $b+c=l$.

**2103.** — Distance de deux points inaccessibles.

**2104.** — Hauteur d'un point au-dessus de la plaine.

**2105.** — On a $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$ ; calculer $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ par une formule calculable par logarithmes.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**2004.** — Un point mobile M décrit la parabole $y^2-2px=0$ avec une vitesse constante $v_0$. Déterminer pour chaque position du mobile les composantes de sa vitesse et de son accélération. On supposera que le mobile décrit la parabole dans le sens trigonométrique direct.

Lieu de l'extrémité du vecteur accélération mené par l'origine. J. Demeunynck.

**2005.** — Un point décrit une parabole $y^2-2px=0$ de telle façon que l'hodographe de son mouvement soit la parabole $y^2-2qx=0$.

1° Trouver les équations du mouvement de ce point et son accélération à chaque instant.

2° Lieu de l'extrémité du vecteur accélération mené par l'origine. Lieux des extrémités des vecteurs vitesse et accélération menés à chaque instant par la position du mobile.

3° Enveloppe du vecteur accélération mené par la position du mobile. Mouvement du point où ce vecteur touche son enveloppe. J. Demeunynck.

**2006.** — On considère une ellipse fixe et un cercle variable tangent aux deux axes de cette ellipse. Soit A un des sommets du grand axe de cette ellipse.

1° Trouver le lieu des points de contact de la tangente menée au cercle variable par le point A.

2° Le cercle envisagé et le point A assimilé à un cercle de rayon nul définissent un faisceau linéaire de cercles qui renferme un autre cercle de rayon nul. On demande le lieu du centre de ce cercle.

3° On associe les cercles deux à deux de façon que leur axe radical passe au point A, et on mène par les

centres de l'un des couples deux parallèles au petit axe qui rencontrent l'ellipse en PP′ et QQ′. Trouver l'enveloppe des droites PQ, PQ′, P′Q, P′Q′ et le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point A sur ces droites. E. H.

**2007.** — On considère un cercle et deux points F et F′ symétriques par rapport au centre de ce cercle. On joint un point variable M de la circonférence aux deux points F et F′ et on prend les points de rencontre de MF, MF′ avec cette circonférence. Trouver l'enveloppe de la corde MM′. CLAPIER.

**2008.** — Du centre d'une ellipse on abaisse des perpendiculaires sur la tangente et sur la normale en un point variable de cette ellipse. On demande l'enveloppe de la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires. On demande de même l'enveloppe de la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur deux tangentes rectangulaires à l'ellipse.

**2009.** — On considère une ellipse de foyers F et F′, et un point M variable sur l'ellipse. Le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle MFF′ est une quartique que l'on demande de construire.

E.-N. BARISIEN.

**2010.** — Une droite de longueur constante a ses extrémités A et B qui glissent sur les deux droites rectangulaires $Ox$, $Oy$. Trouver le lieu des points de rencontre des deux courbes suivantes : 1° l'hyperbole tangente à AB et ayant $Ox$ et $Oy$ pour asymptotes ; 2° la parabole tangente à $Ox$ et $Oy$ en A et B.

E.-N. BARISIEN.

**2011.** — Trouver et construire la courbe lieu des centres des cercles qui passent par un des sommets d'une ellipse et qui sont tangents à l'ellipse. E.-N. BARISIEN.

## BIBLIOGRAPHIE

**Évaluation numérique des grandeurs géométriques**, par J. PIONCHON, professeur à la Faculté des Sciences et directeur de l'Institut électrotechnique de l'Université de Grenoble. — Gratier et Rey, éditeurs à Grenoble.— Un volume grand in-8° de 130 pages ; prix 3 fr. 50.

La place si distinguée que M. Pionchon occupe dans l'Enseignement supérieur ne l'a pas conduit néanmoins à se confiner dans un enseignement purement spéculatif. Placé à la tête de l'Institut électrotechnique de Grenoble, M. Pionchon n'a pas hésité à se lancer dans la voie nouvelle que suivent déjà un certain nombre de professeurs de l'enseignement supérieur ayant comme lui l'esprit large et avide de progrès : il s'est donné pour but, en dehors de ses travaux personnels, la préparation pour cette industrie de l'avenir que nous voyons éclore de tous côtés et particulièrement dans la région si riche en forces naturelles qu'il habite, de tout un corps d'ingénieurs sérieux, pourvus méthodiquement de toutes les connaissances qui leur seront utiles.

Non content de se dépenser dans l'enseignement parfaitement approprié qu'il leur donne, dans les conseils qu'il leur prodigue, il a songé à compléter son œuvre en écrivant pour eux une collection de brochures, ou plutôt de petits volumes dans lesquels ils trouveront énumérées et exposées avec soin toutes les questions qui les concernent. Pour mener à bien une telle entreprise, il faut un esprit souple et riche en connaissances variées. M. Pionchon n'a pas eu tort d'oser un tel effort : le volume qu'il nous donne aujourd'hui est de nature à faire bien augurer de la publication tout entière et à exciter le désir de voir la collection se compléter rapidement.

Dans une brochure de cent et quelques pages, l'auteur passe en revue tous les moyens employés pour mesurer et représenter arithmétiquement les divers éléments géométriques qui se présentent comme quantités dans les applications. Le premier chapitre est consacré aux longueurs, segments rectilignes, arcs de courbes, arcs de cercles ; le second traite des angles et des angles dièdres ; le troisième, de la courbure des lignes planes ou gauches et contient en outre ce qu'il est essentiel de savoir sur la courbure des surfaces. Dans les deux chapitres suivants, l'auteur s'occupe des aires et des volumes. Enfin le dernier chapitre, plus particulièrement théorique que les précédents, est employé à développer avec netteté l'idée d'homogénéité dans le calcul des éléments géométriques quantitatifs.

Dans un appendice décomposé en deux notes, l'auteur montre avec beaucoup de précision et d'originalité comment s'introduit l'idée de quantité en géométrie et donne le dénombrement des cas fondamentaux où cette idée se présente, puis il esquisse une théorie générale de la désignation numérique des grandeurs géométriques.

En dehors de sa simplicité, ce qui fait l'attrait de ce petit volume, c'est l'originalité que l'auteur y a mise, presque à chaque page. A chaque pas, le physicien se reconnaît à côté du mathématicien, d'un mathématicien à l'esprit particulièrement aiguisé, qui a réfléchi longuement à toutes les idées fondamentales et qui est tout à fait maître de son sujet. Le côté pratique de chaque question est mis en relief avec une netteté saisissante,

et l'auteur en déduit sans peine la théorie définitive qui est le terme des spéculations de l'esprit sur l'objet étudié. C'est la marche même que l'esprit humain a suivie, sans s'en rendre compte bien souvent, et c'est ce qui rend à mon avis la lecture de ce petit volume si attachante et si suggestive.

Aussi je prends la liberté de recommander cette lecture non seulement à ceux pour qui l'ouvrage a été plus spécialement écrit, mais à tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques pour elles-mêmes. Ils y auront plaisir et profit.

E. H.

**Eléments de Mathématiques supérieures**, à l'usage des physiciens, chimistes, ingénieurs, et des élèves des Facultés de Sciences, par H. Vogt, professeur à l'Université de Nancy. — Paris, Librairie Nony et Cie.

Je viens de me procurer le plaisir d'adresser à M. Pionchon des éloges dont il n'a que faire sans doute, mais qui ont cependant l'avantage de lui montrer que ses efforts seront compris et appréciés. Je ne saurais mieux continuer cet aimable exercice qu'en choisissant l'ouvrage que M. Vogt a publié dans un but un peu voisin de celui que je viens de définir. Cet ouvrage est déjà un peu ancien, puisqu'il a été publié en 1901, et certains de mes lecteurs s'étonneront sans doute de m'en voir parler si tard. Je leur dois deux mots d'explication : un de mes correspondants m'avait demandé l'autorisation de publier dans la Revue le compte rendu de ce volume et promis formellement de me l'envoyer dans les cinq ou six mois qui devaient suivre notre entretien; le temps a passé, le compte rendu n'est pas venu et je me trouve aujourd'hui en retard de plus d'une année pour parler d'un ouvrage qui m'a plu beaucoup et dont j'eusse désiré entretenir mes lecteurs beaucoup plus tôt.

Le plan de l'auteur est très net, son programme parfaitement délimité et suffisamment restreint. M. Vogt s'adresse aux jeunes gens qui ont fait avec soin leurs Mathématiques élémentaires classiques, telles qu'on les enseigne dans les lycées, et suppose acquises ces connaissances préliminaires. Pour eux, il a réuni dans un seul volume l'ensemble des connaissances qui leur seront utiles en Mathématiques supérieures : algèbre, géométrie nalytique, calcul différentiel et calcul intégral; de sorte que l'étudiant laborieux et désireux d'apprendre s'élève sans effort depuis les connaissances les plus élémentaires jusqu'aux plus hautes dont il puisse faire usage ensuite.

Il fallait beaucoup de mesure, de sobriété et de réflexion sur le champ si vaste des études ultérieures pour exécuter avec succès un pareil plan. Je suis heureux de constater que l'auteur y a pleinement réussi. Ses démonstrations sont simples, bien choisies, exemptes de tout pédantisme; elles visent les fonctions usuelles, celles qui se présentent naturellement dans les applications, et non ces fonctions singulières, bizarres, intéressantes pour le mathématicien pur seulement, et pour lesquelles ont été construites toutes ces démonstrations délicates, subtiles, qui ont alourdi la marche de l'enseignement et rebuté tant de jeunes esprits.

Quant au choix des matières, une indication sommaire vaut mieux à ce sujet que n'importe quel verbiage.

L'ouvrage se divise en sept parties et se termine par quelques notes.

La première partie comprend des compléments d'algèbre : équations linéaires et notion de déterminant, formule du binome, radicaux et exposants, limites, propriétés élémentaires des séries, nombre $e$, $e^x$, exponentielle et logarithme.

La deuxième partie est consacrée à l'exposé des principes fondamentaux de la géométrie analytique à deux et à trois dimensions : un premier chapitre très intéressant sur la mesure des grandeurs et l'idée d'homogénéité, puis les formules fondamentales, les problèmes sur la ligne droite et les équations usuelles des lignes du second ordre; mêmes questions ou plutôt questions analogues dans l'espace.

Dans la troisième partie, l'auteur traite des dérivées et différentielles et expose toutes les questions classiques relatives à cette théorie.

La quatrième partie contient une théorie sommaire et simple des équations algébriques : introduction et représentation des imaginaires, propriétés des racines des équations algébriques, résolution de l'équation du troisième degré, résolution numérique des équations.

La cinquième partie est consacrée aux applications géométriques du calcul différentiel : tangentes, normales aux courbes planes, construction des courbes planes, lieux géométriques, enveloppes, courbure et questions analogues dans l'espace.

La sixième partie traite du calcul intégral et contient tout ce qui est utile aux applications : procédés d'intégration, calcul des intégrales définies et applications, intégrales doubles, triples, intégrales curvilignes et intégrales de surface.

Enfin la septième partie est consacrée à une étude sommaire des équations différentielles.

Viennent enfin des notes assez importantes sur les séries, l'élimination et la géométrie analytique.

J'ai parcouru cet ouvrage avec beaucoup d'intérêt. Je crois pouvoir promettre le même résultat à tous ceux qui voudront bien m'imiter.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

13e Année. N° 8 Mai 1903.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### NOTE

de M. **Leconte**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nantes.

**1**. Soit une droite D de coordonnées $a, b, c, p, q, r$ ; on dit qu'elle fait partie d'une congruence linéaire si elle appartient à deux complexes linéaires

$$C_1 \equiv ap_1 + bq_1 + cr_1 + pa_1 + qb_1 + rc_1 = 0,$$
$$C_2 \equiv ap_2 + bq_2 + cr_2 + pa_2 + qb_2 + rc_2 = 0.$$

**2**. Les droites d'une congruence linéaire rencontrent en général deux droites fixes, car elles appartiennent à tous les complexes linéaires d'équations

$$C_1 + \lambda C_2 = 0,$$

et deux de ces complexes, pour les racines de l'équation

$$(p_1 + \lambda p_2)(a_1 + \lambda a_2) + (q_1 + \lambda q_2)(b_1 + \lambda b_2) + (r_1 + \lambda r_2)(c_1 + \lambda c_2) = 0$$

signifient que la droite D rencontre la directrice rectiligne de coordonnées

$$a_1 + \lambda a_2, \ldots, r_1 + \lambda r_2.$$

**3**. Si les deux directrices de la congruence sont confondues, la droite D reste tangente en tous les points de sa directrice unique à une surface du second degré.

En effet, si la droite D rencontre $Oz$ au point de cote $z$, ses coordonnées peuvent s'écrire $a$, $b$, $c$, $bz$, $-az$, $0$.

Si, en plus, elle satisfait au complexe linéaire $C_1 = 0$, sa seconde directrice a pour coordonnées $a_1, b_1, \lambda, p_1, q_1, r_1, \lambda$ étant donné par

$$a_1 p_1 + b_1 q_1 + \lambda r_1 = 0 ;$$

ce sera l'axe des $z$ si on a $r_1 = 0$. L'équation du complexe $C_1$ prend alors la forme

$$ap_1 + bq_1 + z(ba_1 - ab_1) = 0,$$

et cette relation homographique entre $z$ et $\frac{b}{a}$ montre bien que la droite D reste tangente à une surface réglée du second degré.

**4**. Ce calcul permet de considérer deux quadriques se raccordant tout le long d'une génératrice comme le cas limite de 2 quadriques ayant deux génératrices de même système communes ; il suffit pour cela de considérer les génératrices d'un même système d'une quadrique comme les droites faisant partie de trois complexes linéaires $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$; les génératrices de l'autre système sont alors les droites de coordonnées

$$a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3, \quad \ldots, \quad r_1 + \lambda r_2 + \mu r_3,$$

avec la condition

$$(a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3)(p_1 + \lambda p_2 + \mu p_3) + \cdots = 0.$$

**5**. On peut donc énoncer les propriétés suivantes comme cas particuliers de théorèmes connus :

1° *Deux quadriques qui se raccordent tout le long d'une génératrice ont en commun deux génératrices distinctes ou confondues de l'autre système.*

2° *Deux quadriques qui se raccordent tout le long d'une génératrice et qui ont en commun une autre génératrice de même système sont confondues.*

## NOTE SUR LE THÉORÈME DE FAURE

par M. **Joseph Franceschini**, à Corbara (Corse).

On sait que si une conique (C) est circonscrite à un triangle ABC conjugué à une autre conique $C_1$) elle est circonscrite à une infinité de triangles analogues : chaque point de (C) peut servir de sommet à un tel triangle. On dit que (C) est harmoniquement circonscrite à ($C_1$).

Ceci rappelé, nous nous proposons de démontrer que si la conique (C) est un cercle, ce cercle est orthogonal au cercle orthoptique de ($C_1$).

Soit (C′) (*fig.* 1) le cercle orthoptique de ($C_1$) et A un de ses points de rencontre avec (C) ; le point A est le sommet d'un triangle ABC inscrit dans (C) et conjugué à ($C_1$), les deux autres sommets, B et C, sont les points de rencontre du cercle (C) avec la polaire du point A. Soient en outre E et F les points de rencontre de cette polaire avec la conique ($C_1$) ; les droites AE et AF sont les tangentes issues du point A à la conique, donc l'angle EAF est droit ; de plus OA rencontre EF en son milieu D, et les deux points B et C divisent harmoniquement le couple EF.

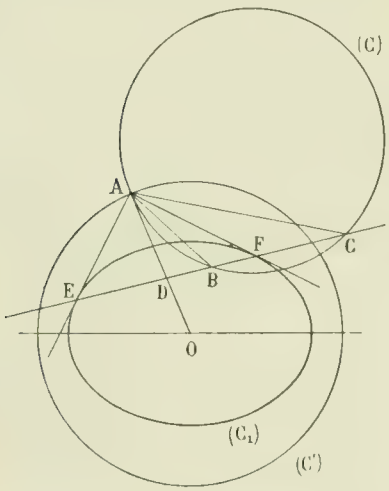


Fig. 1.

Nous avons donc

$$DA = DE = DF,$$

puis

$$\overline{DF}^2 = DB.DC = \overline{DA}^2.$$

Cette égalité montre que OA ou DA touche le cercle (C) en A ; donc ce cercle est orthogonal au cercle (C′).

La réciproque est évidente et découle de la même égalité, car celle-ci prouve que les deux points B et C sont conjugués harmoniques par rapport à E et F.

Il existe un théorème analogue pour les quadriques ; nous allons en rappeler l'énoncé et en donner une démonstration de même nature que la précédente.

Lorsqu'une quadrique (Q) est circonscrite à un tétraèdre ABCD conjugué à une autre quadrique ($Q_1$), elle est circonscrite à une infinité de tétraèdres analogues : chaque point de cette quadrique est le sommet d'un tétraèdre conjugué à ($Q_1$) et inscrit dans la première. La quadrique (Q) est dite alors harmoniquement circonscrite à ($Q_1$).

Quand la quadrique (Q) est une sphère, elle coupe orthogonalement la sphère de Monge, (Q′), de ($Q_1$).

Soit A un des points de rencontre de (Q) et de (Q′) ; son plan polaire $\pi$ par rapport à ($Q_1$) la coupe suivant une conique ($C_1$) et il coupe la sphère (Q) suivant un cercle (C) qui est harmoniquement circonscrit à ($C_1$). Considérons alors un des trièdres trirectangles ayant pour sommet le point A et circonscrits à la quadrique ($Q_1$) ; ce trièdre a pour base sur le plan $\pi$ un triangle circonscrit à la

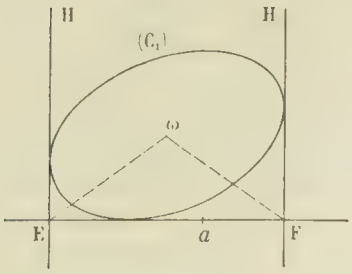



Fig. 2.

conique $(C_1)$ et que l'on peut former en partant d'une tangente quelconque à cette conique ; nous choisirons l'une de celles qui passe au point $a$, projection du point A sur le plan $\pi$ (*fig.* 2). Alors le triangle circonscrit à la conique $(C_1)$ a deux angles droits en E et F et un sommet H à l'infini. Le point A est sur la circonférence décrite sur EF comme diamètre et située dans un plan perpendiculaire au plan du tableau ; il est donc situé ainsi que cette circonférence tout entière sur la sphère de centre $\omega$ et de rayon $\omega E = \omega F$ ($\omega$ est le centre de la conique $(C_1)$ ; par suite, on a $\omega A = \omega E = \omega F$.

D'autre part la puissance de $\omega$ par rapport à (C) ou par rapport à (Q) est égale à $\overline{\omega E}^2$ ou à $\overline{\omega A}^2$ ; donc $\omega A$, c'est-à-dire OA, est tangente à la sphère (Q) en A et le théorème est établi.

La réciproque découle tout aussi aisément du raisonnement précédent.

## SUR LES CERCLES HARMONIQUEMENT CIRCONSCRITS A UNE CONIQUE

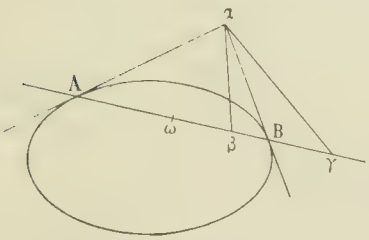
par M. **R. Bouvaist**.

Dans la théorie des invariants simultanés de deux coniques, on rencontre comme conséquence le théorème suivant connu sous le nom de théorème de Faure :

*Les cercles circonscrits aux triangles conjugués à une conique (cercles harmoniquement circonscrits à la conique) coupent orthogonalement le cercle de Monge de la conique considérée.*

Je me propose de donner de ce théorème une démonstration géométrique basée sur les propriétés élémentaires des faisceaux de coniques et de cercles et d'en déduire les principales propriétés des coniques harmoniquement circonscrites à une conique donnée.

**Théorème de Faure**. — Soit $\alpha\beta\gamma$ un triangle conjugué à une conique S et soit $\omega$ le milieu de la corde AB ; on a évidemment $\overline{\omega B}^2 = \omega\beta.\omega\gamma$, par suite le cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ est orthogonal au cercle de diamètre AB.




Les cercles de Monge du faisceau tangentiel constitué par les coniques tangentes en A et B aux droites $A\alpha$, $B\alpha$, forment un faisceau ; le cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ étant orthogonal à deux cercles du faisceau, le cercle de diamètre AB et le cercle-point $\alpha$, est orthogonal à tous les cercles du faisceau et en particulier au cercle de Monge de la conique considérée S.

Réciproquement, tout cercle orthogonal au cercle de Monge d'une conique est circonscrit à une infinité de triangles conjugués à S.

Soient en effet $\alpha$ un point de ce cercle, AB sa polaire par rapport à S ; le cercle considéré passant par le cercle-point $\alpha$ et étant orthogonal au cercle de Monge de S, est orthogonal au cercle de diamètre AB qui est l'un des cercles de Monge du faisceau linéaire tangentiel ; on a donc $\omega\beta.\omega\gamma = \overline{\omega A}^2$, les points $\beta$ et $\gamma$ sont conjugués par rapport à S sur la polaire de $\alpha$, par suite, le triangle $\alpha\beta\gamma$ est conjugué à S.

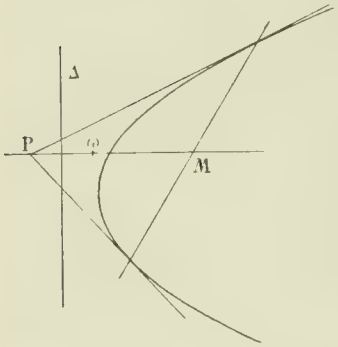
Du théorème de Faure on déduit immédiatement les suivants :

*Tout cercle harmoniquement circonscrit à une parabole a son centre sur la directrice.*

*Tout cercle harmoniquement circonscrit à une hyperbole équilatère passe par le centre de l'hyperbole.*

De la réciproque du théorème, on déduit par projection le suivant :

*Lorsqu'il existe un triangle inscrit dans une conique* $\Sigma$ *et harmoniquement circonscrit à une conique* S, *il en existe une infinité.*




Du théorème de Faure et de ses cas particuliers découlent de nombreuses propriétés, qui fournissent d'élégantes solutions à nombre de questions diverses ; nous signalerons en passant la suivante :

*Lorsqu'une parabole est bitangente à une hyperbole équilatère, sa directrice est perpendiculaire au milieu de la droite joignant le centre de l'hyperbole au pôle de la corde des contacts.*

En effet, la directrice est visiblement perpendiculaire sur le diamètre PM, d'autre part P est le sommet d'une infinité de triangles conjugués communs à l'hyperbole et à la parabole; les cercles circonscrits à ces triangles passent par P et ω et ont leur centre sur Δ, qui dès lors est perpendiculaire au milieu de Pω.

[Nous avons reçu la note de M. Franceschini bien avant celle de M. Bouvaist. La grande ressemblance qu'elles présentent nous a déterminé à les publier simultanément l'une à la suite de l'autre.]

## QUESTION D'EXAMEN

*Discuter l'équation* $x^m + px^2 + qx + r = 0.$

Formons l'équation aux inverses

$$f(x) \equiv rx^m + qx^{m-1} + px^{m-2} + 1 = 0;$$

l'équation dérivée est

$$mrx^{m-1} + (m-1)qx^{m-2} + (m-2)px^{m-3} = 0.$$

Elle admet $m-3$ racines nulles, puis les deux racines de l'équation

$$(1) \qquad mrx^2 + (m-1)qx + (m-2)p = 0;$$

deux cas sont alors à distinguer, le cas de $m$ pair et le cas de $m$ impair.

*1er Cas.* $m$ pair. La racine nulle de la dérivée est alors une racine d'ordre impair et doit figurer dans la suite de Rolle.

Si l'équation (1) a ses deux racines imaginaires, c'est-à-dire si

$$(m-1)^2q^2 - 4m(m-2)pr < 0,$$

la suite de Rolle est

$$-\infty \qquad 0 \qquad +\infty;$$

les signes correspondants de $f(x)$ sont les signes de $r$, 1, $r$ et il y a deux racines réelles ou zéro, suivant que $r$ est négatif ou positif.

Si l'équation (1) a ses racines réelles, c'est-à-dire si

$$(m-1)^2q^2 - 4m(m-2)pr > 0,$$

il y a trois cas à examiner suivant que les deux racines de cette équation, $\alpha$ et $\beta$, sont plus petites que 0, plus grandes, ou que l'une est plus petite et l'autre plus grande.

Dans le premier cas, les trois nombres $p, q, r$ sont de même signe et la suite de Rolle est

$$-\infty, \ \alpha, \ \beta, \ 0, \ +\infty,$$

et nous pouvons nous proposer de chercher les conditions pour que l'équation proposée ait quatre racines réelles. Si nous remarquons que $-\infty$, 0 et $+\infty$ donnent les signes de $r$, 1 et $r$, il faut

déjà que $r$ soit négatif; il faut en outre que $f(\alpha)$ soit positif et $f(\beta)$ négatif. Ces deux conditions se ramènent à une seule $f(\alpha)f(\beta) < 0$, d'après une remarque classique et cette dernière entraîne même la réalité de $\alpha$ et de $\beta$.

Le second cas s'étudie de la même façon et conduit au même résultat final,

$$f(\alpha)f(\beta) < 0.$$

Seulement ici $p$ et $r$ sont négatifs tous deux et $q$ est positif.

Dans le troisième cas, $p$ et $r$ sont de signes contraires et la suite de Rolle est

$$-\infty,\ \alpha,\ 0,\ \beta,\ +\infty,$$

les signes de $f(x)$ sont ceux de $r$, $f(\alpha)$, $1$, $f(\beta)$, $r$.

Pour qu'il y ait quatre racines réelles, il faut $r > 0$, $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) < 0$; les deux dernières inégalités se remplacent par deux autres

$$f(\alpha) + f(\beta) < 0, \qquad f(\alpha)f(\beta) > 0,$$

qui contiennent $\alpha$ et $\beta$ symétriquement.

2° *Cas.* $m$ impair. Alors la racine $0$ de la dérivée est une racine d'ordre pair et ne figure pas dans la suite de Rolle. Si les racines de la dérivée sont imaginaires, l'équation n'a qu'une racine réelle. Si elles sont réelles, l'équation proposée peut avoir trois racines réelles et la condition unique pour qu'elle les ait est

$$f(\alpha)f(\beta) < 0,$$

où $\alpha$ et $\beta$ désignent les racines de l'équation (1).

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1143.** — *Étant donnés trois axes rectangulaires* $Ox$, $Oy$, $Oz$ *et une sphère* (S) *ayant pour centre* O *et pour rayon* R, *on considère les points de rencontre* $A_1, A_2$, $B_1, B_2$, $C_1, C_2$ *des axes* $Ox$, $Oy$, $Oz$ *avec les plans tangents à* (S) *qui leur sont respectivement perpendiculaires.*

1° *Les quadriques* (Q), *qui sont tangentes aux huit plans* $A_\alpha B_\beta C_\gamma$ ($\alpha = 1$ ou $2$, $\beta = 1$ ou $2$, $\gamma = 1$ ou $2$), *ont leurs centres dans un même plan* (P) *quel que soit* R.

2° *Soit* $(Q_0)$ *celle des quadriques* (Q) *qui a son centre sur* OO'. *Lorsque* R *varie, les plans tangents communs à* $(Q_0)$ *et à* (S) *enveloppent un hyperboloïde et les axes de* $(Q_0)$ *restent fixes.*

3° *Deux des focales de* $(Q_0)$ *s'appuient sur quatre droites ne dépendant pas de la sphère* (S). *Si l'on se donne seulement le rayon de* (S), *combien y a-t-il de quadriques* $(Q_0)$ *ayant un plan principal donné? Lieu des centres des quadriques* $(Q_0)$ *de grandeur donnée ou semblables à une quadrique donnée.*

4° *Soit* $(Q_1)$ *celle des quadriques* (Q) *qui est de révolution. Lieu de ses foyers. Lieu des sommets de son axe focal quand* R *varie. Dans les mêmes conditions, il y a trois quadriques* $(Q_1)$ *tangentes à un plan donné* (Π) *et qui admettent deux plans tangents communs. Enveloppe des plans* Π *pour lesquels les deux plans tangents sont rectangulaires.*

**1.** Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées du point O'. Celles des différents points seront

$$\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}\begin{cases} x = \alpha \pm R, \\ y = 0, \\ z = 0, \ldots \text{ etc.} \end{cases}$$

Si l'on mène des points $C_1$, $C_2$ les cônes circonscrits à (Q), ces cônes auront pour traces sur le plan $z = 0$ des coniques (Γ) tangentes aux quatre droites $A_iB_j$. Or l'équation tangentielle des coniques (Γ) est évidemment

$$\lambda[(\alpha + R)u + r][(\alpha - R)u + r] + \mu[(\beta + R)v + r][(\beta - R)v + r] = 0,$$

ce qui conduit immédiatement à l'équation générale des quadriques (Q)

$$\lambda[(\alpha+R)u+r][(\alpha-R)u+r]+\mu[(\beta+R)v+r][(\beta-R)v+r]+\nu[(\gamma+R)w+r][(\gamma-R)w+r]=0,$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant des paramètres arbitraires,

ou $$\lambda(\alpha^2-R^2)u^2+\mu(\beta^2-R^2)v^2+\nu(\gamma^2-R^2)w^2+2\lambda\alpha ur+2\mu\beta vr+2\nu\gamma wr+(\lambda+\mu+\nu)r^2=0.$$

Les coordonnées du centre sont

$$x=\frac{\lambda\alpha}{\lambda+\mu+\nu},\qquad y=\frac{\mu\beta}{\lambda+\mu+\nu},\qquad z=\frac{\nu\gamma}{\lambda+\mu+\nu}.$$

On voit qu'il y a un lieu des centres indépendant de R

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1.$$

C'est le plan (P) joignant les projections du point O′ sur $Ox$, $Oy$, $Oz$.

**2.** La quadrique (Q) a son centre sur OO′ si $\lambda=\mu=\nu$, et son équation s'écrit alors

$$(\alpha^2-R^2)u^2+(\beta^2-R^2)v^2+(\gamma^2-R^2)w^2+2\alpha ur+2\beta vr+2\gamma wr+3r^2=0.$$

On peut la mettre sous la forme

$$(\alpha u+\beta v+\gamma w+r)^2-R^2(u^2+v^2+w^2)-2(\alpha\beta uv+\alpha\gamma uw+\beta\gamma vw-r^2)=0,$$

ou $$S-2H=0.$$

Les plans tangents communs à $(Q_0)$ et (S) sont donc tangents à la surface $H=0$, dont l'équation ponctuelle est

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-2\frac{xy}{\alpha\beta}-2\frac{xz}{\alpha\gamma}-2\frac{yz}{\beta\gamma}+2=0.$$

C'est un hyperboloïde à deux nappes ayant pour centre le point O, et dont le cône asymptote est tangent aux plans de coordonnées. On peut également écrire l'équation de la surface $(Q_0)$

$$(\alpha u+r)^2+(\beta v+r)^2+(\gamma w+r)^2-R^2(u^2+v^2+w^2)=0.$$

Les surfaces $(Q_0)$, lorsque R varie, font donc partie d'un faisceau homofocal, et par suite leurs axes restent fixes en position.

**3.** $(\alpha u+r)^2+(\beta v+r)^2+(\gamma w+r)^2=0$ est une ellipse imaginaire du plan (P), par suite une des focales de $(Q_0)$. On s'en assure en vérifiant que $f'_u=0$, $f'_v=0$, $f'_w=0$, $f'_r=0$ représentent quatre points du plan (P).

Cherchons les deux autres focales, et pour cela annulons le discriminant du premier membre de

$$(\alpha u+r)^2+(\beta v+r)^2+(\gamma w+r)^2+k(u^2+v^2+w^2)=0.$$

Nous trouvons, après suppression de la racine nulle en $k$,

$$\frac{1}{\alpha^2+k}+\frac{1}{\beta^2+k}+\frac{1}{\gamma^2+k}=0.$$

Or le cône ayant pour sommet l'origine et contenant une des focales, a pour équations tangentielles

$$(\alpha^2+k)u^2+(\beta^2+k)v^2+(\gamma^2+k)w^2=0,\qquad r=0,$$

et pour équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{\alpha^2+k}+\frac{y^2}{\beta^2+k}+\frac{z^2}{\gamma^2+k}=0.$$

Il contient donc les quatre droites $x^2=y^2=z^2$, c'est-à-dire

$$x=y=z,\qquad x=y=-z,\qquad x=-y=z,\qquad x=-y=-z.$$

Les deux focales s'appuient constamment sur ces quatre droites.

*Quadriques* $(Q_0)$ *dont on donne un plan principal, le rayon* R *de* (S) *étant également donné.*

Le centre $\omega$ de $(Q_0)$, $x=\frac{\alpha}{3}$, $y=\frac{\beta}{3}$, $z=\frac{\gamma}{3}$, est au tiers de OO′. La question revient à déterminer les points $\omega$.

Le plan donné peut être le plan (P) : O′ est alors déterminé, par suite $\omega$.

Ou bien l'on se donne le plan d'une des autres focales. On détermine par cela même quatre points de cette conique (sur les quatre droites trouvées plus haut). $\omega$ est sur la conique des neuf points de ce quadrilatère. A chaque point $\omega$ correspond un plan (P), mais ce plan n'est acceptable que s'il est perpendiculaire au plan principal donné, $u_0x + v_0y + w_0z + r_0 = 0$.

On a donc, en désignant par $x$, $y$, $z$ les coordonnées de $\omega$,

$$\frac{u_0}{x} + \frac{v_0}{y} + \frac{w_0}{z} = 0,$$

et le point $\omega$ doit se trouver sur la conique, intersection de ce cône et du plan donné. Il y a donc quatre centres $\omega$ correspondant à la seconde hypothèse. En tout cinq quadriques $(Q_0)$.

Cherchons maintenant les longueurs des axes de $(Q_0)$ et pour cela, transportons l'origine au centre $\omega$ de $(Q_0)$ (en remplaçant $r$ par $r - \frac{1}{3}(\alpha u + \beta v + \gamma w) = r - \frac{1}{3}T$) :

$$f(u, v, w, r) = (\alpha^2 - R^2)u^2 + (\beta^2 - R^2)v^2 + (\gamma^2 - R^2)w^2 - \frac{1}{3}T^2 + 3r^2 = 0.$$

Le diamètre d'un plan $u_0x + v_0y + w_0z + r = 0$, ayant pour équations $u_0f'_u + v_0f'_v + w_0f'_w = 0$, $f'_r = 0$, sera un axe si

$$\frac{f'_{u_0}}{u_0} = \frac{f'_{v_0}}{v_0} = \frac{f'_{w_0}}{w_0},$$

ou

$$\frac{\alpha^2 u_0 - \frac{1}{3}\alpha T}{u_0} = \frac{\beta^2 v_0 - \frac{1}{3}\beta T}{v_0} = \frac{\gamma^2 w_0 - \frac{1}{3}\gamma T}{w_0}.$$

Si nous posons $\frac{3u_0}{T} = U_0$, etc., il vient

$$U_0 = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k}, \qquad V_0 = \frac{\beta}{\beta^2 + k}, \qquad W_0 = \frac{\gamma}{\gamma^2 + k},$$

avec la condition $\alpha U_0 + \beta V_0 + \gamma W_0 = 3$, ou

$$(1) \qquad k\left[\frac{1}{\alpha^2 + k} + \frac{1}{\beta^2 + k} + \frac{1}{\gamma^2 + k}\right] = 0.$$

Cette équation a une racine nulle en $k$, laquelle correspond à $U_0 = \frac{1}{\alpha}$, etc. L'un des plans principaux est le plan (P). La longueur du demi-axe, dirigé suivant la perpendiculaire au plan (P), est la distance $\delta$ de la nouvelle origine au plan tangent parallèle à (P)

$$\delta^2 = \frac{r^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Or si l'on exprime que les coordonnées du plan

$$\frac{u}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{v}{\frac{1}{\beta}} = \frac{w}{\frac{1}{\gamma}} = \frac{r}{\theta}$$

satisfont à l'équation $f(u, v, w, r) = 0$, on trouve

$$3\theta^2 = R^2 \Sigma \frac{1}{\alpha^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \delta^2 = 3R^2.$$

Les longueurs $\delta_1$, $\delta_2$ des demi-axes dans le plan (P) se trouvent aussi facilement. Les plans tangents aux sommets correspondants ont pour coordonnées

$$\frac{u}{\frac{\alpha}{\alpha^2 + k}} = \frac{v}{\frac{\beta}{\beta^2 + k}} = \frac{w}{\frac{\gamma}{\gamma^2 + k}} = \frac{r}{\theta},$$

$k$ étant une des racines non nulles, $k_1, k_2$, de l'équation (1). On aura $\theta$ par le même moyen que précédemment

$$3\theta^2 = 3 - \Sigma \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 + k)^2} + R^2 \Sigma \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + k)^2},$$

ou, en tenant compte des relations $\Sigma \frac{1}{\alpha^2 + k} = 0, \qquad \Sigma \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + k} = 3,$

$$3\theta^2 = (R^2 + k)\Sigma \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + k)^2};$$

et l'on a pour les demi-axes $\delta_1, \delta_2$

$$\left.\begin{matrix}\delta_1^2 \\ \delta_2^2\end{matrix}\right\} = \frac{r^2}{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{\theta^2}{\Sigma \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + k)^2}} = \frac{R^2 + k}{3}.$$

Si l'on veut que $(Q_0)$ reste de grandeur constante, il faudra d'abord que R soit constant, et par suite que les deux racines $k_1, k_2$ le soient aussi.

Le lieu du centre O′ de la sphère (S) sera la courbe sphérique, intersection des deux surfaces

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -\dfrac{3(k_1 + k_2)}{2}, \\ \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = 3k_1 k_2. \end{cases}$$

Si l'on astreint simplement la quadrique $(Q_0)$ à rester semblable à une quadrique donnée, on aura $k_1 = h_1 R^2$, $k_2 = h_2 R^2$, ($h_1, h_2$ étant des constantes, mais R variant), d'où les équations

$$\Sigma\alpha^2 = -\frac{3(h_1 + h_2)}{2} R^2, \qquad \Sigma\alpha^2\beta^2 = 3h_1 h_2 R^4;$$

et par élimination de $R^2$, on aura pour lieu de O′ le cône du 4e ordre

$$4h_1 h_2 (\Sigma\alpha^2)^2 - 3(h_1 + h_2)^2 \Sigma\alpha^2\beta^2 = 0.$$

Dans les deux cas, le lieu du centre $\omega$ de $(Q_0)$ est homothétique au lieu de O′ dans le rapport $\frac{1}{3}$.

**4.** Si l'on représente par $f(u, v, w, r) = 0$, l'équation générale des quadriques (Q) trouvée au numéro 1, pour que (Q) soit de révolution, il faut et il suffit qu'on puisse trouver un nombre S tel que l'on ait

$$f(u, v, w, r) - S(u^2 + v^2 + w^2) \equiv PQ.$$

Comme les rectangles des variables sont nuls, $r$ est forcément un des facteurs du produit PQ, d'où il résulte que

$$\lambda(\alpha^2 - R^2) = \mu(\beta^2 - R^2) = \nu(\gamma^2 - R^2) = S.$$

L'un des foyers, qui est en O, est donc fixe. L'autre foyer décrit, lorsque R varie, l'homothétique dans le rapport $\frac{2}{1}$ du lieu du centre. Or les coordonnées $\xi, \eta, \zeta$ de ce point satisfont aux relations

$$\frac{\xi}{\dfrac{\alpha}{\alpha^2 - R^2}} = \frac{\eta}{\dfrac{\beta}{\beta^2 - R^2}} = \frac{\zeta}{\dfrac{\gamma}{\gamma^2 - R^2}}.$$

En égalant ces rapports à $\rho$, et éliminant $\rho$, $R^2$, on a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\alpha}{\xi} & \alpha^2 & 1 \\ \dfrac{\beta}{\eta} & \beta^2 & 1 \\ \dfrac{\gamma}{\zeta} & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\Sigma(\beta^2 - \gamma^2)\frac{\alpha}{\xi} = 0,$$

équation d'un cône du 2e ordre (C), qui contient les trois axes de coordonnées, la droite OO' et la perpendiculaire abaissée de O sur le plan (P).

Le lieu du centre des quadriques $(Q_1)$ est la conique d'intersection de ce cône par le plan (P).

*Lieu des sommets.* — Si nous écrivons l'équation de $(Q_1)$ sous la forme

$$\sigma(u^2+v^2+w^2)+2\xi ur+2\eta vr+2\zeta wr+r^2=0,$$

nous trouvons pour équation ponctuelle de cette surface

$$(1)\qquad (\sigma-\Sigma\xi^2)(x^2+y^2+z^2)+(\xi x+\eta y+\zeta z-\sigma)^2=0.$$

Les sommets de l'axe focal sont évidemment les points d'intersection avec la droite

$$(2)\qquad \frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta}=\frac{z}{\zeta}=\tau.$$

On a les valeurs de $\tau$ relatives aux sommets en portant dans (1) :

$$(3)\qquad \tau(\tau-2)\Sigma\xi^2+\sigma=0,$$

avec
$$\frac{\xi}{\tau}=\frac{\alpha}{\alpha^2-R^2},\qquad \frac{\eta}{\tau}=\frac{\beta}{\beta^2-R^2},\qquad \frac{\zeta}{\tau}=\frac{\gamma}{\gamma^2-R^2},$$

$$(4)\qquad \frac{1}{\tau}=\Sigma\frac{1}{\alpha^2-R^2}.$$

De deux quelconques des équations (2), on peut tirer $R^2$ et $\tau$ ; on a ainsi, en posant $\frac{x}{\alpha}=X$, $\frac{y}{\beta}=Y$, $\frac{z}{\gamma}=Z$,

$$(5)\qquad -\sigma\tau=\frac{(\beta^2-\gamma^2)YZ}{Y-Z}=\frac{(\gamma^2-\alpha^2)ZX}{Z-X}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)XY}{X-Y}.$$

Ces relations donnent d'abord $\Sigma\frac{\beta^2-\gamma^2}{X}=0$, ce qui était évident.

Des systèmes (2) et (4) on tire ensuite

$$\tau=\Sigma X\qquad\text{et}\qquad \Sigma\xi^2=\frac{1}{\tau^2}\Sigma x^2=\frac{1}{\tau^2}\Sigma\alpha^2X^2,$$

et l'équation (3) devient
$$(\Sigma X-2)\Sigma\alpha^2X^2+\sigma\tau=0.$$

En éliminant $\sigma\tau$ entre cette équation et une des expressions (5), on a

$$(6)\qquad (\Sigma X-2)\Sigma\alpha^2X^2.\Sigma l(Y-Z)-\Sigma l(\beta^2-\gamma^2)YZ=0,$$

où $l$, $m$, $n$ sont des nombres quelconques.

L'intersection d'une des surfaces du 4e ordre (6) et du cône (C) est la courbe lieu des sommets.

Or si l'on prend $l=\alpha^2$, $m=\beta^2$, $n=\gamma^2$, on voit que la surface (6) correspondante contient la droite OO', $X=Y=Z$, génératrice du cône (C). De même, si l'on prenait $m=0$, $n=0$, la surface (6) contiendrait l'axe des $x$, également génératrice du cône (C). Il en résulte que le lieu des sommets est une *courbe gauche du 7e ordre.*

Passons maintenant à la dernière partie.

Si l'on désigne par $u_0$, $v_0$, $w_0$, $r_0$ les coordonnées du plan (U), ces quantités doivent satisfaire à l'équation tangentielle de la surface. On a donc, en posant

$$2\alpha u_0+r_0=A,\qquad 2\beta v_0+r_0=B,\qquad 2\gamma w_0+r_0=C,$$

$$(1)\qquad u_0^2+v_0^2+w_0^2=r_0D,$$

$$\frac{A}{\alpha^2-R^2}+\frac{B}{\beta^2-R^2}+\frac{C}{\gamma^2-R^2}+D=0.$$

Cette équation étant du 3e degré en $R^2$, il existe bien 3 quadriques $(Q_1)$ tangentes au plan (U).

Or si $u$, $v$, $w$, $r$ sont les coordonnées d'un des plans tangents communs, l'équation

$$\frac{2\alpha u+r}{\alpha^2-R^2}+\frac{2\beta v+r}{\beta^2-R^2}+\frac{2\gamma w+r}{\gamma^2-R^2}+\frac{u^2+v^2+w^2}{r}=0$$

devra être satisfaite lorsqu'on remplacera $R^2$ par une quelconque des racines de l'équation du 3e degré obtenue plus haut.

On pourra donc récrire les équations (I) en supprimant les indices. Les valeurs de $u$, $v$, $w$, tirées des trois premières, étant portées dans la quatrième, il vient

$$\text{(II)} \qquad \Sigma\left(\frac{A-r}{2\alpha}\right)^2 = rD.$$

Cette équation donne deux valeurs de $r$, $r_0$ et $r'_0$ ; à la seconde correspond le système de valeurs $u'_0$, $v'_0$, $w'_0$ :

$$u'_0 = \frac{A-r'_0}{2\alpha} = u_0 + \frac{1}{2\alpha}(r_0 - r'_0), \quad \text{etc.}$$

Les trois quadriques tangentes au plan (II) admettent bien un second plan tangent (II').

Pour que les plans (II), (II') soient rectangulaires, il faut que la relation

$$\Sigma u_0 u'_0 = \Sigma u_0^2 + \frac{1}{2}(r_0 - r'_0)\Sigma\frac{u_0}{\alpha} = 0$$

soit satisfaite.

Or si l'on débarrasse l'équation (II) de la racine $r_0$, on obtient

$$\Sigma u_0^2 + r_0\,\Sigma\frac{u_0}{\alpha} + \frac{1}{4}r_0(r_0 - r'_0)\Sigma\frac{1}{\alpha^2} = 0.$$

Et pour avoir l'enveloppe cherchée, il ne reste plus qu'à éliminer $r_0 - r'_0$, ce qui donne

$$2\Sigma\frac{u_0}{\alpha}\Sigma u_0^2 - r_0\left[\Sigma\frac{1}{\alpha^2}\Sigma u_0^2 - 2\left(\Sigma\frac{u_0}{\alpha}\right)^2\right] = 0,$$

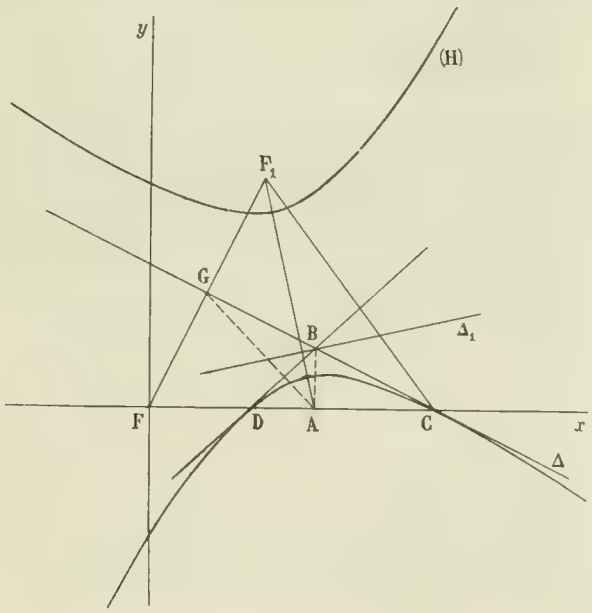
équation d'une surface de 3e classe doublement tangente au plan de l'infini, ayant un foyer au point O.

VASNIER.

---

**1154.** — *Lieu des centres des ellipses ayant un foyer commun, passant par un point donné et touchant une droite donnée.*

Prenons pour origine le foyer donné F, pour axe des $x$ la droite joignant le point F au point donné A, et pour axe des $y$ la perpendiculaire à FA. Soit $a$ l'abscisse du point A et $x\cos\omega + y\sin\omega - p = 0$ l'équation de la droite donnée $\Delta$. Le lieu du centre des ellipses considérées est homothétique du lieu du deuxième foyer, le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{2}$, et le centre d'homothétie étant le point F. Nous allons chercher ce dernier lieu, et il nous sera facile d'en déduire le lieu du centre.




Observons d'abord que pour qu'il existe des ellipses ayant pour foyer le point F, passant par le point A et tangentes à la droite $\Delta$, il faut que les deux points F et A soient situés d'un même côté de $\Delta$ ; on doit donc avoir entre les données la condition suivante

$$\text{(1)} \qquad -p(a\cos\omega - p) < 0.$$

Désignons par $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du deuxième foyer F'. Une conique quelconque (C) ayant

pour foyers F et F′ a pour équation tangentielle

$$\lambda(u^2+v^2)+w(\alpha u+\beta v+w)=0.$$

Elle sera tangente à $\Delta$ si l'on a

(2) $$\lambda=p(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega-p).$$

D'autre part, on voit aisément que l'équation ponctuelle de cette conique est

(C) $$\left(\lambda-\frac{\beta^2}{4}\right)x^2+\frac{\alpha\beta}{2}xy+\left(\lambda-\frac{\alpha^2}{4}\right)y^2-\lambda\alpha x-\lambda\beta y+\lambda^2=0,$$

et pour qu'elle passe au point A, il faut qu'on ait

$$\left(\lambda-\frac{\beta^2}{4}\right)a^2-\lambda\alpha a+\lambda^2=0,$$

ou (3) $$4\lambda[\lambda-a(\alpha-a)]-a^2\beta^2=0.$$

Nous aurons l'équation du lieu du point $(\alpha,\beta)$ en éliminant $\lambda$ entre les équations (2) et (3). Nous obtenons ainsi, après avoir remplacé $\alpha$ et $\beta$ par $x$ et $y$,

$$4p(x\cos\omega+y\sin\omega-p)[p(x\cos\omega+y\sin\omega-p)-a(x-a)]-a^2y^2=0,$$

ou, en posant $P\equiv x\cos\omega+y\sin\omega-p$,

(H) $$4pP[pP-a(x-a)]-a^2y^2=0.$$

Le lieu cherché est donc une conique (H). Mais un point de cette conique n'est un véritable point du lieu que s'il est le foyer d'une *ellipse*, c'est-à-dire si la conique (C) est une ellipse. On doit donc avoir

$$\left(\lambda-\frac{\beta^2}{4}\right)\left(\lambda-\frac{\alpha^2}{4}\right)-\frac{\alpha^2\beta^2}{16}>0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda\left(\lambda-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)>0,$$

ou, en remplaçant $\lambda$ par sa valeur (2)

$$p(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega-p)\left[p(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega-p)-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right]>0,$$

ou encore $$-p(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega-p)[(\alpha-2p\cos\omega)^2+(\beta-2p\sin\omega)^2]>0,$$

ou enfin $$-p(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega-p)>0.$$

Cette inégalité exprime que le point $(\alpha,\beta)$ est situé par rapport à la droite $\Delta$ du même côté que l'origine ou que le point A.

Donc le lieu cherché se compose de la portion de la conique (H) qui est située par rapport à $\Delta$ du même côté que le point A.

Etudions maintenant cette conique. Désignons par $G(p\cos\omega, p\sin\omega)$ la projection de F sur $\Delta$, par $F_1(2p\cos\omega, 2p\sin\omega)$ le symétrique de F par rapport à $\Delta$, et par B le point de rencontre de $\Delta$ et de la parallèle à $Oy$ menée par le point A.

L'équation de la conique (H) nous montre que cette conique est tangente aux droites $P=0$, et $pP-a(x-a)=0$ aux points où ces droites rencontrent l'axe des $x$. Or l'équation $P=0$ représente la droite $\Delta$ qui rencontre $Fx$ au point C, l'équation $pP-a(x-a)=0$ représente une droite passant par le point B et perpendiculaire à AG ; soit D le point de rencontre de cette droite avec $Fx$. La conique (H) est tangente en C et D aux droites BC et BD.

De plus, l'équation (H) peut s'écrire

$$[2pP-a(x-a)]^2-a^2[(x-a)^2+y^2]=0$$

ou $$(x-a)^2+y^2=\frac{1}{a^2}[2pP-a(x-a)]^2,$$

ce qui montre que la conique (H) admet pour foyer le point A, et pour directrice correspondante la droite $2pP-a(x-a)=0$, c'est-à-dire la droite $\Delta_1$ menée par le point B perpendiculaire à $AF_1$. Il en résulte que $AF_1$ est l'axe focal de cette conique, et comme $CF_1$ est symétrique de CA par rapport à la tangente CB, on en conclut que $F_1$ est le deuxième foyer de la conique (H).

L'excentricité $e$ de cette conique est donnée par

$$e^2 = \frac{(2p\cos\omega - a)^2 + 4p^2\sin^2\omega}{a^2};$$

or nous avons

$$e^2 - 1 = \frac{4p(p - a\cos\omega)}{a^2},$$

et l'inégalité (1) nous montre que $e^2 - 1$ est positif, par suite la conique (H) est une hyperbole.

D'autre part, la valeur de $e^2$ peut s'écrire

$$e^2 = \frac{\overline{AF_1}^2}{\overline{AF}^2} \qquad \text{ou} \qquad e = \frac{AF_1}{AF};$$

comme $AF_1$ est la distance focale, on en conclut que AF est la longueur de l'axe réel.

Il résulte de là que la conique (H) est une hyperbole ayant pour foyers les points A et $F_1$, et dont la longueur de l'axe réel est égale à AF.

Le lieu du deuxième foyer de la conique (C) est la branche de cette hyperbole la plus voisine du foyer A.

J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

**Solution géométrique.**— Soit F' le deuxième foyer d'une ellipse (C') ayant pour foyer le point F, passant par le point A et tangente à la droite Δ. Si on désigne par $2a$ le grand axe de cette ellipse, on a

$$F'F_1 = 2a \qquad \text{et} \qquad AF' + AF = 2a;$$

on en déduit $F'F_1 = AF' + AF$ ou $F_1F' - AF' = AF$.

Cette égalité montre que le point F' est situé sur la branche voisine de A de l'hyperbole qui a pour foyers les points A et $F_1$ et dont la longueur de l'axe réel est égal à AF.

R. JAVELOT, à Givet.

Bonnes solutions par MM. P. Canet, lycée de Nancy ; J.-D. Dufaut, à Poitiers ; Fuzac, à Toulouse ; T. Lemoyne, à Troyes ; Oscar Nuytten, lycée de Lille ; Charles Pellion, à Rennes ; R. Bouvaist.

## BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DES SCIENCES (1902, *fin*).

### Physique.

**1130.** — *Un baromètre à siphon est maintenu à la température de* 0°; *la branche ouverte à l'air est cylindrique et a* 15$^{cmq}$ *de section ; la branche fermée, également cylindrique, a* 3$^{cmq}$ *de section. Ces deux branches ont leur axe vertical.*

*Au début, la chambre barométrique est vide de tout gaz et a alors une capacité de* 21$^{cc}$. *On introduit dans cette chambre barométrique* 1 *décigramme d'air sec. On demande de combien descendra le niveau du mercure dans la branche fermée ?*

*L'intensité de la pesanteur à l'endroit où a lieu l'expérience est de* 980. *On sait que la masse d'un litre d'air à* 0° *sous la pression qu'exerce à Paris une colonne de mercure de* 76$^{cm}$ *à* 0° *est* 1$^{gr}$,293 ; *l'intensité de la pesanteur à Paris est* 981.

Soit $x$ la longueur cherchée. Le volume occupé par l'air sera $21 + 3x$.

Le mercure, étant descendu de $x$ dans la branche fermée, est monté dans la branche ouverte d'une quantité $y$ telle que $15y = 3x$, d'où $y = 0{,}2x$. La différence des niveaux du mercure dans les deux branches a donc diminué en tout de $x + 0{,}2x$ et cette variation représente, en hauteur de mercure, la pression de l'air introduit. En unités absolues, cette pression sera exprimée par $1{,}2x.\mu.980$, $\mu$ désignant la masse spécifique du mercure normal.

Il ne reste plus qu'à relier le volume, la pression et la masse de l'air par la formule connue

$$m = vda\frac{p}{p_0}\frac{1}{1+\alpha t},$$

ce qui donne

$$0,1 = (21+3x)\times 0,001293\times\frac{1,2x.\mu.980}{76\mu.981}.$$

En simplifiant et ordonnant, on trouve

$$x^2 + 7x - 1634,4 = 0.$$

La racine positive convient seule à la question ; elle est égale à

$$x = 37,07.$$

Le niveau du mercure est donc descendu de 37,07 centimètres.

---

## Chimie.

**1131**. — *On verse dans une grande quantité d'eau un mélange de trichlorure et de pentachlorure de phosphore.*

*Pour neutraliser le liquide acide ainsi obtenu avec une dissolution normale de soude* (NaOH = 40gr *par litre), on trouve qu'il faut employer* 100cc *de cette dissolution pour la neutralisation au méthylorange au* 120cc *pour la neutralisation à la phtaléine du phénol.*

*On demande :*

1° *Le poids du mélange de trichlorure et de pentachlorure de phosphore employé ;*

2° *La composition de ce mélange.*

On sait que le trichlorure et le pentachlorure de phosphore sont décomposés par l'eau suivant les équations

$$PCL^3 + 3H^2O = POH(OH)^2 + 3HCL,$$
$$PCL^5 + 4H^2O = PO(OH)^3 + 5HCL.$$

On sait d'autre part que les sels monosodiques de l'acide phosphoreux et de l'acide orthophosphorique sont neutres au méthylorange et acides à la phtaléine du phénol et que les sels disodiques des mêmes acides sont neutres à la phtaléine ; quant au chlorure de sodium, il est neutre vis-à-vis des deux réactifs.

Soient $x$ et $y$ les poids de trichlorure et de pentachlorure ; les poids moléculaires de ces deux corps étant respectivement 137,5 et 208,5, les nombres de leurs molécules seront $\frac{x}{137,5}$ et $\frac{y}{208,5}$.

En présence du méthylorange, il faut employer à la neutralisation de la liqueur pour une molécule de trichlorure 4 molécules ou 160gr de soude et pour une molécule de pentachlorure 6 molécules ou 240gr de soude. Comme les 100cc de liqueur employée contiennent 4gr de soude, on peut écrire

$$\frac{x}{137,5}\cdot 160 + \frac{y}{208,5}\cdot 240 = 4.$$

On aurait de même, en considérant la neutralisation en présence de la phtaléine

$$\frac{x}{137,5}\cdot 200 + \frac{y}{208,5}\cdot 280 = 4,8.$$

Ces deux équations donnent

$$x = 1^{gr},375, \qquad y = 2^{gr},085, \qquad x+y = 3^{gr},46.$$

J. LOIRE.

# GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

**1120**. — *La ligne de terre étant tracée à* $22^{cm}$ *au-dessus du bord inférieur de la feuille, on donne une sphère de* $4^{cm}$ *de rayon et dont le centre, ayant ses projections à* $11^{cm}$ *du bord de droite de la feuille, est à* $10^{cm}$ *au-dessus du plan horizontal et à* $8^{cm}$ *en avant du plan vertical de projection. — Une seconde sphère, de* $3^{cm}$ *de rayon, est tangente intérieurement à la première, au plus haut des deux points de son contour apparent vertical où la tangente* T *est inclinée à* $45^{\circ}$ *sur la ligne de terre.*

**1**. *Représenter par ses projections la courbe d'intersection de la première sphère avec le cylindre circonscrit à la seconde, et dont les génératrices sont de front et parallèles à la tangente* T.

*On déterminera : un point quelconque (qui sera désigné par m) de la courbe, et la tangente en ce point (qu'on désignera par t) : les points* $(m_1, m_2, \ldots)$ *sur les contours apparents verticaux et les tangentes* $(t_1, t_2, \ldots)$ *en ces points : les points sur le contour apparent horizontal du cylindre et les tangentes à la projection verticale de la courbe aux projections verticales de ces points.*

*Les points sur le contour apparent horizontal de la sphère seront déduits du tracé de la projection verticale de la courbe. On indiquera la ligne des points doubles apparents en projection horizontale.*

**2**. *On supposera ensuite que la sphère, entaillée par le cylindre, soit éclairée par des rayons lumineux parallèles aux génératrices du cylindre, et on figurera par des hachures l'ombre portée sur le plan horizontal par la sphère pleine ainsi trouée.*

*Pour la détermination des parties vues (en traits pleins noirs) et cachées (points ronds noirs), on supposera que les deux corps existent ; la seconde sphère sera considérée comme auxiliaire et sera représentée, en traits rouges, ainsi que toutes les constructions. Le cylindre sera prolongé dans les deux sens un peu au-delà de la première sphère.*

*N. B. — Les candidats pourront indiquer dans une courte légende, en un coin de la feuille, les méthodes qu'ils emploieront.*

(*École Polytechnique, 1902.*)

*Détermination d'un point quelconque et de la tangente en ce point.* — Nous emploierons des sphères auxiliaires ayant pour centre commun le point de rencontre $(i, i')$ de l'axe du cylindre et de la verticale du centre $(o, o')$ de la sphère. Une sphère auxiliaire quelconque coupe les deux surfaces suivant des parallèles projetés verticalement sur des droites dont le point de concours est un point de la projection verticale cherchée de l'intersection des deux surfaces ; la sphère auxiliaire, qui coupe le cylindre suivant le parallèle $m'r'$, détermine dans la sphère donnée le parallèle $m'p'$, d'où le point $m'$. La projection horizontale $m$ du point correspondant est donnée par le parallèle de centre $o$ et de rayon $op$.

La tangente en $(m, m')$ a été obtenue par la méthode des normales ; les normales en $(m, m')$ sont $(mo, m'o')$ pour la sphère et $(mn, m'n')$ pour le cylindre. Une frontale du plan de ces normales est $(no, n'o')$ et une horizontale est $(nh, n'h')$ ; on en déduit $mt$ perpendiculaire à $nh$, et $m't'$ perpendiculaire à $n'o'$.

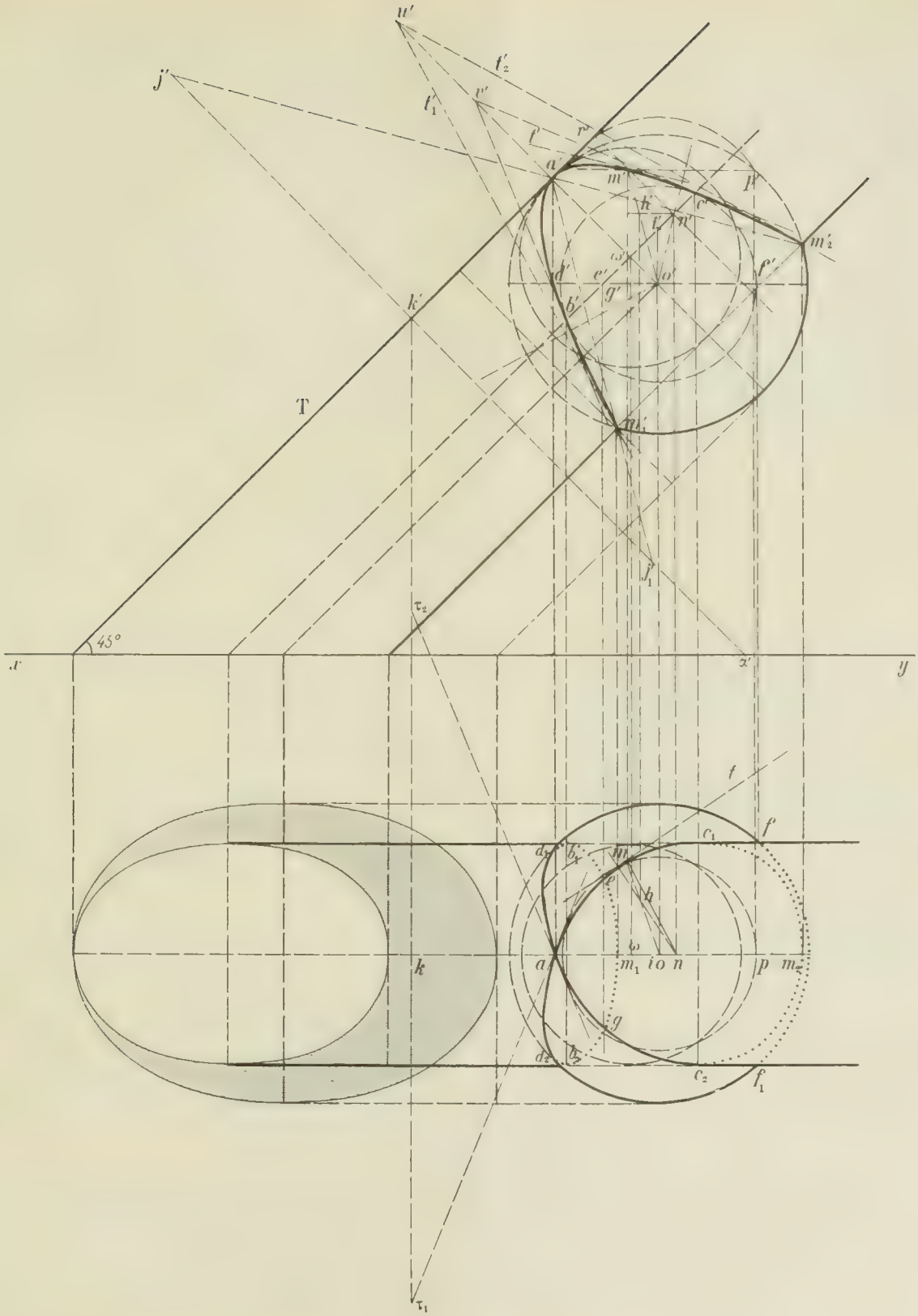
*Recherche des points importants.* — Les deux surfaces sont tangentes entre elles au point $(a, a')$ ; leur intersection présente un point double réel en ce point. La projection verticale de l'intersection est une parabole dont l'axe est $a'o'$. La projection horizontale de l'intersection est une courbe du 4e degré admettant $ao$ pour axe de symétrie.

Les points sur le contour apparent vertical sont $(a, a')$, $(m_1, m_1')$ et $(m_2, m_2')$ qui sont donnés immédiatement. Les tangentes en ces derniers points sont de bout, projetées horizontalement en $(m_1, m_1')$ et $(m_2, m_2')$ perpendiculaires à $xy$. Les tangentes à la projection verticale en $m_1'$ et $m_2'$ ont été construites par la méthode des normales, d'où $m_1't_1'$ et $m_2't_2'$ qui coupent $a'o'$ au même point $u'$.

Les points sur le contour apparent horizontal du cylindre s'obtiennent en coupant la sphère par les plans verticaux contenant les génératrices de contour apparent horizontal. Le plan vertical $b_1c_1$ donne dans la sphère le cercle $o'f'$ d'où les points $b'$ et $c'$ et par suite $b_1$ et $c_1$, et par conséquent les points $b_2$ et $c_2$. Les tangentes à la projection verticale de l'intersection en ces points se déterminent par la méthode des normales, ou bien encore en prenant $a'v' = a'\omega'$, d'où ces tangentes $b'v'$ et $c'v'$.

Quant aux points $d_1$ et $d_2$ sur le contour apparent horizontal de la sphère, on les a déduits du point de rencontre $d'$ de la projection verticale de l'intersection et de $o'f'$, projection verticale du contour apparent horizontal de la sphère.

Il reste à construire les tangentes au point double réel $(a, a')$. Pour cela nous considérons le cône d'erreur, qui a pour sommet $(a, a')$ et pour directrice l'intersection du cylindre et de la sphère ; il est du 2e degré. De plus, tout plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, coupant le cylindre et la sphère suivant des cercles, coupe ce cône d'erreur suivant un cercle. Prenons le plan de bout, de trace verticale $\alpha k'$ perpen-


u'
t'2
j'
t'1
v'
t
r'
a'
m'
p'
h'
c'
t'
n'
m'2
ω'
d'
e'
o'
f'
g'
b'
k'
T
m'1
j'1
τ2
45°
x
x'
y
t
f
c1
d1
b1
m1
e
h
ω
a
m1
i o n
p
m2
k
g
d2
b2
c2
f1
τ1

diculaire à $\omega' i'$ ; la trace du cône d'erreur sur ce plan est un cercle dont le centre est $(k, k')$. Deux génératrices $a'm_1'$ et $a'm_2'$ ont pour traces $j'$ et $j_1'$ ; le rayon du cercle de base du cône est $k'j'$. L'intersection du plan de cette base et du plan tangent commun en $(a, a')$ est la droite de bout $(k, k')$ qui est un diamètre du cercle et par suite rencontre ce cercle en deux points projetés horizontalement en $\tau_1$ et $\tau_2$ tels que $k\tau_1 = k\tau_2 = k'j'$, d'où les tangentes $a\tau_1$ et $a\tau_2$ en $a$ à la projection horizontale de l'intersection.

La ligne des points doubles apparents, en projection horizontale, est $eg$, projection horizontale de l'intersection des plans de contour apparent horizontal des deux surfaces, qui sont ici le plan de bout $b'i'$ et le plan horizontal $o'f'$.

*Ombre portée sur le plan horizontal.* — L'ombre portée par la sphère $(o, o')$ est limitée par l'ellipse, trace horizontale du cylindre circonscrit à cette sphère et dont les génératrices sont parallèles à celles du cylindre donné. Mais par ce dernier cylindre passent des rayons lumineux qui éclairent la portion du plan horizontal intérieure à l'ellipse, trace horizontale de ce cylindre. Donc la partie dans l'ombre est celle extérieure à la petite et intérieure à la grande ellipse.

*Représentation de l'ensemble des deux solides.* — Nous représentons le corps formé par l'ensemble de la sphère solide $(o, o')$ et du cylindre solide donné. Les portions de contour apparent de l'un, intérieures à l'autre, sont alors supprimées, tout est vu en projection verticale. En projection horizontale, les arcs partant de $a$ sont vus jusqu'à leurs premiers points de rencontre avec un contour apparent. Le reste est caché, ainsi que l'arc $ff_1$ de contour apparent de la sphère qui subsiste, mais se trouve au-dessous du cylindre. N. C.

# QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

## ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1902, *fin*).

### Mathématiques.

**518.** — Rapport anharmonique de 4 quantités imaginaires ; interprétation géométrique.

**519.** — On considère la cubique gauche

$$x = \frac{1}{t-a}, \qquad y = \frac{1}{t-b}, \qquad z = \frac{1}{t-c}.$$

On coupe par des plans qui se déplacent parallèlement à eux-mêmes ; on a trois points $A_1$, $A_2$, $A_3$.

1° Lieu du centre de gravité du triangle.

2° Lieu du cercle circonscrit (quadrique). Condition pour que la quadrique trouvée soit de révolution.

**520.** — Démontrer la formule

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a+\theta h) \qquad -1 < \theta < 1.$$

**521.** — On considère la courbe :

$$x = t^4, \qquad y = t^3, \qquad z = t+1.$$

Ordre de la courbe.

Sécantes triples de la courbe. Condition nécessaire et suffisante pour que quatre points soient dans un même plan.

**522.** — Résolution de l'équation du quatrième degré.

**523.** — On donne la courbe $\quad x = a\,\dfrac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y = b\,\dfrac{2t}{1-t^2}.$

Relation entre quatre $t$ pour que les points correspondants soient sur un même cercle. Discussion.

**524.** — On donne un cercle de rayon 1 et dont le centre est à l'origine, et deux points déterminés par les angles $\varphi$ et $\varphi'$ que font les rayons OA, OB avec $Ox$ ; trouver l'angle dont il faut faire tourner $Ox$ pour l'amener sur AB.

**525.** — Combien de cercles osculateurs à l'ellipse passent par un point ? Les points de contact et le point sont sur un même cercle.

**526.** — Discuter au point de vue de la réalité des racines l'équation

$$(x-a)^p(x-b)^q(x-c)^r = 1.$$

Cas ou $p$, $q$, $r$ sont impairs.

**527.** — Quand deux quadriques se touchent en un point, la biquadratique d'intersection est unicursale. Le voir géométriquement et analytiquement.

**528.** — On considère la courbe

$$x = at^2 + bt + c, \qquad y = a't^2 + b't + c', \qquad z = a''t^2 + b''t + c''.$$

Démontrer que c'est une courbe plane, une parabole. Trouver son plan, son axe, son sommet, son foyer.

**529.** — On considère un faisceau de quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0.$$

Lieu des pôles d'un plan fixe $ux+vy+wz+h=0$ (géométriquement).

On donne la droite $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$. Lieu des droites conjuguées par rapport aux quadriques du faisceau. C'est un paraboloïde. Quand devient-il un plan ? — Quand la droite varie, les droites forment un complexe. Cône du complexe. Courbe du complexe (parabole). Foyer de la parabole du complexe.

**530.** — On considère les deux courbes

$$y^3+Ay+B=0,$$
$$y^3+Cy+D=0,$$

A et B désignant des fonctions de $x$. Intersection des deux courbes. Cas où 3 points d'intersection sont en ligne droite ; cas où le résultant est identiquement nul.

**531.** — Etudier la série

$$u_n=L\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}.$$

Elle est convergente. En déduire que $L(n+1)-S_n$ tend vers une limite (en désignant par $S_n$ la somme des $n$ premiers termes de la série $\frac{1}{n}$).

**532.** — On considère $E=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{a+b}$.

Si $a$ et $b$ augmentent indéfiniment et si $\frac{b}{a}$ tend vers une limite, E tend aussi vers une limite.

**533.** — On cherche successivement $\cos ma$ et $\sin ma$ en fonction de $\cos a$. On pose dans le premier cas $\cos a=x$, dans le second cas $\cos a=y$ ; on a $\cos ma=\varphi(x)$, $\sin ma=\psi(y)$.

Démontrer que la courbe $[\varphi(x)]^2+[\psi(y)]^2=1$ se décompose en coniques.

**534.** — Soit une courbe du quatrième degré,

$$x=\frac{f(t)}{\varphi(t)},\qquad y=\frac{g(t)}{\varphi(t)},\qquad z=\frac{h(t)}{\varphi(t)};\qquad f(t)=at^4+bt^3+ct^2+dt+e,\ \text{etc.}$$

Relations entre $t_1, t_2, t_3, t_4$ pour que les quatre points correspondants soient dans un même plan. Equation du plan. Condition pour que 3 points soient en ligne droite. Lieu de la droite. C'est une quadrique.

**535.** — On considère la conique

$$x=\frac{at^2+bt+c}{a't^2+b't+c'},\qquad y=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{a't^2+b't+c'}.$$

Soient $M_1$, $M_2$ deux points $t_1$, $t_2$. Equation de la droite les joignant : on trouve

$$\alpha t_1t_2+\beta(t_1+t_2)+\gamma=0,$$

$\alpha, \beta, \gamma$ étant des fonctions de $x$ et de $y$.

**536.** — Enveloppe des sphères dont le centre décrit un ellipsoïde et orthogonales à une sphère donnée.

**537.** — On donne un ellipsoïde et un plan passant par $(x_0, y_0, z_0)$. Exprimer les coordonnées d'un point de la section en fonction d'un paramètre.

**538.** — On donne un faisceau de quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0.$$

Par un point il passe 3 quadriques homofocales orthogonales. On prend, au moyen d'une transformation de coordonnées, pour plans des axes les 3 plans tangents en ce point. Démontrer que les cônes circonscrits ayant pour sommet ce point sont homofocaux et ont pour plans principaux les plans tangents.

**539.** — Equation cartésienne de la surface

$$x=\frac{b^2+c^2}{bc},\qquad y=\frac{c^2+a^2}{ac},\qquad z=\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1212.** — On considère une parabole et un point A ; par le point A on mène les tangentes à la parabole qui touchent cette courbe en B et C.

1° Trouver le lieu du sommet du trièdre trirectangle ayant pour trace sur le plan de la parabole le triangle ABC. On trouve une surface cubique dont on demande la trace sur le plan de la parabole. Montrer que cette surface cubique a quatre points doubles ; étudier les droites de cette surface.

2° Trouver le lieu des points A qui correspondent aux points de la surface situés dans un plan parallèle au plan de la parabole. Voir en particulier ce qui se passe quand le plan coïncide avec celui de la parabole.

E. H.

**1213.** — On considère un quadrilatère fixe ABCD, dont A, B et C, D sont deux couples de sommets opposés et on envisage une conique (E) inscrite dans ce quadrilatère, puis la conique variable (C) passant par les points C et D, tangente à la diagonale AB et aux deux droites MA et MB, qui joignent un point M variable sur la conique (E) aux points A et B.

1° Montrer que la polaire de M par rapport à la conique (C) enveloppe une conique (Γ) qui passe aux points A et B, qui est tangente en ces points aux droites KA, KB, K étant le pôle de AB par rapport à la conique (E), et qui est bitangente à cette conique aux deux points où elle rencontre CD.

2° Le lieu du pôle de CD par rapport à la conique (C) est une conique (Γ′) qui touche aussi les droites KA, KB aux points A et B.

3° Quand (E) varie, toutes les coniques (Γ) et (Γ′) sont homologiques entre elles, l'axe d'homologie étant AB et le centre d'homologie étant K.

G. Gourdel.

**1214.** — Démontrer géométriquement que :

1° Les perpendiculaires abaissées de l'extrémité A du grand axe d'une ellipse sur les quatre normales issues d'un point M rencontrent la courbe en quatre points qui sont sur un même cercle.

2° Si du sommet A on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre OM, la tangente à l'ellipse au point N où cette droite la rencontre est l'axe radical du cercle précédent et du cercle principal.

T. Lemoyne.

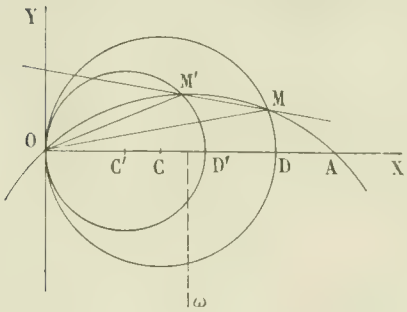
# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1165** (*). — *Par le point de contact* O *de deux cercles tangents et de rayons* R *et* R′, *on fait passer un cercle qui passe en outre par un point fixe* A *de la ligne des centres et qui rencontre les cercles donnés en deux points variables* M *et* M′.

*Trouver l'enveloppe de la droite* MM′ *et montrer les changements de forme de la courbe quand on fait varier la longueur* OA $= 2a$.

1. Les axes de coordonnées rectangulaires étant OX, ligne des centres, et OY, tangente en O aux deux cercles, si on désigne par $(\alpha, \beta)$ les coordonnées du centre ω du cercle variable, les trois cercles ont respectivement pour équations :




$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 2Rx = 0,$$
$$(C') \qquad x^2 + y^2 - 2R'x = 0,$$
$$(\omega) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

Les axes radicaux OM et OM′ de ce dernier cercle et des précédents ont respectivement pour équations :

$$(OM) \qquad (R - \alpha)x - \beta y = 0,$$
$$(OM') \qquad (R' - \alpha)x - \beta y = 0.$$

Les coordonnées du point M étant désignées par $x_1$ et $y_1$, et celles du point M′ par $x'$ et $y'$, on trouve :

(*) Cette question présente des difficultés de calcul et de discussion que nous n'avions pas prévues. Aussi ne sommes-nous pas étonné de n'avoir pas reçu de solutions de nos correspondants habituels. Malgré tout nous tenons à en publier une solution assez détaillée : elle aura l'avantage de faire travailler les élèves studieux qui la liront et qui voudront bien y réfléchir.

$$(M)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{2R\beta^2}{\beta^2 + (R-a)^2}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{2R(R-a)\beta}{\beta^2 + (R-a)^2}; \end{cases} \qquad (M')\quad \begin{cases} x' = \dfrac{2R'\beta^2}{\beta^2 + (R'-a)^2}, \\[2ex] y' = \dfrac{2R'(R'-a)\beta}{\beta^2 + (R'-a)^2}. \end{cases}$$

La droite MM′ ou $\Delta$ a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x' & y' & 1 \end{vmatrix} = x(y_1 - y') - y(x_1 - x') + x_1y' - y_1x' = 0.$$

Il suffit évidemment de calculer les numérateurs des binomes $y_1 - y'$, $x_1 - x'$, et $x_1y' - y_1x'$. Si on supprime en outre le facteur commun $2\beta(R - R')$, non nul en général, on a

$$(\Delta)\qquad x\beta^2(R + R' - a) - a(R-a)(R'-a) - \beta y[\beta^2 + a^2 - RR'] - 2RR'\beta^2 = 0$$

ou bien, en ordonnant par rapport au paramètre variable $\beta$,

$$(\Delta)\qquad y\beta^3 + [2RR' - (R + R' - a)x]\beta^2 + [a^2 - RR']y\beta + ax(R-a)(R'-a) = 0.$$

Le paramètre variable étant au 3e degré dans l'équation de la droite mobile $\Delta$, cette droite enveloppe une courbe de la 3e classe. Elle est en outre du 4e degré.

**2.** Posons, pour abréger l'écriture,

$$R + R' - a = K, \qquad a^2 - RR' = P, \qquad a(R-a)(R'-a) = Q.$$

L'équation de $\Delta$ s'écrit alors :

$$(\Delta)\qquad y\beta^3 + (2RR' - Kx)\beta^2 + Py\beta + Qx = 0.$$

En supposant une variable d'homogénéité, on a entre $\beta$ et les coordonnées du point de contact de $\Delta$ et de son enveloppe les deux équations

$$(1)\qquad 3\beta^2y + 2(2RR' - Kx)\beta + Py = 0,$$

$$(2)\qquad (2RR' - Kx)\beta^2 + 2Py\beta + 3Qx = 0.$$

Pour avoir l'équation ponctuelle de l'enveloppe il suffit d'éliminer $\beta$ entre ces deux équations. Si on pose

$$y[(9Q + PK)x - 2RR'P] = S,$$
$$6Py^2 - 2(2RR' - Kx)^2 = 2S',$$
$$6Qx(2RR' - Kx) - 2P^2y^2 = 2S'',$$

l'équation ponctuelle de l'enveloppe s'écrit simplement

$$S^2 - 4S'S'' = 0.$$

Cette équation est du 4e degré et par suite la droite $\Delta$ enveloppe une courbe du 4e ordre, symétrique par rapport à OX.

Cette courbe a trois points de rebroussement dont l'un au moins est réel. Ce sont les trois points communs aux trois coniques S, S′ et S″, dont la première est un système de deux droites $y = 0$ et $(9Q + PK)x - 2RR'P = 0$.

Il y a un point de rebroussement effectif sur l'axe des $x$ à la distance de l'origine $x = \dfrac{2RR'}{K}$.

Les deux coniques S′ et S″ qui passent par ce point ont une corde commune d'équation

$$(9Q + PK)x - 2RR'P = 0.$$

Les deux autres points de rebroussement, réels ou imaginaires, sont situés sur cette sécante commune.

On voit immédiatement que pour $P < 0$ ou $a^2 - RR' < 0$, la conique S′ est un système de deux droites imaginaires ; donc dans ce cas il y aura deux points de rebroussement imaginaires. Au con-

traire pour $P > 0$ ou bien $a^2 - RR' > 0$, la courbe aura trois points de rebroussement réels, car la conique $S''$ est toujours réelle ainsi que $S$.

On peut observer que si on désigne par $p$ et $q$ les coordonnées à l'origine de la droite $\Delta$, on a

$$p = \frac{2RR'\beta^2}{K\beta^2 - Q}; \qquad q = \frac{-2RR'\beta}{\beta^2 + P}.$$

La droite $\Delta$ sera une *tangente double*, perpendiculaire à OX pour $\beta^2 + P = 0$. Pour $P < 0$ ses points de contact avec la courbe seront réels et pour $P > 0$ ils seront imaginaires.

3. Les équations (1) et (2) peuvent s'écrire

$$(3\beta^2 + P)y - 2K\beta x + 4RR'\beta = 0,$$
$$2P\beta y - (K\beta^2 - 3Q)x + 2RR'\beta^2 = 0$$

On en déduit immédiatement les trois rapports

$$\frac{y}{4RR'Q\beta} = \frac{x}{2RR'\beta^2(\beta^2 - P)} = \frac{1}{K\beta^4 - (KP + 3Q)\beta^2 - PQ},$$

qui, dans chaque cas particulier donneront $x$ et $y$ en fonction de $\beta$. Si on veut les dérivées de $x$ et de $y$ par rapport à $\beta$ on écrira d'abord

$$(3) \qquad \frac{x}{2RR'} = \frac{\beta^2(\beta^2 - P)}{K\beta^4 - (KP + 3Q)\beta^2 - PQ}; \qquad (4) \qquad \frac{y}{4RR'Q} = \frac{\beta}{K\beta^4 - (KP + 3Q)\beta^2 - PQ}.$$

Si on se reporte aux expressions de $p$ et $q$, on voit que le facteur $\beta^2 + P$, dénominateur de $q$, devra se trouver dans le numérateur de $x'_\beta$, car pour $\beta^2 + P = 0$ on a la valeur de $x$ qui correspond à la tangente double. De même le facteur $K\beta^2 - Q$ devra se présenter dans la dérivée de $y'_\beta$, car pour $K\beta^2 - Q = 0$ on a une tangente parallèle à OX, ce qui correspond à un maximum ou à un minimum de $y$.

On trouve en effet sans difficulté

$$(5) \qquad x'_\beta = \frac{-12RR'Q\beta(\beta^2 + P)\left(\beta^2 - \frac{P}{3}\right)}{[K\beta^4 - (KP + 3Q)\beta^2 - PQ]^2},$$

$$(6) \qquad y'_\beta = \frac{-12RR'Q\left(\beta^2 - \frac{Q}{K}\right)\left(\beta^2 - \frac{P}{3}\right)}{[K\beta^4 - (KP + 3Q)\beta^2 - PQ]^2}.$$

En prenant d'abord $a^2 < RR'$, puis $a^2 > RR'$, sans aller au-delà de $a = R + R'$, donnons-nous deux cercles intérieurs l'un à l'autre, de rayons $R = 5$ et $R' = 2$ et prenons pour la valeur numérique entière de $a$ un nombre compris dans l'un des intervalles déterminés par la suite

$$0 \qquad 2 \qquad \sqrt{10} \qquad 5 \qquad 7;$$

nous allons obtenir diverses formes de courbes.

*Première hypothèse* : $a^2 < RR'$ ou $P < 0$.

4. — 1er EXEMPLE $a = 1$. Dans cet exemple, comme dans les suivants, il y aura lieu d'envisager simultanément l'ensemble des formules (3), (4), (5) et (6), ainsi que les expressions de $p$ et $q$ en fonction de $\beta$, et au besoin les expressions de $S$, $S'$ et $S''$.

L'équation de $\Delta$, pour $a = 1$, $R = 5$ et $R' = 2$ est

$$(\Delta) \qquad y\beta^3 + (20 - 6x)\beta^2 - 9y\beta + 4x = 0$$

et on a $\qquad K = 6, \qquad P = -9 \qquad$ et $\qquad Q = 4.$

Le dénominateur commun des valeurs de $x$ et de $y$ est $6(\beta^4 + 7\beta^2 + 6)$. Il ne peut être nul que pour des valeurs négatives de $\beta^2$, donc la courbe n'a pas d'asymptotes. Il y a un seul point de rebrous-

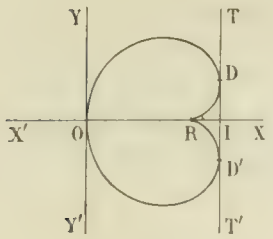


Fig. 1

sement $y = 0$, $x = \frac{10}{3}$. A cause de $q = \frac{-20\beta}{\beta^2 - 9}$ et de $p = \frac{10\beta^2}{3\beta^2 - 2}$, la tangente double correspond à $\beta^2 = 9$ et son équation est $x = \frac{18}{5}$. Or on a $\frac{18}{5} > \frac{10}{3}$. Elle se trouve donc à droite du point de rebroussement. Enfin $y$ est maximum pour $3\beta^2 - 2 = 0$, et comme pour $\beta > 0$ $x$ et $y$ sont toujours positifs, on a une forme de courbe représentée (*fig.* 1).

2° EXEMPLE $a = 3$. L'équation de la droite $\Delta$ est

$$y\beta^3 + 20 - 4x)\beta^2 - y\beta - 6x = 0.$$

Il y a un point de rebroussement unique $y = 0$, $4(x - 5) = 0$, ou $x = 5$. La tangente double correspond à $\beta^2 = 1$ et a pour équation $x = 2$; elle est placée entre l'origine et le point de rebroussement R. Le dénominateur commun des valeurs d'$x$ et d'$y$ est $2\beta^4 + 11\beta^2 - 3$; il est nul pour une valeur positive de $\beta^2$ qui est $\frac{-11 + \sqrt{145}}{4}$; elle est à peu près égale à $\frac{1}{4}$.

Les valeurs correspondantes de $p$ et de $q$ sont par suite très voisines de $p = \frac{5}{7}$ et $q = \frac{40}{3}$, ce qui permet de construire les asymptotes. On a d'ailleurs :

$$x = \frac{10\beta^2(\beta^2 + 1)}{2\beta^4 + 11\beta^2 - 3}, \qquad y = \frac{-120\beta}{2\beta^4 + 11\beta^2 - 3};$$

$$x'_\beta = \frac{120\beta\left(\beta^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\beta^2 - 1\right)}{(2\beta^4 + 11\beta^2 - 3)^2}, \qquad y'_\beta = \frac{720\left(\beta^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\beta^2 - \frac{3}{2}\right)}{(2\beta^4 + 11\beta^2 - 3)^2}.$$

Le dénominateur $2\beta^4 + 11\beta^2 - 3$ est de la forme $m^2(\beta^2 - \beta_1^2)$ avec $\beta_1^2 = \frac{-11 + \sqrt{145}}{4}$.

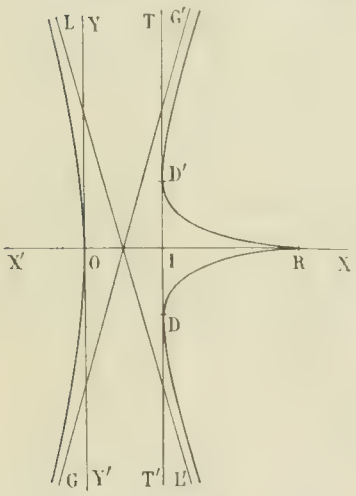


Fig. 2.

Ayant construit les asymptotes LL' et GG' (*fig.* 2), et la tangente double TT', si on fait croître $\beta$ depuis zéro jusqu'à $\beta_1$, $x$ est négatif et décroît jusqu'à $-\infty$; au contraire, $y$ est positif et croît jusqu'à $+\infty$. On obtient la branche de courbe OL. Lorsque $\beta$ atteint et dépasse la valeur $\beta_1$, $x$ saute de $-\infty$ à $+\infty$ et décroît, puisque sa dérivée est toujours négative, jusqu'à $x = 2$ qui correspond à $\beta = 1$; de même $y$ a sauté de $+\infty$ à $-\infty$ et sa valeur croît en restant négative jusqu'à la valeur représentée sur la figure par ID.

La courbe touche en D la tangente TT', on a eu la branche L'D. Enfin quand $x$ croît depuis $\beta = 1$ jusqu'à $\beta = +\infty$, $x$ et $y$ vont en croissant jusqu'à la valeur 5 pour $x$ et la valeur zéro pour $y$. On a la branche DR. Par symétrie, on construit les autres portions de la courbe.

3° EXEMPLE. — *Cas intermédiaire* $a^2 = RR'$, ou $P = 0$.

L'équation de la droite mobile $\Delta$ est dans ce cas

$$y\beta^3 + [2a^2 - Kx]\beta^2 + Qx = 0,$$

et on a $\qquad K > 0 \qquad$ et $\qquad Q = -a^2[K - a]$.

On sait que pour R différent de R' on a toujours $R + R' > 2\sqrt{RR'}$.

Les valeurs générales de $x$ et de $y$ deviennent

$$x = \frac{2a^2\beta^2}{K\beta^2 - 3Q} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{4a^2Q}{\beta(K\beta^2 - 3Q)}.$$

Si on porte ces valeurs dans l'équation d'une droite on aura pour déterminer $\beta$ une équation du 3e degré. L'enveloppe est par suite une courbe du 3e ordre.

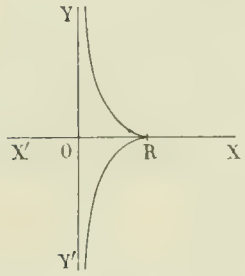


Fig. 3.

Comme on a $Q < 0$, on voit que pour $\beta > 0$ $x$ et $y$ sont positifs et pour $\beta < 0$, $x$ est encore positif et $y$ est négatif. La courbe est tout entière à droite de YY'. Elle a pour asymptote et aussi pour tangente double l'axe des $y$, et un point de rebroussement sur OX à la distance $x = \frac{2a^2}{K}$. Sa forme est celle de la figure 3.

*Seconde hypothèse*, $a^2 > RR'$ ou $P > 0$.

5. 4e Exemple. — Prenons $a = 4$ entre $\sqrt{10}$ et 5.

L'équation de la droite mobile $\Delta$ devient :

$$y\beta^3 + (20 - 3x)\beta^2 + 6y\beta - 8x = 0.$$

Les trois coniques S, S' et S'' sont réelles ; il y a par suite trois points de rebroussement, le premier R, défini par $y = 0$ et $20 - 3x = 0$ ; les deux autres déterminés par la rencontre de la conique S' par exemple et de la droite $(9Q + PK)x - 2PRR' = 0$ qui devient ici $9x + 20 = 0$.

Les coordonnées à l'origine de $\Delta$ s'écrivent

$$p = \frac{20\beta^2}{3\beta^2 + 8} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{-20\beta}{\beta^2 + 6}.$$

La tangente double se présenterait pour $\beta^2 = -6$, ce qui donnerait $p = 12$, valeur supérieure à $x = \frac{20}{3}$ qui donne le point de rebroussement $R_1$ sur l'axe OX.

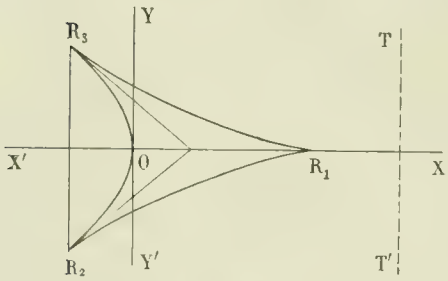


Fig. 4.

Les valeurs d'$x$ et d'$y$ ont pour dénominateur commun $3(\beta^4 + 2\beta^2 + 16)$. Ce trinome n'est nul que pour des valeurs négatives de $\beta^2$ ; donc la courbe n'a pas de branches infinies. Si on observe maintenant que l'on a toujours $p > 0$ pour toute valeur réelle de $\beta$, on peut, sans se servir des valeurs de $x'_\beta$ et de $y'_\beta$, figurer la courbe en question. Elle a la forme indiquée (fig. 4).

5e Exemple. — Prenons $a = 6$ entre R et $R + R'$.

Cet exemple est plus intéressant que les précédents.

L'équation de la droite mobile est $y\beta^3 + (20 - x)\beta^2 + 26y\beta + 24x = 0$.

Comme on a $S = 2y(121x - 260)$ et que le coefficient de $\beta^2$ est $(20 - x)$, il y a trois points de rebroussement, le premier $R_1$, à la distance $x = 20$ sur l'axe OX, les deux autres à l'intersection de la conique S' et de la droite $121x - 260 = 0$.

La tangente double s'obtient toujours en utilisant les valeurs de $p$ et de $q$, qui sont ici

$$p = \frac{20\beta^2}{\beta^2 - 24} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{-20\beta}{\beta^2 + 26}.$$

Pour $\beta^2 = -26$ on a $p = 5,2$. Cette valeur est inférieure à 20 et supérieure à $\frac{260}{121}$. On voit donc que la courbe n'a aucun point dans la région du plan comprise entre les parallèles $x - 20 = 0$ et $121x - 260 = 0$.

On constate que $\Delta$ sera parallèle à OX pour $\beta^2 = 24$. Pour cette valeur on aura donc un maximum ou un minimum de $y$. Les valeurs d'$x$, d'$y$ et de $x'_\beta$ et $y'_\beta$ sont

$$x = \frac{20\beta^2(\beta^2 - 26)}{(\beta^2 + 6)(\beta^2 - 104)}, \qquad y = \frac{960\beta}{(\beta^2 + 6)(\beta^2 - 104)};$$

$$x'_\beta = \frac{-40\times 72\beta(\beta^2 + 26\left(\beta^2 - \frac{26}{3}\right)}{(\beta^4 - 98\beta^2 - 624)^2}, \qquad y_\beta = \frac{-40\times 72\,\beta^2 - 24\left(\beta^2 - \frac{26}{3}\right)}{(\beta^4 - 98\beta^2 - 624)^2}.$$

Si on fait croître $\beta$ depuis zéro jusqu'à $\sqrt{\frac{26}{3}}$, $x$ est positif et croît depuis zéro jusqu'à $\frac{260}{121}$ ; $y$ est négatif et décroît de sorte que l'on a la branche de courbe $OR_2$.

Si $\beta$ croît depuis cette valeur jusqu'à $\sqrt{26}$, $x$ décroît et $y$ augmente jusqu'à un maximum ; on a la portion de courbe $R_2M$. Si $\beta$ croît depuis cette valeur jusqu'à $\sqrt{26}$, $x$ décroît jusqu'à zéro et $y$ décroît de façon que la courbe coupe YY' en D. Si $\beta$ croît jusqu'à $\beta = \sqrt{104}$, $x$ et $y$ décroissent simultanément jusqu'à $-\infty$. On a la portion DL de la courbe.

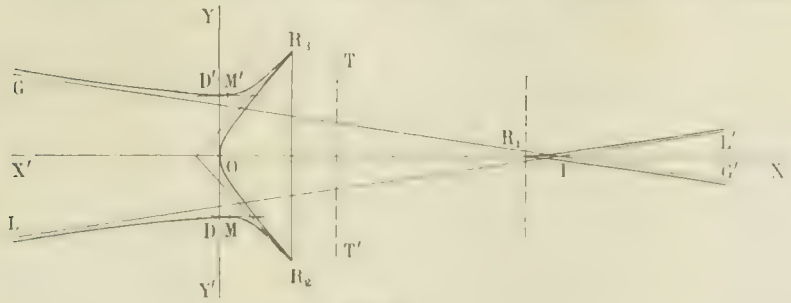


Fig. 5.

Quand $\beta$ dépasse cette valeur, $x$ et $y$ sautent de $-\infty$ à $+\infty$ et en faisant croître $\beta$ jusqu'à $+\infty$ on obtient la branche de courbe $L'R_1$. Car $x$ et $y$ décroissent de manière à prendre les valeurs 20 pour $x$ et zéro pour $y$. On achève la courbe par symétrie. On a la forme indiquée sur la figure 5.

Il y a deux asymptotes LL' et GG' qui coupent l'axe des $x$ à la distance $OI = 21$ et qui sont très peu inclinées sur cette droite.

Remarque. — On peut constater que les valeurs de $\beta$ auxquelles correspondent les points de rebroussement $R_2$ et $R_3$ sont obtenues en considérant les numérateurs de $x'_\beta$ et de $y'_\beta$, tandis que ces points s'obtiennent directement par la considération des coniques S, S' et S''.

6e Exemple. — Considérons enfin le cas de $a = R + R'$.

L'équation de la droite mobile $\Delta$ devient

$$y\beta^3 + 2RR'\beta^2 + Py\beta - Qx = 0,$$

et on a $\qquad P = a^2 - RR' \qquad$ et $\qquad Q = aRR'$.

Les coordonnées à l'origine de $\Delta$ sont

$$p = \frac{-2\beta^3}{a} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{-2RR'\beta}{\beta^2 + P}.$$

La valeur de $p$ est toujours négative et celle de $q$ reste toujours finie. La tangente double correspond à $\beta^2 = -P$ et ses points de contact avec la courbe sont imaginaires.

Il y a trois points de rebroussement dont le premier est rejeté à l'infini négatif sur OX. Comme on a dans ce cas

$$S = (9ax - 2P)y \qquad \text{et} \qquad S' = Py^2 - 4R^2R'^2,$$

les autres points de rebroussement sont les deux points où la conique S' est coupée par la droite $9ax - 2P = 0$.

La courbe n'a qu'un point à l'infini, savoir le premier point de rebroussement. Comme on a toujours $p < 0$, il en résulte qu'elle a la forme indiquée par la figure 6.

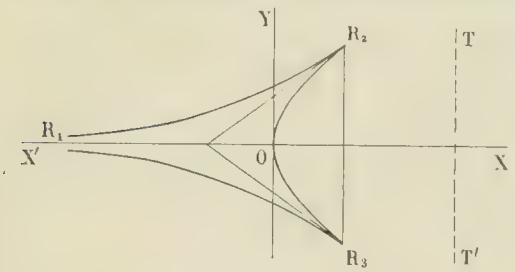


Fig. 6.

6. L'enveloppe se réduit à un point pour $\quad a = 0, \quad a = R', \quad a = R$.

1° $a = 0$. L'équation de $\Delta$ est $\quad y\beta^2 + [2RR' - (R + R')x]\beta - RR'y = 0$.

En exprimant qu'il y a une racine double on a $\quad [2RR' - (R + R')x]^2 + 4RR'y^2 = 0$.

La droite $\Delta$ tourne autour du point $y = 0$, $x = \dfrac{2RR'}{R + R'}$.

2° $a = R'$. L'équation de $\Delta$ s'écrit $y\beta^2 + R(2R' - x)\beta - R'(R - R')y = 0$.

L'enveloppe a pour équation $R^2(2R' - x)^2 + 4R'(R - R')y^2 = 0$.

La droite $\Delta$ tourne autour du point $y = 0$, $x = 2R'$.

3° $a = R$. L'équation de $\Delta$ s'écrit $y\beta^2 + R'(2R - x)\beta + R(R - R')y = 0$.

Par le même procédé on aurait pour l'équation de l'enveloppe $R'^2(2R - x)^2 - 4R(R - R')y^2 = 0$.

Mais l'équation de $\Delta$ peut se mettre sous la forme $[\beta^2 + R(R - R')]y + \beta R'(2R - x) = 0$.

Cette équation est satisfaite, quel que soit $\beta$, quand on fait $y = 0$ et $x = 2R$. On a écrit simplement l'équation d'une droite qui passe par le point $y = 0$, $x = 2R$ et par le point M′ ayant pour coordonnées $x' = \dfrac{2R'\beta^2}{\beta^2 + (R' - a)^2}$ et $y' = \dfrac{2R'(R' - a)\beta}{\beta^2 + (R' - a)^2}$.

La présence de $\beta^2$ dans l'équation particulière de $\Delta$ se trouve ainsi expliquée.

Note complémentaire. — Désignons par $a, b, c, d$ des fonctions linéaires d'$x$ et d'$y$ et par $t$ un paramètre variable ; la droite mobile $at^3 - 3bt^2 + 3ct - d = 0$ enveloppe une courbe de troisième classe et l'on a l'équation de cette courbe en exprimant que l'équation en $t$ a une racine double c'est-à-dire que ses deux dérivées du premier ordre ont une racine commune. Ces deux équations sont $at^2 - 2bt + c = 0$, $bt^2 - 2ct + d = 0$, et si l'on pose $S = ad - bc$, $S' = ac - b^2$, $S'' = bd - c^2$, l'équation ponctuelle de l'enveloppe ou l'équation résultante est $S^2 - 4S'S'' = 0$.

Pour que par un point il passe trois droites confondues, il faut que les trois dérivées du second ordre soient nulles en même temps, ce qui donne $at - b = 0$, $bt - c = 0$, $ct - d = 0$ ou

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}.$$

En égalant ces rapports deux à deux on obtient les équations $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ et l'on voit que ces trois coniques ont trois points communs qui sont des points de rebroussement de la courbe étudiée. (Question analogue à celle des directions principales d'une quadrique et à l'équation en S.)

V. HIOUX.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1215.** — On considère une parabole $y^2 - 2px = 0$ rapportée à deux axes rectangulaires et la normale au point $M(\alpha, \beta)$ de cette courbe.

Cette normale rencontre l'axe $Ox$ en A et la parabole en un point B autre que M.

Le point M se meut de façon que sa projection sur $Oy$ soit animée d'un mouvement uniforme $y = at + b$.

1° Déterminer par ses projections la dérivée géométrique du vecteur MA.

2° Même question pour la dérivée géométrique du vecteur MB.

3° On mène par l'origine les vecteurs OP et OQ équipollents à MB et à sa dérivée géométrique. Lieux décrits par les points P et Q.

J. Demeunynck.

**1216.** — Un mobile décrit une parabole : $y^2 - 2px = 0$. Supposant que la vitesse se réduit à 0 au passage à l'origine.

1° On demande de déterminer la vitesse et l'accélération du mobile en chaque point de sa trajectoire sachant que l'accélération $\gamma$ a pour projection sur $Ox$ : $\gamma_x = Kx$, K étant une constante donnée.

2° Même question sachant que $\gamma_x = Kv_x$.

3° — — $\gamma_y = Ky$.

4° — — $\gamma_y = Kx$.

Hodographe du mouvement dans chaque cas.

J. Demeunynck.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

13e Année. N° 9 Juin 1903.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LE CALCUL DU NOMBRE $\pi$

La leçon sur le *calcul de* $\pi$ figure depuis longtemps et continue à figurer au programme de l'Agrégation des Sciences Mathématiques. On peut estimer que c'est avec raison, car il paraît tout à fait nécessaire de montrer aux élèves d'une classe de Mathématiques élémentaires comment on peut calculer effectivement le nombre $\pi$ ; et il semble même qu'il soit indispensable de faire effectivement ce calcul au tableau, de façon à obtenir, en un temps très court, une valeur suffisamment approchée de $\pi$ à l'aide de calculs simples, et en même temps une limite supérieure de l'erreur commise.

On peut affirmer qu'aucune des méthodes classiques ne répond à ces conditions ; il suffit de les essayer pour s'en convaincre : ou bien l'approximation obtenue est vraiment insuffisante, ou bien l'enchevêtrement des opérations successives que l'on doit effectuer conduit à des calculs pénibles, et l'appréciation de l'erreur commise devient pratiquement impossible.

Il faut donc conserver, si l'on veut, les méthodes dites des périmètres et des isopérimètres, mais seulement au point de vue théorique et historique. Si l'on veut calculer effectivement le nombre $\pi$ (toujours en restant dans le domaine des mathématiques élémentaires), il faut partir d'un principe nouveau que l'on peut énoncer ainsi : connaissant le rayon ou l'apothème ainsi que le périmètre d'un polygone régulier convexe, on peut toujours, à l'aide de ces deux seules données, sans considération de nouveaux polygones, calculer $\pi$ avec une approximation indéfinie, et indiquer une limite supérieure de l'erreur commise, lorsqu'on s'arrête à un instant donné.

Voici comment on peut appliquer ce principe.

Soient $a$ et $r$ l'apothème et le rayon d'un polygone régulier convexe de $n$ côtés, ayant 2 pour périmètre ; soient aussi $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ les apothèmes des polygones réguliers convexes isopérimètres de $2n, 2^2n, 2^3n, \ldots$ côtés.

On a évidemment

$$r^2 = a^2 + \frac{1}{n^2},$$

et de plus l'on sait que

$$a_1 = \frac{a+r}{2};$$

on en déduit

$$a_1 - a = \frac{r-a}{2} = \frac{r^2-a^2}{2(r+a)} = \frac{1}{4n^2a_1}.$$

On a de même par suite

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{4^2n^2a_2},$$

$$a_3 - a_2 = \frac{1}{4^3n^2a_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_k - a_{k-1} = \frac{1}{4^kn^2a_k}.$$

Par addition, il vient

$$a_k - a = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{4a_1} + \frac{1}{4^2.a_2} + \frac{1}{4^3.a_3} + \cdots + \frac{1}{4^k.a_k}\right).$$

On sait aussi que les nombres $a, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, vont en croissant et ont pour limite $\frac{1}{\pi}$ lorsque $k$ augmente au-delà de toute limite. En appelant $\alpha$ un nombre supérieur à $\frac{1}{\pi}$, on peut écrire

$$a_k - a \begin{cases} < \dfrac{1}{n^2 a}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{4^k}\right), \\ > \dfrac{1}{n^2 \alpha}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{4^k}\right), \end{cases}$$

d'où en faisant croître $k$ au-delà de toute limite, et remarquant que la somme entre parenthèses dans les seconds membres a pour limite $\frac{1}{3}$ :

$$\frac{1}{\pi} - a \begin{cases} < \dfrac{1}{3n^2 a} \\ > \dfrac{1}{3n^2 \alpha}. \end{cases}$$

Donc
$$a + \frac{1}{3n^2\alpha} < \frac{1}{\pi} < a + \frac{1}{3n^2 a}.$$

Il est manifeste que l'on comprend ainsi $\frac{1}{\pi}$ entre deux limites beaucoup plus resserrées que les limites primitives $a$ et $\alpha$, et cela sans faire intervenir finalement aucun autre polygone que le polygone primitif.

Ceci posé, il suffit maintenant de continuer dans la même voie.

Posons
$$b = a + \frac{1}{3n^2 a},$$

et soient $b_1, b_2, b_3, \ldots$, les quantités analogues obtenues en remplaçant $n$ par $2n, 2^2n, 2^3n, \ldots$, et $a$ par $a_1, a_2, a_3, \ldots$

On a
$$\begin{aligned} b - b_1 &= \frac{1}{3n^2 a} - \frac{1}{12n^2 a_1} - (a_1 - a) \\ &= \frac{1}{3n^2 a} - \frac{1}{12n^2 a_1} - \frac{1}{4n^2 a_1} \\ &= \frac{1}{3n^2 a} - \frac{1}{3n^2 a_1} \\ &= \frac{a_1 - a}{3n^2 a a_1} = \frac{1}{12n^4 a a_1^2}; \end{aligned}$$

il a suffi de remplacer partout la différence $a_1 - a$ par sa valeur précédemment obtenue.

On voit ainsi que les nombres $b, b_1, b_2, b_3, \ldots$, vont en diminuant ; d'ailleurs, d'après la définition de $b$, ils ont même limite que $a$, c'est-à-dire $\frac{1}{\pi}$, et en procédant comme plus haut, on peut écrire :

$$b - \frac{1}{\pi} \begin{cases} < \dfrac{1}{n^4 a^3}\left(\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12.16} + \dfrac{1}{12.16^2} + \cdots\right), \\ > \dfrac{1}{n^4 \alpha^3}\left(\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12.16} + \dfrac{1}{12.16^2} + \cdots\right), \end{cases}$$

ou bien
$$b - \frac{4}{45n^4 a^3} < \frac{1}{\pi} < b - \frac{4}{45n^4 \alpha^3},$$

et de cette façon le nombre $\frac{1}{\pi}$ est compris entre deux nouvelles limites plus resserrées encore que les précédentes.

Posons maintenant
$$c = b - \frac{4}{45n^4a^3}$$
et soient $c_1, c_2, c_3, \ldots,$ les quantités analogues obtenues en remplaçant $n$ par $2n, 2^2n, 2^3n, \ldots,$ et $a$ par $a_1, a_2, a_3, \ldots$

On a
$$\begin{aligned} c_1 - c &= \frac{4}{45n^4a^3} - \frac{1}{180n^4a_1^3} - (b - b_1) \\ &= \frac{4}{45n^4a^3} - \frac{1}{180n^4a_1^3} - \frac{1}{12n^4aa_1^3} \\ &= \frac{16a_1^3 - 15a^2a_1 - a^3}{180n^4a^3a_1^3} \\ &= \frac{(16a_1^2 + 16aa_1 + a^2)(a_1 - a)}{180n^4a^3a_1^3} \\ &= \frac{16a_1^2 + 16aa_1 + a^2}{720n^6a^3a_1^3}; \end{aligned}$$
il a suffi de remplacer $b - b_1$ et $c_1 - c$ par leurs valeurs précédemment calculées.

Les nombres $c, c_1, c_2, c_3, \ldots,$ vont en augmentant, et ont pour limite $\frac{1}{\pi}$. En écrivant
$$c_1 - c = \frac{1}{720n^6}\left(\frac{16}{a^3a_1^3} + \frac{16}{a^2a_1^3} + \frac{1}{aa_1^3}\right)$$
on voit que
$$c_1 - c \begin{cases} < \dfrac{33}{720n^6a^3} \\ > \dfrac{33}{720n^6a^3}. \end{cases}$$
et par suite en raisonnant comme plus haut, et remarquant que
$$\frac{33}{720}\left(1 + \frac{1}{64} + \frac{1}{64^2} \quad\quad\right) = \frac{44}{945},$$
il vient
$$c + \frac{44}{945n^6a^3} < \frac{1}{\pi} < c + \frac{44}{945n^6a^3},$$
et $\frac{1}{\pi}$ est compris entre deux nouvelles limites encore plus resserrées que précédemment.

On peut évidemment continuer de la même façon ; mais ce qui précède suffit largement pour le but proposé. On a définitivement ainsi
$$\frac{1}{\pi} < a + \frac{1}{3n^2a} - \frac{4}{45n^4a^3} + \frac{44}{945n^6a^5},$$
et en adoptant le second membre pour valeur de $\frac{1}{\pi}$, on commet une erreur par excès inférieure à
$$\frac{44}{945n^6}\left(\frac{1}{a^5} - \frac{1}{\alpha^5}\right).$$

Pour appliquer commodément ce résultat, faisons $n = 12$.

On a immédiatement $\quad a = \frac{2 + \sqrt{3}}{12} \quad$ et $\quad \frac{1}{na} = 2 - \sqrt{3},$

de sorte que la valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$ est
$$\frac{2 + \sqrt{3}}{12} + \frac{2 - \sqrt{3}}{36} - \frac{(2 - \sqrt{3})^3}{135} + \frac{11(2 - \sqrt{3})^5}{2835};$$
on a
$$\sqrt{3} = 1{,}73205081$$
et l'expression précédente devient, à l'aide de calculs bien simples,
$$0{,}31100423 + 0{,}00744303 - 0{,}00014250 + 0{,}00000536 = 0{,}31831012.$$

Si on prend $\alpha = 0{,}32$, on a $\frac{44}{945n^6\alpha^7} = 0{,}00000465$, et par suite l'erreur par excès commise est moindre que 0,00000071; on a donc à moins de $\frac{1}{10^6}$ près, $\frac{1}{\pi} = 0{,}318310$, ce qui est exact; on en déduit à moins de $\frac{1}{10^5}$ près

$$\pi = 3{,}14159.$$

En choisissant $n$ plus grand, on aurait une approximation bien supérieure.

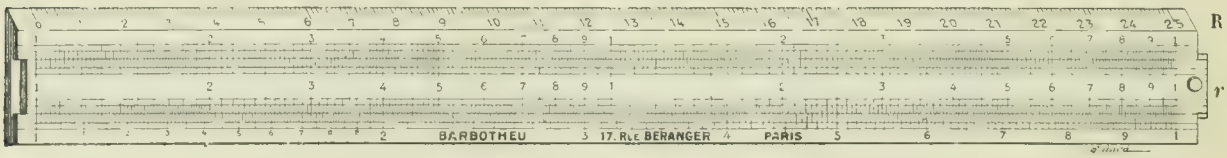
## NOTE SUR LA RÈGLE À CALCULS

La règle à calculs se compose d'une règle dans laquelle peut glisser une réglette.

La règle porte deux sortes de divisions, les unes marquées à la partie supérieure, les autres à la partie inférieure.

La partie supérieure est constituée par deux échelles identiques, comprises entre le trait 1 de gauche et le trait 1 du milieu, et entre le trait 1 du milieu et le trait 1 de droite.

L'unité de longueur étant la distance qui sépare 1 de gauche de 1 du milieu, on a porté à partir de




Règle à calculs (la réglette $r$ glisse dans une rainure de la règle R).

la division 1 de gauche, qui sert d'origine, des longueurs mesurées par log 2, log 3, ..., log 9; aux extrémités de ces longueurs sont inscrits les nombres 2, 3, ..., 9.

Un intervalle quelconque, 3 — 4 par exemple, porte des traits intermédiaires qui sont les extrémités de longueurs ayant pour origine 1 de gauche et mesurées par log 3,1, log 3,2, ..., log 3,9. On peut d'ailleurs subdiviser à nouveau ces intervalles et on ne sera arrêté que par la difficulté de tracer des traits trop rapprochés les uns des autres.

L'échelle comprise entre 1 du milieu et 1 de droite est identique à la précédente; un nombre lu sur cette seconde échelle, 3 par exemple, correspond à un trait distant de la première origine d'une longueur mesurée par 1 + log 3 ou log 30; on devra donc faire exprimer aux nombres de cette échelle des dizaines et non des unités comme pour les nombres de la première échelle.

La partie inférieure de la règle porte une seule échelle de longueur double; elle est construite comme les premières, mais l'unité de longueur est double de l'unité qui a servi pour les premières.

*Réglette.* — Dans la règle à calculs de M. Mannheim, la réglette est graduée comme la règle elle-même.

*Multiplication.* — On commence par ramener les deux facteurs à avoir un chiffre significatif à la partie entière; puis on ajoute les longueurs qui représentent leurs logarithmes.

Soit à multiplier 0,45 par 1,45; nous ferons le produit $4{,}5 \times 1{,}45$; plaçant 1 de gauche de la réglette sous 4,5 de la première échelle supérieure, on lit au-dessus de 1,45 de la réglette le nombre 6,52 sur la première échelle supérieure; la distance 1 — 6,52 est donc la somme des distances 1 — 4,5 et 1 — 1,45, c'est-à-dire que l'on a

$$\log 6{,}52 = \log 4{,}5 + \log 1{,}45,$$

$$6{,}52 = 4{,}5 \times 1{,}45 \qquad \text{et} \qquad 0{,}652 = 0{,}45 \times 1{,}45.$$

Si le nombre lu sur la règle supérieure appartient à la seconde échelle, il suffit de le multiplier par 10 puisqu'il exprime des dizaines.

*Division.* — On modifie les deux nombres de façon à avoir un diviseur et un quotient ayant un chiffre significatif à la partie entière et on opère par un procédé inverse du précédent.

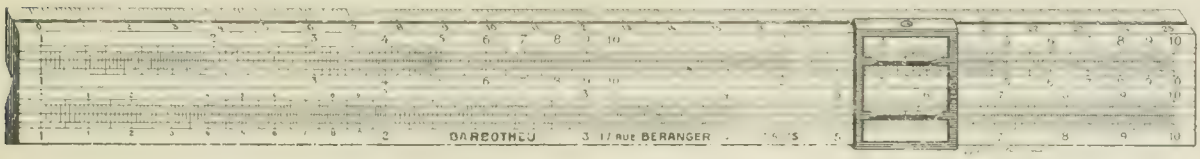
Cherchons le quotient de 68,5 par 9,5 ; plaçons 9,5 de la réglette sous 68,5 de la seconde échelle supérieure ; 1 de gauche de la réglette est en coïncidence avec 7,2 de la première échelle supérieure ; il en résulte que 68,5 est le produit de 9,5 par 7,2, qui est le quotient cherché.

*Proportions.* — On peut trouver le quatrième terme d'une proportion par un seul déplacement de la réglette ; soit à calculer $x$ donné par $\frac{x}{25} = \frac{32}{5,4}$.

Pour trouver le quotient $\frac{32}{5,4}$, plaçons 5,4 de la réglette sous 32 lu sur la seconde échelle supérieure de la règle ; 1 de gauche est en $\alpha$, quotient cherché ; pour multiplier $\alpha$ par 25, nous lirons le nombre 14,8 de la seconde échelle supérieure, qui coïncide avec 2,5 de la réglette ; 14,8 est le produit $\alpha \times 2,5$ et 148 est le produit $\alpha \times 25$ ; c'est le nombre $x$.

*Carrés et racines carrées.* — On commence par donner au nombre dont on cherche le carré un chiffre significatif à la partie entière ; si on lit ce nombre sur l'échelle inférieure de la règle, le nombre de la partie supérieure de la règle qui correspond à la même longueur est le carré, puisque son logarithme est double du logarithme du premier nombre.

Soit à trouver le carré de 47 ; nous cherchons 4,7 sur l'échelle inférieure ; à l'aide d'un curseur




Règle à calculs avec curseur.

portant une glace sur laquelle est marqué un trait, on trouve sur la seconde échelle supérieure 22,1 au-dessus de 4,7 ; 22,1 est le carré de 4,7 et 2210 est le carré de 47.

Pour trouver la racine carrée, on lit le nombre auquel on a donné 1 ou 2 chiffres à la partie entière, sur les échelles supérieures ; le trait du curseur permet de trouver le nombre correspondant de l'échelle inférieure ; c'est la racine carrée cherchée ; il reste ensuite à déplacer la virgule, s'il y a lieu.

Curseur à glace.

*Cubes et racines cubiques.* — On commence par donner au nombre un chiffre à la partie entière ; nous supposerons cette condition réalisée ; cherchons le cube de 3,5.

Plaçons 1 de gauche de la réglette sur 3,5 de l'échelle inférieure ; 3,5 de la réglette est alors en coïncidence avec 42,9 de la seconde échelle supérieure de la règle ; 42,9 est le cube de 3,5.

En effet, la longueur 1 — 42,9 est la somme des longueurs 1 — 3,5 de l'échelle inférieure et 1 — 3,5 de la réglette ; comme la première est mesurée avec une unité deux fois plus grande que l'unité relative aux échelles supérieures, la longueur 1 — 42,9 est triple de la longueur 1 — 3,5 mesurée avec la même unité ; on a ainsi

$$\log 42,9 = 3 \log 3,5 \qquad \text{ou} \qquad 42,9 = (3,5)^3.$$

Il peut arriver que le nombre lu sur la réglette soit en dehors de la règle ; si on imagine alors une troisième échelle identique aux échelles supérieures, le nombre lu sur la réglette coïncidera avec un nombre de cette troisième échelle ; en remarquant que les nombres de cette échelle exprimeraient des centaines, on aura le cube comme précédemment. Pour éviter la construction de cette échelle, il suffit de supposer qu'on la déplace en même temps que la réglette d'une longueur égale à l'échelle inférieure ; la

coïncidence subsistera et le 1 de droite de la réglette sera sous 1 du milieu de la règle, tandis que la troisième échelle deviendra la première de la règle.

Soit à trouver le cube de 7,5 ; plaçant 1 de droite de la réglette en coïncidence avec 7,5 de l'échelle inférieure, on lit sur la première échelle supérieure 4,22 en coïncidence avec 7,5 de la réglette ; le cube est 422.

Le procédé inverse donne la racine cubique ; on peut toujours en multipliant ou divisant le nombre par $10^{3n}$ lui donner 1, 2 ou 3 chiffres à la partie entière, le premier n'étant pas zéro.

Si le nombre a 1 ou 2 chiffres à la partie entière, on place 1 de droite de la réglette *renversée* sous le nombre lu sur les échelles supérieures et on cherche par tâtonnements le nombre de la réglette qui coïncide avec le même nombre de l'échelle inférieure. Si le nombre a trois chiffres à la partie entière, c'est le 1 de gauche de la réglette *renversée* que l'on place sous le nombre lu sur la première échelle supérieure de la règle.

*Logarithmes, sinus, tangentes.* — La réglette porte à son revers trois échelles : la première tracée au milieu de la réglette est égale à la longueur de l'échelle inférieure de la règle et est divisée en 500 parties égales; elle est graduée en sens inverse de la règle.

Une seconde échelle, marquée S, porte des divisions 1°,2°,... dont les distances à un trait placé au-dessous de 1 de gauche sont mesurées par les logarithmes de 100 *sin* 1°, 100 *sin* 2°,. . ; les intervalles 1° — 2°,... sont divisés en 6 parties correspondant à des différences de 10'.

L'échelle marquée T est relative aux tangentes et est construite de la même façon.

Ces échelles permettent de trouver les logarithmes, les sinus et les tangentes. Soit à trouver le logarithme de 43,5 ; la caractéristique est 1 ; pour avoir la mantisse, plaçons 1 de gauche de la réglette en coïncidence avec 4,35 de l'échelle inférieure de la règle ; retournant la règle, on trouve qu'un trait marqué sur une encoche au-dessous de la division 1 de droite coïncide avec la division $\frac{638}{1000}$; $\frac{638}{1000}$ est la longueur dont on a déplacé la réglette ; c'est donc le logarithme de 4,35 et le logarithme cherché est 1,638.

Cherchons maintenant *sin* 20°.

Retournons la réglette de façon à mettre l'échelle S en coïncidence avec les échelles supérieures de la règle, les origines coïncidant, au-dessus de 20°, on lit sur la seconde échelle supérieure 35 ; il en résulte que 100 *sin* 20° et 35 ont même logarithme ; ces nombres sont égaux et *sin* 20° est égal à 0,35.

Il est manifeste que les opérations où entrent des sinus ou des tangentes se font avec la règle à calculs par les procédés indiqués plus haut.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

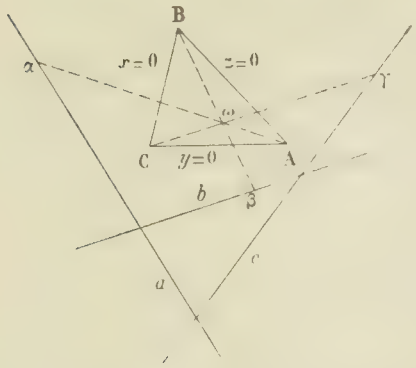
**1149**. — *Soient deux triangles homologiques* ABC, $\alpha\beta\gamma$ *dont l'un,* ABC, *est fixe, et dont l'autre se déplace de façon que ses sommets décrivent respectivement trois droites données a, b, c.*

1° *Quand les droites a, b, c forment un véritable triangle, trouver la loi de correspondance qui existe entre le centre et l'axe d'homologie.*

2° *Quand les droites a, b, c sont concourantes, montrer que l'axe d'homologie touche une courbe indépendante du déplacement du centre d'homologie. Cette courbe est une conique. Dans quel cas est-ce une parabole?*

3° *Supposant ce cas réalisé, déterminer la directrice de cette parabole et dire ce qu'elle est quand a, b, c sont perpendiculaires aux milieux des côtés de* ABC.

**1.** Prenons ABC pour triangle de référence et désignons par $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées du centre d'homologie $\omega$. Celles des points $\alpha, \beta, \gamma$ pourront alors être représentées par le tableau ci-dessous :




| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $x_1$ | $y_0$ | $z_0$ |
| $\beta$ | $x_0$ | $y_1$ | $z_0$ |
| $\gamma$ | $x_0$ | $y_0$ | $z_1$ |

On en déduit facilement l'équation de l'axe d'homologie

$$\frac{x}{x_0 - x_1} + \frac{y}{y_0 - y_1} + \frac{z}{z_0 - z_1} = 0.$$

Soient maintenant

$$a = Ax + A'y + A''z = 0, \qquad b = Bx + B'y + B''z = 0,$$
$$c = Cx + C'y + C''z = 0,$$

les équations des trois droites $a, b, c$. On a :

$$Ax_1 + A'y_0 + A''z_0 = 0, \qquad Bx_0 + B'y_1 + B''z_0 = 0, \qquad Cx_0 + C'y_0 + C''z_1 = 0.$$

d'où :

$$x_0 - x_1 = \frac{a(x_0, y_0)}{A} = \frac{a_0}{A}, \qquad y_0 - y_1 = \frac{b_0}{B'}, \qquad z_0 - z_1 = \frac{c_0}{C''};$$

les coordonnées de l'axe d'homologie sont donc

$$u = \frac{A}{a_0}, \qquad v = \frac{B'}{b_0}, \qquad w = \frac{C''}{c_0}.$$

Prenons comme triangle de référence auxiliaire le triangle $abc$; soient $x'_0, y'_0, z'_0$ les coordonnées de $\omega$ par rapport à ce triangle, ces coordonnées sont respectivement proportionnelles à $a_0, b_0, c_0$ et on peut convenir que

$$Ax'_0 = a_0, \qquad B'y'_0 = b_0, \qquad C''z'_0 = c_0,$$

d'où

$$ux'_0 = 1, \qquad vy'_0 = 1, \qquad wz'_0 = 1;$$

telle est la forme de correspondance demandée.

Si le lieu du centre d'homologie, rapporté au triangle $abc$, a pour équation

$$f(x'_0, y'_0, z'_0) = 0,$$

l'enveloppe de l'axe, par rapport au triangle ABC, aura pour équation

$$f\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}\right) = 0.$$

Supposons par exemple que l'axe d'homologie passe par un point fixe : $u, v, w$ seront liées par une équation de la forme

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

donc le point $\omega$ décrira la courbe

$$\frac{\alpha}{x'_0} + \frac{\beta}{y'_0} + \frac{\gamma}{z'_0} = 0,$$

c'est-à-dire une conique circonscrite au triangle $abc$.

Supposons comme autre exemple que le centre d'homologie décrive une droite fixe

$$\alpha x'_0 + \beta y'_0 + \gamma z'_0 = 0,$$

l'axe enveloppera la courbe

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w} = 0,$$

c'est-à-dire une conique inscrite au triangle ABC.

**2.** Supposons les droites $a, b, c$ concourantes en un point O ; les formes $a, b, c$ sont alors liées identiquement par une relation linéaire, et si nous écrivons cette relation sous la forme

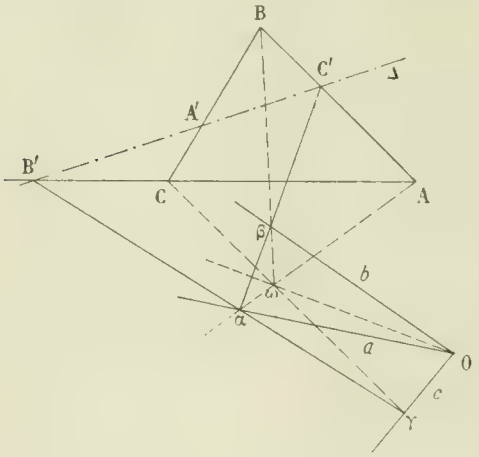
$$\frac{\alpha}{A} a + \frac{\beta}{B'} b + \frac{\gamma}{C''} c \equiv 0,$$

on aura
$$\frac{\alpha}{A}a_0 + \frac{\beta}{B'}b_0 + \frac{\gamma}{C''}c_0 \equiv 0,$$
c'est-à-dire
$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w} = 0,$$
équation d'une conique tangente aux trois côtés du triangle ABC et indépendante des déplacements de $\omega$.

A un point $\omega$ ne correspond qu'un axe $\Delta$, mais à un axe $\Delta$ correspondent une infinité de points $\omega$; les équations
$$\frac{a_0 u}{A} = \frac{b_0 v}{B'} = \frac{c_0 w}{C''}$$
qui déterminent $\omega$ en fonction de $\Delta$, se réduisent à une seule d'entre elles, de la forme
$$B'ua_0 = Avb_0$$
par exemple ; tous les points $\omega$ correspondants sont donc sur une droite passant par le point O. A tous les points $\omega$ de cette droite correspond réciproquement un seul et même axe $\Delta$, et les équations ci-dessus montrent que pour $c_0 = 0$, on a $u = v = 0$, c'est-à-dire qu'à tous les points $\omega$ de la droite $c$ correspond comme axe $\Delta$ la droite AB.

**Démonstration géométrique.** — L'axe d'homologie $\Delta$ rencontre les côtés du triangle ABC respectivement en A', B', C'. Donnons-nous, par exemple, le point B' sur le côté AC. Par B' menons une droite quelconque coupant $a$ en $\alpha$ et $c$ en $\gamma$. Le centre d'homologie $\omega$ est à l'intersection de A$\alpha$ et de C$\gamma$.

Si la droite B'$\alpha\gamma$ tourne autour du point B', les côtés du triangle $\omega\alpha\gamma$ se déplacent en pivotant chacun autour d'un point fixe, et ces trois points fixes B', C, A sont en ligne droite. Deux des sommets de ce même triangle décrivent chacun une droite, les droites O$\alpha$, O$\beta$. Donc, le troisième sommet $\omega$ décrit une droite passant par le point de concours O des deux premières.




Le point $\beta$ est à l'intersection de B$\omega$ et de la droite $b$. Quand $\omega$ se déplace sur la droite O$\omega$, les sommets du triangle $\alpha\beta\omega$ décrivent chacun une droite passant par le point O. Deux des côtés de ce triangle passent chacun par un point fixe, les points A et B. Donc, le troisième côté $\alpha\beta$ passe également par un point fixe C' en ligne droite avec A et B.

Donc enfin, étant donné le point B', le point C' se trouve par là même déterminé. Donc les deux divisions B', C' sont homographiques et l'axe d'homologie $\Delta$ touche une conique tangente à AB et à AC, et tangente de même à BC.

Remarque. — Si nous supposons le triangle $\alpha\beta\gamma$ réduit à une droite, cette droite se confondra nécessairement avec $\Delta$. Donc la conique trouvée est l'enveloppe des droites qui coupent $a, b, c$ en trois points $\alpha', \beta', \gamma'$ tels que les trois droites A$\alpha'$, B$\beta'$, C$\gamma'$ soient concourantes.

Pour que la conique soit une parabole, il faut que la droite $\Delta$ puisse s'éloigner tout entière à l'infini ; dans ce cas, les points $\alpha', \beta', \gamma'$ sont tous trois à l'infini et les droites A$\alpha'$, B$\beta'$, C$\gamma'$ sont les parallèles issues de A, B, C à $a, b, c$. Donc enfin la conique sera une parabole si les parallèles issues de A, B, C aux droites $a$, $b$, $c$ sont concourantes.

**3.** Supposons cette condition réalisée : soit H le point de concours des parallèles issues de A, B, C à $a$, $b$, $c$. A une tangente $\Delta$ à la parabole correspond une droite O$\omega$ et une seule et inversement, puisqu'à la parabole on ne peut mener qu'une tangente parallèle à une direction donnée, nous pouvons aussi bien dire qu'à une direction de $\Delta$ correspond une direction de O$\omega$ et une seule et inversement. Les parallèles menées par O aux droites $\Delta$ forment donc avec les droites O$\omega$ correspondantes deux faisceaux homographiques. D'ailleurs si l'on place $\omega$ sur O$\alpha$, B' vient en C et C' en B, autrement dit les droites $\Delta$ qui correspondent à O$\alpha$, O$\beta$, O$\gamma$ sont BC, CA, AB. L'homographie est donc entièrement déterminée par trois couples de directions homologues.

Si l'on suppose $\omega$ en H, la droite $\Delta$ correspondante est à l'infini ; donc les diamètres de notre parabole sont parallèles à l'homologue de OH dans l'homographie ci-dessus.

Connaissant ainsi la direction de l'axe de la parabole et remarquant d'ailleurs que sa directrice passe au point $H_0$, orthocentre du triangle ABC, la directrice en résulte immédiatement.

Dans le cas particulier où $a, b, c$ sont les perpendiculaires aux côtés de ABC en leurs milieux, les parallèles issues de A, B, C à $a, b, c$ sont les hauteurs du triangle, elles concourent en $H_0$. Le point O vient en $O_0$, centre du cercle circonscrit à ABC.

Les directions $a$, BC. $b$, CA, $c$, AB sont deux à deux rectangulaires. Donc les faisceaux homographiques ci-dessus (qui sont d'ailleurs en involution) admettent trois couples rectangulaires. Donc tous les couples sont rectangulaires, autrement dit $\Delta$ et $O\omega$ sont perpendiculaires.

La direction de l'axe de la parabole est l'homologue de OH, c'est-à-dire ici perpendiculaire à $O_0H_0$. Donc la directrice n'est autre que $O_0H_0$.

Remarque. — *Sur les tangentes issues du point O à la parabole.* — Soit O′ un point quelconque de $H_0O_0$ : si on prend pour droites $a$, $b$, $c$ les perpendiculaires issues de O′ aux côtés de ABC, la parabole ne change pas. Il est aisé de reconnaître que les deux involutions formées d'une part par les tangentes issues de O′ aux paraboles inscrites dans ABC, de l'autre par les parallèles issues de O′ aux asymptotes des coniques qui passent en A,B,C,O′, se confondent ; elles ont en effet trois couples communs évidents, formés par les droites O′A, O′B, O′C et les parallèles aux côtés de ABC. Donc les tangentes issues de O′ à la parabole de directrice $H_0O'$ étant rectangulaires, se confondent avec les parallèles issues de O′ aux asymptotes de l'hyperbole équilatère qui passe aux points A, B, C, O′.

D'où l'on conclut dans le cas général que les tangentes issues de O à la parabole sont parallèles aux asymptotes de la conique qui passe aux points A, B, C, H, O.

L. BICKART.

Très bonne solution géométrique de M. Parrod, à Vesoul. Solution satisfaisante de M. R. Bouvaist.

---

**1167.** — *Un plan* P *coupant un ellipsoïde* E, *de centre* O, *suivant une conique* C, *on appelle* V *le cône de sommet* O *et de base* C.

*Trouver l'enveloppe du plan* P *lorsque le cône* V *conserve un volume constant* V, *et discuter la réalité des cônes correspondant aux diverses parties de cette enveloppe.*

*Déterminer le maximum du volume* V, *et faire voir que les cônes* V *correspondants sont ceux qui sont capables des trièdres formés par les diamètres conjugués de l'ellipsoïde* E.

On sait que les demi-longueurs d'axes de la conique (C), section d'une quadrique

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

par le plan (P) $ux + vy + wz + r = 0$ sont racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} A + \frac{f_0}{\rho^2} & B & B' & u \\ B'' & A' + \frac{f_0}{\rho^2} & B & v \\ B' & B & A'' + \frac{f_0}{\rho^2} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$f_0$ désignant le résultat obtenu en remplaçant dans $f(x, y, z)$ $x, y, z$ par les coordonnées du centre de la conique.

Si la quadrique est un ellipsoïde (E) rapporté à ses axes

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

cette équation devient

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2}+\frac{f_0}{\rho^2} & 0 & 0 & u \\ 0 & \frac{1}{b^2}+\frac{f_0}{\rho^2} & 0 & v \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2}+\frac{f_0}{\rho^2} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

et en développant on obtient

$$u^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{f_0}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{f_0}{\rho^2}\right)+v^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{f_0}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{f_0}{\rho^2}\right)+w^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{f_0}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{f_0}{\rho^2}\right)=0,$$

ou

$$(1)\quad \rho^4(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)+\rho^2 f_0(a^2u^2(b^2+c^2)+b^2v^2(c^2+a^2)$$
$$+c^2w^2(a^2+b^2))+a^2b^2c^2f_0^2(u^2+v^2+w^2)=0.$$

Calculons maintenant $f_0$ qui est égal à $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1$, $x_0, y_0, z_0$ désignant les coordonnées du centre de la conique (C). Ce point est déterminé par l'intersection du plan sécant et du diamètre conjugué de ce plan, $\frac{x}{a^2u}=\frac{y}{b^2v}=\frac{z}{c^2w}$. Nous aurons donc

$$\frac{x_0}{a^2u}=\frac{y_0}{b^2v}=\frac{z_0}{c^2w}=\frac{ux_0+vy_0+wz_0}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}=\frac{-r}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2},$$

et par suite

$$x_0=\frac{-a^2ur}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2},\qquad y_0=\frac{-b^2vr}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2},\qquad z_0=\frac{-c^2wr}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}.$$

On en déduit alors sans difficulté

$$(2)\qquad f_0=\frac{r^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}-1.$$

Soient $\rho_1^2$ et $\rho_2^2$ les valeurs de $\rho^2$ qui vérifient l'équation (1). Les demi-axes de l'ellipse (C) ont pour longueurs $\rho_1$ et $\rho_2$; l'aire de cette ellipse est $\pi\rho_1\rho_2$, et le volume V du cône (Γ) qui a pour base cette ellipse et pour sommet l'origine O est $\frac{1}{3}\pi\rho_1\rho_2 h$, $h$ désignant la distance du point O au plan P.

Or nous avons

$$\rho_1^2\rho_2^2=\frac{a^2b^2c^2f_0^2(u^2+v^2+w^2)}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2},$$

$$h^2=\frac{r^2}{u^2+v^2+w^2},$$

par suite

$$V^2=\frac{1}{9}\cdot\frac{\pi^2a^2b^2c^2f_0^2r^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2},$$

ou, en remplaçant $f_0$ par sa valeur (2),

$$V^2=\frac{1}{9}\,\frac{\pi^2a^2b^2c^2r^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}\left(\frac{r^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}-1\right)^2.$$

En y considérant V comme une constante donnée, cette équation est l'équation tangentielle de l'enveloppe du plan P.

Pour la discuter nous poserons

$$\frac{9V^2}{\pi^2a^2b^2c^2}=k^2,\qquad \frac{r^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}=\lambda;$$

l'équation devient

$$(3) \qquad f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2 - k = 0.$$

C'est une équation du troisième degré en $\lambda$ qui admet trois racines réelles ou imaginaires. A chaque racine $\lambda'$ correspond un ellipsoïde (E') ayant pour équation tangentielle

$$\frac{r^2}{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2} = \lambda', \qquad \text{ou} \qquad a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - \frac{r^2}{\lambda'} = 0.$$

On en conclut que l'enveloppe du plan P se compose de trois ellipsoïdes homothétiques et concentriques à l'ellipsoïde donné (E). A toute racine réelle et positive $\lambda'$ correspond un ellipsoïde réel (E') dont les demi-longueurs d'axes sont $a\sqrt{\lambda'}$, $b\sqrt{\lambda'}$, $c\sqrt{\lambda'}$. Si $\lambda'$ est plus petit que 1, (E') est intérieur à E, les plans tangents à (E') coupent (E) suivant des ellipses réelles, et les cônes (Γ) sont réels. Si $\lambda'$ est plus grand que 1, (E') est extérieur à (E) et les cônes (Γ) correspondant aux plans tangents à (E') sont imaginaires.

Nous sommes donc conduits à discuter la réalité et le signe des racines de l'équation (3), et à comparer ces racines au nombre 1. Nous appliquerons le théorème de Rolle.

La dérivée

$$f'(\lambda) = (\lambda - 1)(3\lambda - 1)$$

admet pour racines $\frac{1}{3}$ et 1; formons la suite de Rolle, en joignant zéro aux nombres de cette suite; nous avons ainsi

$$-\infty \qquad 0 \qquad \frac{1}{3} \qquad 1 \qquad +\infty;$$

les signes des résultats de substitution sont :

$$- \qquad - \qquad \frac{4}{27} - k^2 \qquad - \qquad +$$

d'où les conclusions suivantes :

1° $k^2 < \frac{4}{27}$. L'équation (3) admet trois racines réelles positives dont deux, $\lambda_1$ et $\lambda_2$, sont plus petites que 1, et une, $\lambda_3$, est plus grande que 1. L'enveloppe du plan P se compose de trois ellipsoïdes réels dont deux, $E_1$ et $E_2$, sont intérieurs à E, et un, $E_3$, extérieur à E. Les cônes (Γ) correspondant à $E_1$ et $E_2$ sont réels; ceux qui correspondent à $E_3$ sont imaginaires.

2° $k^2 = \frac{4}{27}$. L'équation (3) a une racine double $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ et une racine simple $\lambda_3$ supérieure à 1. L'enveloppe se compose de deux ellipsoïdes dont l'un seulement est intérieur à (E).

3° $k^2 > \frac{4}{27}$. L'équation (3) a une seule racine réelle, supérieure à 1. L'enveloppe se compose de deux ellipsoïdes imaginaires et d'un ellipsoïde réel extérieur à (E). Les cônes correspondants sont imaginaires.

Il résulte de là que pour qu'il existe des cônes réels, il faut que $k^2$ soit inférieur ou égal à $\frac{4}{27}$. Le maximum de $k$ est donc $\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Comme

$$V^2 = \frac{1}{9}\pi^2a^2b^2c^2k^2, \qquad \text{ou} \qquad V = \frac{1}{3}\pi abck,$$

on voit que le maximum de V est $\frac{2}{9\sqrt{3}}\pi abc$.

Les cônes correspondants ont pour base les ellipses, sections de (E) par des plans tangents à l'ellipsoïde $a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 3r^2 = 0$. L'équation d'un de ces cônes est

$$r^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - (ux + vy + wz)^2 = 0.$$

Pour qu'il soit capable d'un trièdre conjugué par rapport à l'ellipsoïde (E), il faut qu'on ait la relation

$Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 = 0$ qui s'écrit ici

$$\left(\frac{r^2}{a^2} - u^2\right)a^2 + \left(\frac{r^2}{b^2} - v^2\right)b^2 + \left(\frac{r^2}{c^2} - w^2\right)c^2 = 0,$$

ou

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 3r^2 = 0,$$

ce qui a bien lieu.

PARROD, à Vesoul.

Solutions satisfaisantes par MM. Dulimbert, Haag, Bouvaist.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1217**. — On considère dans un plan un faisceau de coniques homofocales $\Sigma$ et un cercle $\Gamma$ de centre C.

1° Il existe quatre coniques $\Sigma$ tangentes au cercle $\Gamma$ ; soient $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ les quatre points de contact et $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ les tangentes au cercle $\Gamma$ en ces points ; démontrer que le quadrangle de ces quatre points et le quadrilatère de ces quatre tangentes ont même triangle diagonal PQR.

2° On fait varier le rayon du cercle $\Gamma$, le centre C restant fixe, déterminer le lieu des points $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, l'enveloppe des tangentes $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$, le lieu des points de rencontre de ces tangentes deux à deux, le lieu des sommets du triangle PQR et l'enveloppe des côtés de ce triangle.

3° L'enveloppe des tangentes $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ est une parabole $\Pi$ tangente aux axes des coniques $\Sigma$ en des points M et N. Comment doit-on faire varier le point C pour que la corde MN passe constamment par ce point C ; déterminer dans ce cas l'enveloppe de MN, ainsi que le lieu du foyer et l'enveloppe de l'axe de la parabole $\Pi$.

H. V.

**1218**. — Etant donnée une ellipse rapportée à ses axes, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, on mène la tangente et la normale en un point M de cette courbe. Ces droites rencontrent $Ox$ respectivement en A et A', et $Oy$ en B et B'. Les cercles qui ont pour diamètres AA' et BB' se coupent au point M et en un autre point P. Démontrer que $OM \times OP = a^2 - b^2$, et trouver le lieu du point P quand le point M décrit l'ellipse.

J. VIDAILLET, surveillant général à l'école Colbert.

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1180**. — *Lieu du point de rencontre de la tangente à une ellipse en un point variable et de l'hyperbole d'Apollonius relative à ce point.*

Nous rapporterons l'ellipse à ses axes et nous prendrons pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soient alors $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées d'un point de cette ellipse et

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de la tangente en ce point ; cette équation peut s'écrire aussi $\frac{\alpha(x-\alpha)}{a^2} + \frac{\beta(y-\beta)}{b^2} = 0$,

puisque

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1 ;$$

d'autre part, l'équation de l'hyperbole d'Apollonius du point $(\alpha, \beta)$ est

$$\frac{\alpha - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\beta - y}{\frac{y}{b^2}},$$

donc l'équation de la tangente devient, en tenant compte de celle-ci,

$$\frac{\alpha x}{a^4} + \frac{\beta y}{b^4} = 0,$$

ou

$$\frac{\frac{\alpha x}{a^2}}{a^2} = \frac{\frac{\beta y}{b^2}}{-b^2}$$

En combinant cette dernière avec la première forme de l'équation de la tangente, nous obtenons de suite

$$\frac{\frac{\alpha x}{a^2}}{a^2} = \frac{\frac{\beta y}{b^2}}{-b^2} = \frac{1}{c^2},$$

puis

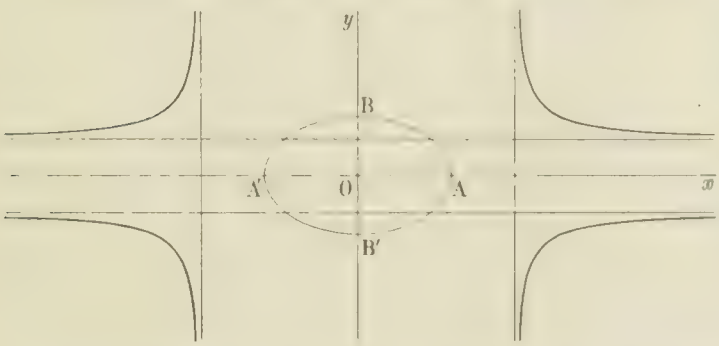
$$\frac{\alpha}{a} = \frac{a^3}{c^2 x}, \qquad \frac{\beta}{b} = -\frac{b}{c^2 y};$$

il n'y a plus qu'à écrire que $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$ pour avoir l'équation du lieu :

(1) $$c^4 x^2 y^2 - a^6 y^2 - b^6 x^2 = 0.$$

C'est une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport aux axes, ayant les directions de ceux-ci pour directions asymptotiques doubles. Les asymptotes parallèles à $Oy$ sont

$$x^2 = a^2 \frac{a^4}{c^4}, \qquad x = \pm a \frac{a^2}{c^2},$$




elles sont plus éloignées de l'origine que les sommets de l'ellipse ; les asymptotes parallèles à $Ox$ sont

$$y^2 = b^2 \frac{b^4}{c^4}, \qquad y = \pm b \frac{b^2}{c^2}.$$

D'autre part, nous voyons que $y$ n'est réel que si $x^2$ est supérieur à $\frac{a^6}{c^4}$ et que $x$ n'est réel que si $y^2$ est plus grand que $\frac{b^6}{c^4}$ ; la courbe a donc la forme ci-contre ; toute autre forme est d'ailleurs inconciliable avec les remarques évidentes que nous avions signalées au début.

J. LOUIN, lycée de Toulouse.

Bonnes solutions : MM. J. Haag, à Nancy ; R. Javelot, à Givet ; P. Canet, à Nancy ; F. Pégorier, à Carcassonne ; A. Viai, à Saint-Etienne ; J. Marchal ; M. Treillou ; R. Bouvaist ; O. Nuytten, lycée de Lille.

**Solution géométrique.** — Soit M le point variable sur l'ellipse et P le point de rencontre de la tangente en ce point avec l'hyperbole d'Apollonius relative à ce point. D'après une propriété de l'hyperbole d'Apollonius, la polaire de P par rapport à l'ellipse est perpendiculaire à PM, c'est-à-dire normale en M à l'ellipse. Le lieu de P est donc la polaire réciproque par rapport à l'ellipse de la développée de cette ellipse. Cette courbe se déduit facilement de la développée de l'ellipse. Aux quatre points de rebroussement de cette développée correspondent quatre asymptotes d'inflexion pour la polaire réciproque, ces asymptotes étant deux à deux parallèles aux axes de l'ellipse. On en déduit facilement la construction de la courbe.

J. HAAG, soldat au 69e de ligne à Nancy.

## PHYSIQUE

**1136.** — *Deux tubes verticaux, cylindriques, de même section, peuvent communiquer par un conduit à robinet adapté à la partie inférieure de l'un et de l'autre. Les fonds de ces tubes sont dans un même plan horizontal.*

*L'un des tubes est fermé à sa partie supérieure ; sa longueur est un mètre. Il renferme une colonne d'air de* $25^{cm}$ *de hauteur à la pression atmosphérique* $75^{cm}$ *et une colonne de mercure de* $75^{cm}$ *de hauteur.*

*Au commencement de l'expérience, le conduit à robinet est plein de mercure et le robinet est fermé.*

*On ouvre le robinet de communication ; une partie du mercure passe dans le second tube vertical qui n'en contenait pas et qui communique avec l'atmosphère par son extrémité supérieure. L'équilibre s'établit ; on demande quelle est alors la différence de niveau du mercure dans les deux tubes.*

(*École centrale, 1re session 1902.*)

Désignons par $S$ la section des tubes et par $h$ la quantité dont le mercure est monté dans le tube ouvert et, par conséquent, descendu dans le tube fermé. La différence de niveau est devenue $x = 75 - 2h$, le volume occupé par l'air $S(25 + h)$ et sa pression, évaluée en hauteur de mercure, $75 - x = 2h$, puisque $75$ est la pression atmosphérique. Ecrivons, d'après la loi de Mariotte, que le produit du volume par la pression est resté constant :

$$S \times 25 \times 75 = S(25 + h) \times 2h.$$

Cette équation peut s'écrire

$$2h^2 + 2 \times 25h - 25 \times 75 = 0.$$

Elle a ses racines réelles et de signes contraires ; la racine positive seule convient, et l'on a

$$h = 25 \times \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} = 20^{cm},57 ;$$

$$x = 75 - 2h = 33^{cm},86.$$

T. LEMOYNE, à Troyes.

Assez bonne solution de M. Laurence, à Bordeaux.

## QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

### ÉCOLE CENTRALE (1902).

**Géométrie analytique** (M. Gouilly).

*Géométrie analytique à deux dimensions.*

**2106.** — Aire d'un triangle dont on donne les trois sommets.

**2107.** — Angle des deux droites $x^2 - y^2 - xy = 0$. Equation du faisceau des bissectrices.

**2108.** — Que représente l'équation $x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 1 = 0$ ?

**2109.** — Tangentes communes à deux circonférences.

**2110.** — Que représente la fonction $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$ ?

**2111.** — Etant donné un cercle par les coordonnées du centre et le rayon, puissance d'un point par rapport à ce cercle.

**2112.** — Ecrire que les cercles $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R'^2 = 0$ sont tangents. Equation du faisceau des droites joignant l'origine aux points de concours des deux cercles. — Tangentes communes à ces deux cercles.

**2113.** — Conditions pour que deux cercles se coupent orthogonalement. Pourquoi suffit-il d'écrire qu'ils sont orthogonaux en un point?

**2114.** — Cercle orthotomique.

**2115.** — Lieu des points équidistants d'un point F et d'un cercle O.

**2116.** — On considère un cercle O et un diamètre AB ; par le point A on mène une corde variable AC et sur cette corde on prend un point M tel que $AC \times AM = K^2$. — Lieu du point M quand la sécante tourne autour du point A.

**2117.** — Equation d'une courbe dont la normale passe par un point fixe.

**2118.** — Détermination des points de contact des tangentes menées d'un point à une courbe donnée par son équation.

**2119.** — Construire les courbes

$y = x^2 - 3x + 2$, $\quad y = 2x^2 - 2x + 1$, $\quad y = \sqrt{(x+1)^2 - 4}$, $\quad y = 2x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 3x + 1}$,

$y = x - 1 \pm \sqrt{(x+1)^2 - 1}$, $\quad y = x + 1 + \sqrt{(x-4)^2 - 5}$, $\quad y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 3x + 1}$, $\quad y = 2x + 3 \pm \sqrt{x^2 + 2x + 4}$,

$y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 2x + 2}$, $\quad y = 2x + 3 + \dfrac{4}{x-1}$, $\quad y = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$, $\quad y = \dfrac{x - 1)(x + 1)}{(x + 2)^2}$,

$y = x^3$, $\quad y = x^2 + \dfrac{1}{x}$, $\quad y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, $\quad y = x^3 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$,

$y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $\quad y = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $\quad y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)}}$, $\quad y = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

$xy + y^2 + 2y - 3 = 0$, $\quad x^2 - xy + 2y^2 + x + y = 0$, $\quad y^2 - 2xy - x^2 + y + 1 = 0$,

$x^2 + 2xy - y^2 + x + y = 0$, $\quad x^2 - 2xy - y^2 + x + y = 0$, $\quad (x + y - 1)^2 - (2x - y + 1)^2 - 1 = 0$.

**2120.** — Directions asymptotiques et asymptotes de la courbe

$$x^2y^2 + xy^3 + x^3 + y^3 + \quad = 0.$$

**2121.** — Construire les courbes

$y = e^{\frac{1}{x}}$, $\quad y = \dfrac{1}{\sin x}$, $\quad y = x^2 + \dfrac{1}{\sin x}$, $\quad y = \dfrac{\sin x}{x}$,

$y = \dfrac{x}{\sin x}$, $\quad y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, $\quad y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - x}$, $\quad y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin(1 - x)}$,

$y = \dfrac{\mathrm{L}x}{x}$, $\quad y = \dfrac{\mathrm{L}x}{1 - x}$, $\quad y = \dfrac{\mathrm{L}(x+1)}{x - 1}$, $\quad y = \mathrm{L}\cos x$,

$y = \mathrm{L}\operatorname{tg} x$, $\quad \sqrt{y^2 + b^2} = \mathrm{L}x^2$.

$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t+1}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{t-1}{t+1}, \\ y = \dfrac{t^2-1}{t+2}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{t^2 - 2t + 1}{1 + t^2}, \\ y = \dfrac{t^3 - t^2 + 3t - 3}{t + 1}; \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t-1}, \\ y = \dfrac{t-1}{t^2}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{2t^2}{t-2}, \\ y = \sin t; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{L}t - t}{t-1}, \\ y = \dfrac{\mathrm{L}t + t}{t+1} \end{cases}$

**2122.** — Distance de deux points en coordonnées polaires.

**2123.** — Construire les courbes

$\rho = \dfrac{p}{\cos\omega}$, $\quad \rho = a\cos\omega + b\sin\omega$, $\quad \rho = \dfrac{1}{1 + 2\sin\omega}$, $\quad \rho = \dfrac{\sin\omega}{1 - \cos\omega}$,

$\rho = \dfrac{\cos^2\omega}{\sin\omega}$, $\quad \rho = \dfrac{1}{\omega}$, $\quad \rho = \dfrac{\omega}{1 - \omega}$, $\quad \rho = e^{\omega}$,

$\rho = e^{\omega} + e^{-\omega}$, $\quad \rho = e^{\frac{1}{\omega}}$, $\quad \rho = \dfrac{\sin\omega}{\omega}$, $\quad \rho = \dfrac{\omega}{\sin\omega}$,

$\rho = \mathrm{L}\omega$, $\quad \rho = \mathrm{L}\sin\omega$.

**2124.** — Réduction de l'équation $x^2 + 2xy + y^2 - y + x = 0$.

**2125.** — Rapporter une conique à ses axes. Equation des axes de la conique dans l'ancien système.

**2126.** — Longueurs des axes de la conique $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 1 = 0$.

**2127.** — Equation d'une conique dont on donne deux diamètres conjugués en position et deux points (les axes rectangulaires étant fixés *a priori*).

**2128.** — Etant données une ellipse et une corde, trouver l'angle sous lequel on voit cette corde de l'un des foyers.

**2129.** — On donne une ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et une sécante ; calculer l'angle sous lequel on voit de l'extrémité gauche du grand axe la corde interceptée par l'ellipse sur cette sécante. — Variation de cet angle quand la sécante reste à une distance constante du centre. — Déduire du calcul la condition pour que la droite soit tangente à l'ellipse.

**2130.** — Exprimer qu'une droite est normale à une ellipse.

**2131.** — Cordes supplémentaires dans l'ellipse. Diamètres conjugués égaux.

**2132.** — Circonscrire une ellipse à un parallélogramme.

**2133**. — Propriétés des cordes d'une hyperbole.

**2134**. — Une hyperbole étant représentée par l'équation $xy = k^2$, calculer $k^2$ en fonction des longueurs $a, b$ des demi-axes de l'hyperbole.

**2135** — Mener d'un point les normales à la parabole.

**2136** — Construire une parabole connaissant une tangente, le point de contact et deux autres points. Equation de cette parabole.

**2137**. — Construire une parabole connaissant une tangente, le point de contact, la direction de l'axe et un point. Equation de la courbe.

**2138**. — Construire une parabole connaissant trois points et la direction des diamètres. Equation de la parabole ainsi définie.

**2139**. — Construire une parabole connaissant une tangente, la direction de l'axe et deux points. Equation de cette courbe. Déterminer le point de contact de la tangente donnée.

**2140**. — Démontrer que si, d'un point de la directrice, on mène des tangentes à une parabole, ces tangentes sont rectangulaires et la corde de contact passe au foyer. — Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes passe aussi au foyer.

**2141**. — Démontrer que deux coniques se coupent en quatre points. — Appliquer à $xy + x^2 + y + 1 = 0$, $y^2 = 2x$.

**2142**. — Sécantes communes à deux coniques. — Exprimer qu'une conique se réduit à deux droites concourantes ; à deux droites parallèles.

**2143**. — Déterminer $\lambda$ pour que l'équation $xy + \lambda(y-1)(x+y-1) = 0$ représente deux droites. — Même question pour l'équation $(x+2)(y-2) + \lambda(y^2 - x) = 0$.

**2144**. — Déterminer $\lambda$ pour que l'équation $f(xy) + \lambda = 0$ représente deux droites. — Appliquer à

$$x^2 + xy + y^2 + x + y + \lambda = 0.$$

**2145**. — On donne l'équation $y^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 - x) = 0$. Quels sont les points fixes du faisceau de coniques représenté par cette équation ? — Condition pour que l'équation représente deux droites. — L'équation en $\lambda$ ayant une racine triple, qu'en résulte-t-il pour les deux coniques $y^2 - x = 0$, $x^2 + y^2 - x = 0$ ?

**2146**. — Etudier le faisceau $xy + \lambda(y^2 - 2px) = 0$.

**2147**. — Equation générale des coniques passant par quatre points. — Propriétés communes à toutes les coniques du faisceau

$$x^2 - y^2 + \lambda(x + y) + 1 = 0.$$

Quels sont les quatre points fixes de ce faisceau ? — Par quatre points passe-t-il toujours une parabole réelle ?

*Géométrie analytique à trois dimensions.*

**2148**. — Angle de deux directions définies par leurs cosinus directeurs. — Parallélisme.

**2149**. — Cosinus des angles que fait avec les axes une droite donnée par l'intersection de deux plans

$$2x - 3y + 4z - 1 = 0, \qquad x + y - z + 2 = 0.$$

**2150**. — Angle de deux plans $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

**2151**. — Distance d'un point à une droite.

**2152**. — Condition pour que les deux droites $\begin{cases} x = az + b \\ y = cz + d, \end{cases}$ $\begin{cases} x = a'z + b' \\ y = c'z + d', \end{cases}$ soient situées dans un même plan. — Condition pour qu'elles se coupent.

**2153**. — Equation du plan déterminé par une droite et un point.

**2154**. — Mener par un point la perpendiculaire à une droite donnée.

**2155**. — Equation des plans bissecteurs des dièdres formés par deux plans.

**2156** — Que représente l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 1 = 0$ ?

**2157**. — Equation générale des cylindres.

**2158**. — Cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice la courbe $z = h$, $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

**2159**. — Tangente en un point de la courbe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $y = mx + nz$.

**2160**. — Surface engendrée par la courbe $y = 0$, $z = Lx^2$ en tournant autour de $Oz$. Plan tangent en un point.

**2161**. — Que représente l'équation $x^2 + y^2 = \lambda z$ ?

**2162**. — Étudier la surface $z = e^{x^2+y^2}$. Construire la méridienne. — Plan tangent en un point quelconque de la surface.

**2163**. — Que représentent les équations

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + C, \qquad \sqrt{x^2 + y^2} + mz + n = 0, \qquad \sqrt{x^2 + y^2} + mz^2 + n = 0 \text{ ?}$$

**2164**. — Classification des quadriques par la théorie du centre ; par la discussion du cône asymptote.

**2165**. — Plans diamétraux de $xy = z$.

**2166**. — Lorsqu'un point décrit un plan, son plan polaire par rapport à une quadrique donnée passe par un point fixe. Quel est ce point fixe ?

**2167**. — Réduction de l'équation $yz + zx + xy = 1$.

**2168.** — Etudier les surfaces

$$x^2 - y^2 - z = 0, \qquad x^2 - 3y^2 + z = 0, \qquad z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

(Génératrices rectilignes).

**2169.** — Plan polaire d'un point par rapport à cette dernière surface. Relation entre le plan polaire, le sommet et le point donné.

**2170.** — Déterminer $\lambda$ de façon que l'équation $f(x, y, z) + \lambda = 0$ représente un cône, $f(x, y, z) = 0$ étant l'équation d'une quadrique.

## Mécanique (M. Gouilly).

**2171.** — Hodographe d'un mouvement rectiligne uniforme.

**2172.** — Etudier le mouvement $s = 2t^2 - t + 1$. — Phases du mouvement, vitesse au temps $t$.

**2173.** — Dans un mouvement uniformément varié, les espaces parcourus par le mobile sont $s_1$ au temps $t_1$, $s_2$ au temps $t_2$, $s_3$ au temps $t_3$. Quelle est la loi du mouvement ?

**2174.** — Dans un mouvement uniformément varié, la vitesse moyenne entre les instants $t_1$ et $t_2$ est égale à la moyenne des vitesses en ces temps.

**2175.** — L'accélération d'un mobile étant proportionnelle au temps, quel est le mouvement ?

**2176.** — Mouvement vibratoire rectiligne. Equation, amplitude, phase, période. — Hodographe

**2177.** — Composition de deux mouvements rectilignes suivant la même droite

$$x_1 = 3t^3 + t^2, \qquad x_2 = 2t^2 + t.$$

**2178.** — Diagramme du mouvement représenté par l'équation $s = Lt$.

**2179.** — Vitesse et accélération dans le mouvement $x = t^3 - 2t + 1$, $y = t^2 + 1$.

**2180.** — Un mobile se déplace sur la courbe $y = x^3$, de façon que $x = t + 1$. Construire le vecteur accélération au point $t = t_1$.

**2181.** — Mouvement circulaire uniforme. Vitesse angulaire, accélération tangentielle. Qu'est-ce que la force centrifuge ? Hodographe d'un mouvement circulaire uniforme.

**2182.** — A quelles heures se superposent les aiguilles d'une horloge ? A quelles heures forment-elles un angle droit ?

**2183.** — Hodographe d'un mouvement circulaire quelconque. Peut-on de l'hodographe d'un mouvement déduire la trajectoire ?

**2184.** — Vitesse et accélération tangentielle dans le mouvement circulaire. Définition de l'accélération centripète. Formules.

**2185.** — Tangente à la courbe : $r_1 + r_2 = 2a$.

**2186.** — Si on projette un mouvement sur un axe, la vitesse du mouvement-projection est la projection de la vitesse du mouvement du mobile dans l'espace.

**2187.** — Mouvement le plus général dont l'accélération est nulle.

**2188.** — Mouvement le plus général dont les projections sur les axes sont des mouvements uniformément variés.

**2189.** — Mouvement le plus général dont les projections sur les axes sont des mouvements harmoniques de même période. Montrer que le mouvement est plan. Trouver la trajectoire.

**2190.** — Principes de la dynamique.

**2191.** — Relation entre la masse et le poids : 1° pour un point matériel ; 2° pour un corps quelconque supposé composé d'un système de points matériels.

**2192.** — Différence entre la masse et le poids. Système C. G. S.

**2193.** — Variation de la pesanteur avec l'altitude.

**2194.** — La verticale d'un lieu est-elle dirigée vers le centre de la terre ?

**2195** — La pesanteur varie d'un point du globe à un autre ; pourquoi ? Influence de la rotation de la terre ?

**2196.** — Dimensions d'une accélération. Calculer $g$ en prenant la minute comme unité de temps.

**2197.** — Dimensions d'un angle, d'une vitesse angulaire.

**2198.** — Dimensions d'un poids spécifique.

**2199.** — Masse d'un décimètre cube de fer pesant $7^{kg},8$ à Paris. Exprimer le résultat en unités C. G. S.

**2200.** — Quelle est la force qui serait capable de communiquer à une masse de $8^{gr}$ une accélération de $1^m$ par seconde.

**2201.** — Quelle force doit-on appliquer à une masse égale à 4, pour qu'elle parcoure $10^m$ dans la première seconde de son mouvement ?

**2202.** — Un point matériel dont la masse pèse $4^{kg}$ parcourt $100^m$ en deux secondes d'un mouvement uniformément varié ; quelle est la force qui lui est appliquée ?

**2203.** — $t$ désignant le temps et $x$ l'espace, que représente l'équation $x = 4t^2 - t$ ? On suppose que le point qui est animé de ce mouvement pèse 40 kilogs. A quelle force est-il soumis ?

**2204.** — Mouvement des projectiles. Déterminer la parabole de tir ; axe, sommet, point situé dans le plan horizontal du point de départ.

**2205.** — Chute d'un point matériel pesant en tenant compte de la résistance de l'air, proportionnelle au carré de la vitesse.

**2206.** — Un point matériel soumis à une force dirigée vers un point fixe prend un mouvement plan.

**2207.** — Mouvement produit par une force répulsive émanant d'un point fixe et proportionnelle à la distance.

**2208.** — Un point matériel M peut se déplacer sur un plan horizontal poli et est attiré par une masse O proportionnellement à la distance. Mouvement du point M.

**2209.** — Un point pesant se déplace sur un plan horizontal poli ; à l'instant considéré il a une vitesse $v_0$ ; on veut l'arrêter par une force constante F parallèle au plan horizontal dans un temps $\theta$ ; quelle doit être l'intensité de la force F ?
Application : $P = 30^{kg}$, $v_0 = 2^m$, $\theta = 20^{sec}$.

**2210.** — Chute d'un point matériel sur un plan incliné. Equation du mouvement. Calculer la vitesse en supposant que le point parte du repos.

**2211.** — Un point matériel glisse sur un plan incliné AB ; il part de A avec une vitesse $v_0$ ; quelle est sa vitesse en B, $h$ désignant la hauteur de chute ?

**2212** — Étant donnés une circonférence dans un plan vertical et un mobile partant de l'extrémité du diamètre vertical, chercher le temps employé par le mobile pour parcourir une corde sous l'action de son poids.

**2213.** — Un point matériel placé sur une trajectoire matérielle est soumis à une force F. Condition d'équilibre. Accélération quand le point se déplace.

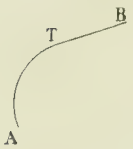
**2214.** — Un mobile décrit un arc de courbe sous l'action de la pesanteur. La vitesse au point le plus haut est $v_0$ ; Quelle est la vitesse sur un plan horizontal donné ?

**2215.** — Un mobile sollicité par une force F se meut sur une trajectoire matérielle circulaire ; sa vitesse au temps $t$ est $v$ ; calculer la réaction de la trajectoire.

**2216.** — Quelle est la réaction opposée par un bras à une masse de $4^{kgs}$ parcourant une circonférence de $0^m,50$ de rayon avec une vitesse de $3^m$ et reliée au bras par un fil?

**2217.** — Quelle est la force qui ferait parcourir sur une circonférence de rayon R à une masse égale à 5 une distance de $1^m$ par seconde ? Vitesse angulaire du mobile.

**2218.** — On donne un arc de cercle AT et la tangente TB en l'extrémité T ; c'est la trajectoire d'un point matériel animé d'une vitesse uniforme $v$. Réaction de la trajectoire sur ce point. Quelles sont les forces en présence ? Force centripète.




**2219.** — Sur un plan horizontal rugueux est placé un point matériel pesant, sollicité par une force horizontale $f$ qui varie depuis 0. — Variation de la réaction du plan sur le point quand la force $f$ croît. Lois du frottement.

**2220.** — Mouvement rectiligne d'un point matériel pesant sur un plan horizontal rugueux sous l'action d'une force constante. — Sachant que le point a à l'instant $t$ une vitesse $v$, calculer la réaction du plan.

**2221.** — Un corps tombe le long d'un plan incliné rugueux ; il a au départ une vitesse initiale $v_0$ ; quelle est sa vitesse en arrivant au bas du plan ?

**2222.** — Définir une somme géométrique. Résultante d'un système de vecteurs. Dans une somme géométrique, on peut intervertir l'ordre des vecteurs.

**2223.** — Décomposer un vecteur suivant trois directions.

**2224.** — Moment d'un vecteur par rapport à un point ; l'exprimer en fonction du moment par rapport à un autre point.

**2225.** — Qu'entend-on par moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à un point fixe O ? Le moment résultant de vecteurs concourants coïncide avec le moment de la résultante de ces vecteurs.

**2226.** — Le moment résultant de deux vecteurs formant couple est le même pour tous les points de l'espace.

**2227.** — Condition pour qu'un système de deux vecteurs ait une somme géométrique nulle et une résultante de moments par rapport à un point quelconque, nulle également.

**2228.** — Si deux systèmes de vecteurs ont même somme géométrique et même moment résultant par rapport à un point, ils ont même moment pour un point quelconque de l'espace.

**2229.** — Moment d'un vecteur par rapport à un axe. Montrer que ce moment est la projection sur l'axe du moment du vecteur par rapport à un point quelconque de l'axe.

**2230.** — Connaissant le moment d'un vecteur par rapport à un axe, déterminer le moment par rapport à un axe parallèle.

**2231.** — Connaissant les moments L, M, N d'une force par rapport à trois axes de coordonnées, déterminer le moment de cette force par rapport à un axe quelconque, passant par l'origine.

**2232.** — Démontrer que si la somme des projections d'un système de vecteurs sur trois axes est nulle ainsi que la somme des moments par rapport à ces axes, il en est de même pour un axe quelconque.

**2233.** — Qu'entend-on par point matériel? Comment compose-t-on des forces agissant sur un point matériel ? Composition de deux forces autour d'un point.

**2234** — Équilibre d'un point matériel. Définition de l'équilibre. Conditions analytiques. Pourquoi le nombre des conditions s'abaisse-t-il quand les forces sont toutes dans un même plan ?

**2235.** — Deux forces égales et opposées appliquées à un système matériel se détruisent-elles ?

**2236.** — Un système matériel est en équilibre sous l'action de deux forces. Comment sont liées ces forces?

**2237.** — Réduction d'un système de vecteurs en trois points choisis arbitrairement. On peut toujours trouver trois vecteurs passant par trois points choisis arbitrairement et ayant même somme géométrique et même résultante de moments qu'un système de vecteurs donné.

**2238.** — Quelles conditions doivent remplir les vecteurs de trois forces pour qu'elles se fassent équilibre sur un système matériel ?

**2239.** — Condition pour que trois vecteurs appliqués en trois points donnés aient une somme géométrique nulle et une résultante de moments nulle.

**2240.** — Un système matériel est en équilibre sous l'action de trois seules forces; démontrer que les trois vecteurs représentant les forces sont dans un même plan et que l'un d'eux est égal et directement opposé à la résultante des deux autres.

**2241.** — Pour tout système de points matériels en équilibre, les vecteurs des forces qui proviennent des masses extérieures satisfont aux équations $\Sigma(F) = 0$, $\Sigma(MtF) = 0$.

**2242.** — Conditions d'équilibre d'un corps soumis à un système de forces. Équations nécessaires d'équilibre. Application à un système de forces complanes ou concourantes.

**2243.** — Montrer que les équations d'équilibre sont indépendantes des axes.

**2244.** — Qu'entend-on par systèmes de vecteurs équivalents ?

**2245.** — Composition de deux vecteurs parallèles et de même sens, — de sens contraires.

**2246.** — Trouver un vecteur qui ait même somme géométrique et même moment résultant par rapport à un point que deux vecteurs parallèles.

**2247.** — Comment compose-t-on un nombre quelconque de vecteurs parallèles et de sens quelconques ?

**2248.** — On sait que sur un solide deux forces parallèles sont équilibrées par une troisième; trouver la ligne d'action et l'intensité de celle ci.

**2249.** — Un couple de vecteurs et un vecteur ne peuvent avoir une somme géométrique nulle et une résultante de moments nulle.

**2250.** — Un système de vecteurs admet en général une résultante appliquée à un point O et un couple résultant ou résultante de moments par rapport à ce point.

**2251.** — La projection du moment résultant sur la résultante générale est constante.

**2252.** — Condition pour qu'un système de vecteurs soit réductible à un couple. Condition pour qu'un système de vecteurs ait un couple résultant nul.

**2253.** — Axe central d'un système de vecteurs.

**2254.** — Définition du poids d'un corps et du centre de gravité. Coordonnées du centre de gravité.

**2255.** — Centre de gravité d'un arc de cercle.

**2256.** — Centre de gravité de l'aire d'un triangle.

**2257.** — Centre de gravité du volume d'un tétraèdre.

**2258.** — Démontrer que si aux milieux des côtés d'un triangle se trouvaient des points matériels recevant des forces normales à ces côtés et proportionnelles à leurs longueurs, ces trois forces seraient en équilibre.

**2259.** — On considère un système formé de trois points matériels de poids égaux, à des distances invariables les uns des autres. Equilibrer par une force qui aurait son point d'application en un point à égale distance de deux de ces masses et situé sur la droite qui joint les deux points matériels correspondants.

**2260.** — On donne dans un plan vertical un triangle de périmètre matériel : on le suspend par un fil attaché en un de ses sommets. Position d'équilibre ?

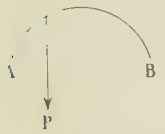
**2261.** — Relations entre les vecteurs des forces agissant sur un système matériel en équilibre et les réactions, abstraction faite du frottement.

**2262.** — Une poutre horizontale repose sur deux couteaux et supporte en son milieu un poids P. En supposant toutes les forces dans un même plan, quelles sont les réactions ?

**2263.** — Réactions des appuis d'une partie droite de longueur $l$ et de poids $p$ par mètre courant.

**2264.** — Conditions d'équilibre d'une poutre reposant sur trois appuis et soumise à son poids.

**2265.** — Equilibre d'un ressort chargé d'un poids P, placé de telle sorte que l'écartement des appuis soit invariable (Problème indéterminé).



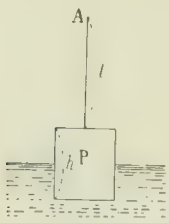

**2266.** — Balance de Roberval.

**2267.** — Bascule de Quintenz. Equilibre. Condition de construction pour que la bascule indique toujours le même poids quelle que soit la position du corps sur le plateau.

**2268.** — Equilibre de la poulie.

**2269.** — Théorie de la poulie mobile.

**2270.** — Etant donné un cylindre matériel reposant par une de ses bases sur un plan matériel rugueux, soumis à une force normale au plan appliquée au centre du cylindre et à une force appliquée en un point A du cercle supérieur et dirigée suivant le rayon correspondant à ce point, condition d'équilibre.




**2271.** — En un point A est attaché un fil de longueur $l$, auquel est suspendu un cylindre de hauteur $h$, de section $w$ et le poids P. — Ce cylindre plonge dans l'eau de $\frac{h}{2}$. Tension appliquée en A. Recherche de cette force quand le fil s'allonge de $\lambda$ par unité de longueur et par unité de tension.

**2272.** — Est-il possible de suspendre un poids, si petit qu'il soit, à un fil tendu en ligne droite horizontalement ?

**2273.** — Équilibre des moufles.

**2274.** — « Ce que l'on gagne en vitesse, on le perd en force. » Peut-on exprimer ce fait par une formule ? — Prendre un exemple où se rencontre l'application de cet adage.

## Géométrie (M. Lévi).

**2275.** — Démontrer que si d'un point du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse les perpendiculaires sur les côtés de ce triangle, les pieds de ces perpendiculaires sont trois points en ligne droite.

**2276.** — Tangentes communes à deux circonférences.

**2277.** — On donne deux cercles. Tracer une droite AB de longueur donnée, rencontrant les deux cercles et parallèle à une direction donnée.

**2278.** — Lieu des points d'où on voit deux cercles sous le même angle.

**2279.** — Lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles. — Etant donnés deux cercles de rayons variables, comment doivent-ils varier pour que l'axe radical des deux cercles reste fixe.

**2280.** — Lieu des centres des cercles qui rencontrent deux cercles donnés O et O′ en des points diamétralement opposés.

**2281.** — On donne trois points A, B, C ; par ces trois points passent trois tangentes de longueurs $a$, $b$, $c$ à un cercle que l'on demande de déterminer.

**2282.** — Produit des deux diagonales d'un quadrilatère inscrit.

**2283.** — Théorème de Pappus.

**2284.** — Construire une longueur $x$, sachant que l'on a

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}, \quad x = \sqrt[4]{a^2b^2 + b^2c^2}, \quad x = \sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^2d^2}.$$

**2285.** — Côtés des décagones réguliers inscrits, convexe et étoilé.

**2286.** — Cercle tangent à deux droites D et D′ et passant par un point A.

**2287.** — Cercle tangent à deux droites et à un cercle donné.

**2288.** — Cercle passant par deux points et tangent à un cercle donné.

**2289.** — Cercle passant par un point, tangent à une droite et à un cercle donnés.

**2290.** — Cercle tangent à trois cercles donnés.

**2291.** — Qu'appelle-t-on plans parallèles ? Montrer qu'il existe de pareils plans.

**2292.** — Qu'appelle-t-on droite parallèle à un plan ? Montrer qu'il en existe.

**2293.** — Lieu des points de l'espace pour lesquels la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante. — Même question pour la somme.

**2294.** — Lieu des points de l'espace pour lesquels le rapport des distances à deux points fixes est constant.

**2295.** — Lieu du milieu d'une droite horizontale s'appuyant sur deux droites données.

**2296.** — On considère une droite verticale et une droite horizontale, dans l'espace ; une droite de longueur constante s'appuie sur les deux droites données ; lieu de son milieu.

**2297.** — Étant données deux droites, on demande de trouver une droite de longueur donnée, parallèle à un plan donné, et dont les extrémités $\alpha$, $\beta$ s'appuient sur les deux droites données.

**2298.** — Conditions pour qu'un angle droit se projette en vraie grandeur.

**2299.** — Dans un tétraèdre les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées passent par un même point.

**2300.** — Somme des faces d'un angle polyèdre convexe.

**2301.** — Trièdres symétriques; dans quel cas ces deux trièdres symétriques sont-ils superposables ?

**2302.** — Cas d'égalité des trièdres.

**2303.** — Lieu du point de concours des médianes des sections parallèles d'un angle trièdre.

**2304.** — Couper un angle polyèdre à quatre faces suivant un parallélogramme.

**2305.** — Volume du tronc de pyramide ; — du tronc de prisme triangulaire ; — du tronc de cône.

**2306.** — Volume engendré par une ligne polygonale régulière tournant autour d'une droite de son plan.

**2307.** — Volume du segment sphérique.

**2308.** — Déterminer une sphère passant par trois points et tangente à un plan donné.

**2309.** — Expression des rayons vecteurs qui joignent un point M d'une ellipse aux deux foyers, en fonction de l'abscisse du point M.

**2310.** — Intersection d'une droite et d'une ellipse. — La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs qui vont du point de contact aux foyers.

**2311.** — Intersection d'une droite et d'une hyperbole définie par ses foyers et la longueur de l'axe focal.

**2312.** — Tangentes à l'hyperbole par un point extérieur, parallèlement à une direction donnée.

**2313.** — Théorème de Poncelet.

**2314.** — Établir les propriétés de la parabole en la considérant comme limite d'une ellipse dont l'un des foyers s'éloigne indéfiniment.

**2315.** — Démontrer qu'une ellipse peut être considérée comme la projection d'un cercle.

**2316.** — Démonstration géométrique des théorèmes d'Apollonius.

**2317.** — Lieu d'un point M d'une droite AB dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires.

**2318.** — Polaire du foyer dans l'ellipse.

**2319.** — Théorème de Dandelin dans la parabole ; — dans l'hyperbole. — Comment détermine-t-on les asymptotes de la section ? — Que faudrait-il pour que la section soit une hyperbole équilatère ?

**2320.** — Construire une ellipse connaissant :
1° un foyer et trois tangentes ;
2° un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles ;
3° un foyer et trois points. — Construire les sommets ;
4° un foyer, deux tangentes et un point ;
5° un foyer, l'extrémité du petit axe et une tangente. — Trouver le point de contact de la tangente et les sommets ;
6° un foyer, un sommet de l'axe focal et une tangente ;
7° un foyer, la grandeur de l'axe focal et l'extrémité du petit axe ; le problème est-il possible ?
8° le grand axe et un point ou le grand axe et une tangente ;
9° le centre, la longueur de l'axe focal et deux tangentes ;
10° la longueur de l'axe focal, le centre et deux points (ou bien un point et la tangente en ce point) ;
11° une directrice et trois points ;
12° deux directrices et deux points.

**2321.** — Construire une hyperbole connaissant :
1° les deux foyers et les directions asymptotiques ;
2° un foyer, une asymptote et une tangente.

**2322.** — Construire une parabole connaissant :
1° le foyer et deux points, — le foyer, un point et une tangente, — le foyer, une tangente et son point de contact, — le foyer et deux tangentes ;
2° la directrice et deux tangentes, — la directrice, une tangente et son point de contact, — la directrice, une tangente et un point ;
3° deux tangentes et la tangente au sommet ;
4° quatre tangentes ; lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites données.

**2323.** — Tangentes communes à deux paraboles d'axes parallèles.

## Géométrie Descriptive (M. Lévi).

**2324.** — Angle de deux plans donnés par leurs traces horizontales et un point commun.

**2325.** — Amener par rotation deux droites invariablement liées à avoir leurs projections verticales parallèles.

**2326.** — Etant données deux droites invariablement liées, les amener par rotation à être simultanément horizontales.

**2327.** — Perpendiculaire commune à deux droites données. — L'une des droites est située dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical.

**2328.** — Intersection d'un tétraèdre régulier reposant sur le plan horizontal avec le plan bissecteur du second dièdre.

**2329.** — On donne un trièdre ayant une face dans le plan horizontal. Lui inscrire une sphère de rayon donné.

**2330.** — On donne le côté du sommet d'un tétraèdre régulier reposant sur le plan horizontal. Construire ce tetraèdre. Centre et rayon de la sphère inscrite.

**2331.** — Mener par trois points du plan vertical une sphère tangente à un plan donné.

**2332.** — On considère deux sphères ; l'une a son centre dans le plan vertical, l'autre dans le plan horizontal. Plans tangents communs par un point situé sur la ligne de terre.

**2333.** — Plans tangents communs à trois sphères.

**2334.** — On considère une sphère tangente au plan horizontal et une droite de front. Mener par cette droite les plans tangents à la sphère.

**2335.** — Section d'une sphère par un plan perpendiculaire au plan horizontal. Points de l'intersection où la tangente est parallèle à une direction donnée.

**2336.** — On donne une sphère par ses deux projections et un plan sécant ; on demande l'intersection. — Déterminer les axes des deux projections.

**2337.** — Intersection d'une sphère et d'une droite.

**2338.** — Circonscrire un cône à une sphère donnée. — Axes de la projection de la courbe de contact. Ombre propre et ombre portée sur les plans de projection.

**2339.** — Mener par un point une droite faisant des angles donnés avec les plans de projection.

**2340.** — Peut-on mener dans un plan donné une droite faisant avec les plans de projection des angles donnés ?

**2341.** — Mener par un point un plan faisant des angles donnés avec deux plans donnés ; — avec les plans de projection.

**2342.** — Etant donnés un plan P, une droite D et un point A, on demande de mener par A une droite faisant un angle donné avec P et passant à une distance donnée de D.

**2343.** — Mener par un point A une droite passant à des distances données de deux droites données. Choisir les plans de projection de façon à avoir l'épure la plus simple possible.

**2344.** — Mener une droite parallèle à une droite donnée et passant à des distances données de deux droites données.

**2345.** — Etant donnés trois points A, B, C, mener par A une droite passant à des distances données de B et C.

**2346.** — Résoudre un trièdre connaissant deux faces *a*, *b* et le dièdre A ; — les trois dièdres.

**2347.** — Trouver la projection verticale d'un point d'un cône circonscrit à une sphère, connaissant la projection horizontale du point.

**2348.** — Un cône a pour sommet un point de la ligne de terre et pour base un cercle dans un plan donné rabattu sur le plan vertical ; projection horizontale d'un point de ce cône, connaissant la projection verticale.

**2349.** — Contours apparents d'un cône (ou d'un cylindre) dont la directrice est un cercle défini par trois points.

**2350.** — On considère un tétraèdre régulier *sabc* reposant sur le plan horizontal. Contour apparent du cône qui a pour sommet le point *a* et pour directrice le cercle inscrit (ou circonscrit) à la face *sbc*.

**2351.** — Contours apparents d'un cône dont la directrice est une courbe située dans un plan défini par deux droites données et dont on connaît la projection horizontale seulement.

**2352.** — Contour apparent horizontal d'un cône de révolution défini par trois génératrices ; — par deux génératrices et un plan tangent.

**2353.** — Contours apparents d'un cylindre de révolution passant par un point donné et tangent à deux points donnés. — L'un des plans est vertical, l'autre debout.

**2354.** — Mener un plan faisant avec le plan horizontal un angle donné et tangent à un cylindre dont la directrice est une courbe donnée dans le plan horizontal.

**2355.** — On donne une courbe C dans un plan P'Q ; c'est la base commune à deux cônes de sommets S et Σ pris sur la ligne de terre. Plans tangents communs à ces deux cônes.

**2356.** — Plans tangents communs à un cylindre et à un cône. — Nombre des solutions.

**2357.** — Normale commune à deux cylindres, à un cône et à un cylindre.

**2358.** — Mener par un point extérieur une normale à un cône de révolution à axe quelconque.

**2359.** — Intersection d'une droite avec un cône dont la base circulaire est dans un plan donné et le sommet en un point de la ligne de terre.

**2360.** — Quand a-t-on des sections elliptiques dans un cône de révolution ? — Démontrer le théorème de Dandelin. — Trouver les directrices de l'ellipse.

**2361.** — On considère un cône de révolution à axe de front dont on donne l'angle au sommet. Section par un plan quelconque.

**2362.** — On considère un cône de révolution à axe de front. Etant donnée la projection verticale d'une de ses génératrices, trouver la projection horizontale. — On coupe ce cône par le plan bissecteur du premier dièdre ; on demande un point de l'intersection et la tangente en ce point. — Comment obtiendrait-on les asymptotes de la section ?

**2363.** — On donne un cône dont la base est dans le plan horizontal et on coupe par le plan bissecteur du premier dièdre. On demande un point courant de l'intersection et la tangente en ce point.

**2364.** — Section plane d'un cône dont la base est une hyperbole donnée dans le plan horizontal. Asymptotes. Tangentes à la courbe d'un point P pris dans le plan sécant.

**2365.** — On considère un cône de sommet (*s*,*s'*) dont la directrice située dans un plan P'Q est projetée horizontalement suivant un cercle. Section par le plan bissecteur du dièdre formé par le plan P'Q avec le plan horizontal.

**2366.** — Trace horizontale (point et tangente) d'un cône dont le sommet est sur l'axe d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical et dont la directrice est une section plane de l'ellipsoïde donné.

**2367.** — Section plane d'un cône dont le sommet est sur *xy* et la directrice est la section d'un tore à axe vertical par le bissecteur du second dièdre.

**2368.** — Branches infinies dans l'intersection de deux cônes.

**2369.** — Un cône a pour sommet un point du plan vertical et pour base un cercle dans le plan horizontal. Un cône homothétique a pour sommet un autre point du plan vertical ; le construire. — Intersection des deux cônes ; montrer que la courbe est plane. Trouver un point et la tangente ; asymptotes.

**2370.** — On donne un cercle dans le plan horizontal et un point *a* sur ce cercle. On considère un cône de sommet S ayant le cercle pour base : intersection avec un cylindre de génératrices parallèles à S*a* et dont la base est une courbe donnée dans le plan horizontal. Point et tangente. Asymptotes.

**2371.** — Intersection de deux cônes dont les sommets sont sur *xy* et dont les directrices situées sur deux plans donnés ont pour projection horizontale le même cercle.

**2372.** — On donne un tétraèdre régulier reposant par sa base sur le plan horizontal. Construire la projection du sommet. — Intersection de deux cônes ayant pour sommets deux des sommets de la base et pour directrices les cercles inscrits dans les faces opposées.

**2373.** — Un cercle dans un plan donné est la base commune de deux cônes dont les sommets sont deux points S et Σ de la ligne de terre. Intersection de ces deux cônes.

**2374.** — Intersection de deux cylindres ayant pour directrice commune un cercle dans le plan vertical. Points doubles de l'intersection. — Même problème avec une ellipse, ou une hyperbole.

**2375.** — On donne un tétraèdre régulier SABC reposant sur le plan horizontal de projection. Intersection d'un cône ayant pour sommet S et pour base le cercle circonscrit au triangle ABC avec le cylindre qui a même base et dont les génératrices sont parallèles à SA.

**2376.** — Intersection de deux cônes dont l'un est de révolution autour d'un axe de front et dont l'autre a pour base une hyperbole équilatère dans le plan horizontal. Points à l'infini, asymptotes.

**2377.** — On donne un ellipsoïde de révolution à axe de front. Trouver la projection verticale d'un point, connaissant la projection horizontale.

**2378.** — On fait tourner un cercle contenu dans un plan P'Q autour de la ligne de terre. Connaissant la projection verticale d'un point de la surface, trouver sa projection horizontale. Plan tangent en ce point. — Même problème avec un axe de front.

**2379.** — On donne un axe dans le plan horizontal. Construire un point et le plan tangent en ce point de la surface de révolution engendrée par rotation autour de l'axe d'une courbe donnée dans le plan vertical. — Contours apparents.

**2380.** — Contour apparent horizontal d'un ellipsoïde de révolution à axe de front.

**2381.** — Plans tangents menés d'un point à une surface de révolution. Points de contact sur un méridien donné.

**2382.** — On considère une surface de révolution à axe vertical et un point extérieur $aa'$. Mener à la surface un plan tangent passant par $aa'$ et faisant un angle $\alpha$ avec le plan horizontal.

**2383.** — On donne un ellipsoïde de révolution à axe de front ; lui mener un plan tangent par un point extérieur.

**2384.** — Plan tangent par une droite donnée à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.— Cas d'une droite horizontale ou d'une droite de front.

**2385.** — Mener par une droite de front un plan tangent à un ellipsoïde de révolution dont l'axe est de bout.

**2386.** — Cône circonscrit à une surface de révolution à axe vertical.

**2387.** — On considère un ellipsoïde de révolution à axe de front. Ligne d'ombre de la surface éclairée par des rayons lumineux parallèles.

**2388.** — Section par un plan d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical. — Déterminer les axes de la section. — Point le plus haut. — Section par le premier plan bissecteur.

**2389.** — Section par un plan quelconque d'un ellipsoïde de révolution à axe de bout.

**2390.** — Section d'un tore à axe vertical par le bissecteur du second dièdre.

**2391.** — Section par un plan de la surface de révolution engendrée par une courbe du plan horizontal en tournant autour d'une droite du plan vertical. Trouver un point de l'intersection et la tangente en ce point.

**2392.** — Intersection d'une droite de front et d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

**2393.** — Intersection d'une droite quelconque avec un ellipsoïde de révolution à axe debout.

**2394.** — On coupe un ellipsoïde de révolution à axe vertical par un plan de bout. La section ainsi obtenue est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont de front. Intersection des deux surfaces. Tangente en un point.

**2395.** — On coupe un ellipsoïde de révolution à axe de bout par un plan vertical. La section est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à $xy$. Intersection des deux surfaces. — Tangente en un point.

**2396.** — Un cône a pour directrice la section d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical par un plan de bout et son sommet est sur l'axe de l'ellipsoïde. Déterminer la seconde courbe d'intersection du cône avec l'ellipsoïde. Tangente en un point.

**2397.** — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical. Un parallèle donné de cette surface est la directrice d'un cône de sommet $(s, s')$. Intersection des deux surfaces. Tangente en un point courant

**2398.** — Intersection d'une surface de révolution à axe vertical, donnée par sa méridienne principale avec un cylindre dont la directrice est donnée dans le plan horizontal.

**2399.** — Intersection d'une sphère et d'un cône de révolution dont l'axe est une droite du plan de front qui passe par le centre de la sphère et la génératrice une tangente à la section de la sphère par ce plan.

**2400.** — Intersection d'un tore à axe vertical avec un cône de révolution dont le sommet est sur l'axe du tore.

**2401.** — Intersection d'un tore à axe vertical avec un cylindre de révolution dont l'axe rencontre celui du tore. Tangente en un point. — Que faut-il pour que l'intersection présente un point double ?

**2402.** — Intersection de deux tores engendrés par la rotation d'un même cercle autour de deux axes situés dans le plan horizontal.

**2403.** — Trace horizontale de la surface engendrée par une droite en tournant autour d'un axe vertical. Tangente en un point. Méridienne de la surface.

**2404.** — Section d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical par un plan de front.

**2405.** — On fait tourner une droite de front autour d'un axe vertical. Projection verticale d'un point, connaissant la projection horizontale. Comment trouverait-on les points de rencontre d'une droite quelconque avec la surface sans s'appuyer sur les propriétés de l'hyperboloïde ?

**2406.** — Génératrices d'un hyperboloïde. Propriétés. — Intersection d'une droite et d'un hyperboloïde.

**2407.** — Mener à un hyperboloïde à axe vertical un plan tangent par une droite horizontale.

**2408.** — Une surface de révolution est engendrée par la rotation d'une droite quelconque autour d'un axe de bout. — Projection verticale d'un point dont on connaît la projection horizontale. Plan tangent en ce point.

**2409.** — On considère dans le plan horizontal une droite Z. Contour apparent vertical de la surface engendrée par une droite quelconque en tournant autour de Z.

**2410.** — On fait tourner une horizontale autour de la ligne de terre. — Projection verticale d'un point de la surface engendrée, connaissant sa projection horizontale.

**2411.** — Combien de systèmes de génératrices dans un paraboloïde hyperbolique? Définir un plan tangent à cette surface et en chercher le point de contact.

**2412.** — Démontrer que deux génératrices de même système d'un paraboloïde ne sont pas dans un même plan.

**2413.** — Un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal est défini par une génératrice de front et une autre verticale. Existe-t-il sur la surface une génératrice horizontale parallèle à une direction donnée? La construire.

**2414.** — Plans tangents par un point à un paraboloïde hyperbolique. Courbe de contact du cône circonscrit ayant le point pour sommet. — Courbe d'ombre produite par un point lumineux *ss'* sur un paraboloïde donné (plan directeur horizontal). — Courbe de contact d'un cylindre hyperbolique.

**2415.** — Contour apparent horizontal d'un paraboloïde hyperbolique défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices non parallèles à ce plan. Pourquoi la courbe de contour apparent est-elle une parabole?

**2416.** — Section d'un paraboloïde hyperbolique (plan directeur horizontal) par un plan donné. Asymptotes de l'intersection. Sommets. — Section par le plan bissecteur du premier ou du second dièdre; point et tangente.

**2417.** — Intersection d'une droite avec un paraboloïde hyperbolique.

**2418.** — Mener à un paraboloïde hyperbolique un plan tangent parallèle à un plan donné. — Sommet et axe du paraboloïde. — Cas où le paraboloïde admet le plan horizontal pour plan directeur.

**2419.** — Un paraboloïde hyperbolique a pour plan directeur un plan P'Q et pour directrices la ligne de terre et une droite de front. Sommet de ce paraboloïde. Trouver sa trace sur le plan directeur P'Q.

**2420.** — Plans tangents à un paraboloïde par une droite donnée. — Cas d'un paraboloïde admettant les deux plans de projection pour plans directeurs.

**2421.** — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et défini par une droite de front et une verticale. On considère un cône de révolution autour de cette génératrice verticale du paraboloïde; intersection des deux surfaces.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1219.** — On considère un cercle fixe et sur ce cercle deux points A et B en lesquels les tangentes *a* et *b* sont rectangulaires.

1° Trouver l'équation générale des coniques osculatrices au cercle donné en A et tangentes en outre à la droite *b*. Choisir le paramètre variable de façon que l'équation soit rationnelle par rapport à ce paramètre et trouver le lieu des centres de ces coniques.

2° Chacune de ces coniques coupe le cercle en un nouveau point M et touche la tangente *b* en un point N. Lieu du point de rencontre de la normale à la conique en N avec la tangente au cercle en M. Séparer sur ce lieu les arcs qui correspondent à des ellipses de ceux qui correspondent à des hyperboles.

3° Lieu des foyers de ces coniques. Construire ce lieu.

E. H.

**1220.** — Si on considère deux ellipses coaxiales, E et E', et une tangente T quelconque à la développée de E' et que l'on désigne par P et P' les pôles de T par rapport aux ellipses E et E', la perpendiculaire abaissée de P sur T et la droite PP' enveloppent chacune une ellipse.

E.-N. BARISIEN.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

13e Année. N° 10 Juillet 1903.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

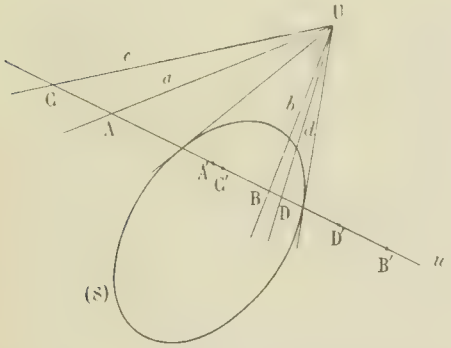
Le nouveau programme, qui a paru ces jours-ci, modifie profondément les conditions du concours d'admission aux cours préparatoires.

C'est sur le programme des matières exigées pour l'entrée à l'école polytechnique que rouleront, *dès cette année*, les examens, lesquels ne seront plus seulement oraux, mais comporteront aussi des compositions écrites (mathématiques (*), physique, composition française), ainsi qu'un dessin d'après la bosse et un croquis non coté d'une pièce de machine.

## PREMIÈRE PARTIE

### LEÇON SUR LA TRANSFORMATION DES FIGURES DANS UN PLAN PAR POLAIRES RÉCIPROQUES

1. Considérons dans le plan étudié une conique (S) que nous appellerons *conique fondamentale* ou *conique directrice* et considérons en outre une figure quelconque de ce plan composée de points et de droites. Si nous prenons la polaire de chaque point et le pôle de chaque droite de cette figure, nous aurons une nouvelle figure composée de droites et de points, que nous appellerons la *polaire réciproque* de la première; par définition, à chaque point correspond sa polaire et à chaque droite correspond son pôle.




2. Lorsqu'un point se meut sur une droite, sa polaire tourne autour du point correspondant; il en résulte qu'à des points en ligne droite correspondent des droites concourantes, et inversement qu'à des droites concourantes correspondent des points en ligne droite.

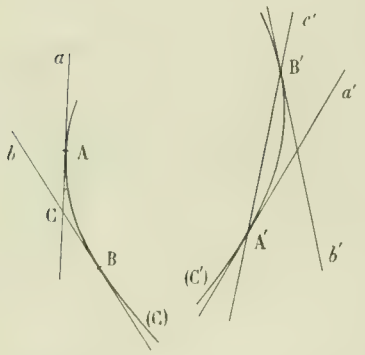
Nous allons montrer que le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite ou de quatre droites concourantes est égal au rapport anharmonique des quatre éléments correspondants.

En effet, soient U un point par lequel passent quatre droites $a$, $b$, $c$, $d$, et $u$ la polaire de ce point; les pôles de $a$, $b$, $c$, $d$ sont des points A', B', C', D', de $u$, et ces points sont conjugués des points de ren-

(*) La mécanique n'en est pas exclue.

contre de $a$, $b$, $c$, $d$ avec la droite $u$ dans une involution dont les points doubles sont les points de rencontre de $u$ avec la conique (S). Soient A, B, C, D ces points; leur rapport anharmonique est le même que celui des points A′, B′, C′, D′, puisque les deux séries correspondantes sont homographiques, et il est le même que celui des quatre rayons $a$, $b$, $c$, $d$ par définition. La propriété est donc établie.

Avant d'aller plus loin, il est bon de remarquer que si on déduit d'une figure F une autre figure F′ par le procédé indiqué, la figure F se déduira de F′ de la même façon, de telle sorte que les deux figures sont réciproques l'une de l'autre, chacune d'elles se déduisant de l'autre par le même procédé.

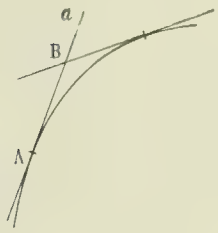



3. Proposons-nous maintenant de voir quelle est la figure que l'on peut faire correspondre à une courbe donnée (C). A cet effet envisageons d'abord la courbe (C) comme étant le support, l'enveloppe de ses tangentes; nous pourrons considérer le lieu des pôles de ces droites, nous aurons ainsi une certaine courbe (C′), et nous allons montrer que cette courbe est aussi l'enveloppe des polaires des points de (C). Pour cela, nous prendrons une tangente $b$ voisine de $a$ et qui rencontre celle-ci en C; le point C est le pôle de A′B′. Mais quand $b$ tend vers $a$, C tend vers le point de contact A de $a$ avec la courbe (C); B′ tend vers A′ et la corde A′B′ tend vers la tangente en A′; donc celle-ci est la polaire du point A. Les deux courbes sont donc réciproques l'une de l'autre : chacune d'elles est le lieu des pôles des tangentes à l'autre et l'enveloppe des polaires des points de l'autre. La courbe (C′) se nomme la *polaire réciproque* de (C).

Si nous envisageons le couple formé par la tangente $a$ et par son point de contact A, nous le désignerons sous le nom d'*élément de contact* de la courbe (C). A un élément de contact de l'une des courbes correspond un élément de contact de l'autre, mais la droite de l'un, $a$ ou $a'$, correspond au point de l'autre, A′ ou A.

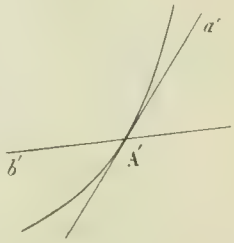
Considérons maintenant les points de rencontre de l'une des courbes, (C) par exemple, avec une droite $u$; à chacun d'eux correspond une droite passant par le point U′ correspondant de $u$, et cette droite est tangente à (C′), et réciproquement. Donc aux points de rencontre de l'une des courbes avec une droite correspondent les tangentes à l'autre menée par un point; par conséquent l'ordre de l'une est égal à la classe de l'autre.

4. Il nous reste à voir maintenant comment se transforment les divers points d'une courbe algébrique (C).




Prenons d'abord un point ordinaire A avec sa tangente $a$. Ce point est un point simple et toute droite passant en ce point y rencontre la courbe en un seul point, sauf la tangente qui y rencontre la courbe en deux points confondus.

Cette tangente est simple; donc par tout point B de cette droite on peut mener une tangente confondue avec $a$ et une seule, mais quand le point B tend vers A une nouvelle tangente tend vers $a$ et à la limite on peut mener par le point A deux tangentes confondues avec $a$.




A tout point B de $a$ correspond une sécante $b'$ passant par A′ et à l'unique tangente confondue avec $a$ correspond un point de rencontre unique confondu avec A′; le point A′ est donc un point simple. Quand B tend vers A, $b'$ tend vers la tangente en A′, une nouvelle tangente à la courbe C tend vers $a$ et une seule; donc

un nouveau point de rencontre de $b'$ avec la courbe (C') tend vers A' et un seul ; donc ce point est un point simple ordinaire.

Si le point A est un point simple d'inflexion, la tangente en ce point est double et a ses deux points de contact confondus avec le point A. Il en résulte déjà immédiatement que le point correspondant de (C'), le point A', est un point double à tangentes confondues.

Par tout point B de $a$ on peut mener deux tangentes confondues avec $a$ et quand B tend vers A une nouvelle tangente tend vers $a$ et une seule ; donc toute sécante $b'$ passant en A' y rencontre la courbe en deux points confondus et de plus quand $b'$ tend vers $a'$ il n'y a qu'un nouveau point de rencontre avec (C') qui tend vers A'. Il n'y a en outre qu'un élément de contact en A' comme il n'y en a qu'un en A ; donc le point A' est un point de rebroussement ordinaire.

Nous démontrerions de même que s'il existe sur (C) un point simple en lequel la tangente ait quatre points confondus avec la courbe, le point correspondant de (C') est un point triple où les trois tangentes sont confondues et la tangente en ce point n'y rencontre la courbe qu'en un point de plus confondu avec lui.

Une tangente double ordinaire donne deux éléments de contact en ligne droite, il lui correspond donc deux éléments de contact ayant en commun les points de contact c'est-à-dire un point double ordinaire.

Réciproquement, il est évident de même qu'à tout point double ordinaire correspond une tangente double ordinaire.

Nous ne poursuivrons pas cette étude ; il est facile dans chaque cas d'appliquer la même méthode et de transformer l'élément d'une courbe donnée (C), pourvu que cet élément ait été étudié complétement au point de vue ponctuel et au point de vue tangentiel.

**5.** Proposons-nous maintenant de trouver l'équation de la polaire réciproque d'une courbe donnée (C). Pour cela nous supposerons la conique directrice (S) donnée par son équation ponctuelle $S(x, y, z) = 0$ et aussi par son équation tangentielle $\Sigma(u, v, w) = 0$. Deux cas sont alors à distinguer, suivant que la courbe (C) est donnée par son équation ponctuelle ou par son équation tangentielle.

Dans le premier cas, soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation ponctuelle de (C) ; nous allons montrer que l'équation tangentielle de (C') est immédiate. En effet, soit $(u, v, w)$ une tangente de (C'), les coordonnées homogènes de son pôle sont $\Sigma'_u, \Sigma'_v, \Sigma'_w$, et ce point devant être sur (C), nous avons

$$f(\Sigma'_u, \Sigma'_v, \Sigma'_w) = 0 ;$$

telle est l'équation tangentielle de (C').

Dans le second cas, soit $f(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle de (C) ; c'est alors l'équation ponctuelle de (C') qui est immédiate. Car, soit $(x, y, z)$ le pôle d'une tangente à (C'), la polaire de ce point a pour équation $XS'_x + YS'_y + ZS'_z = 0$, et en exprimant qu'elle est tangente à (C), nous avons la relation

$$f(S'_x, S'_y, S'_z) = 0 ;$$

telle est l'équation ponctuelle de (C').

Ces deux résultats mettent en relief ce fait établi géométriquement que l'ordre de l'une des deux courbes est égal à la classe de l'autre.

**6.** Supposons maintenant que l'on prenne pour conique fondamentale le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

ayant pour équation tangentielle

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0;$$

alors tout point $(\alpha, \beta, \gamma)$ a pour polaire la droite

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

ou $u = \alpha$, $v = \beta$, $w = \gamma$; toute droite $(\alpha, \beta, \gamma)$ a pour pôle le point $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$. Les éléments correspondants ont les mêmes nombres pour coordonnées ; par suite deux courbes réciproques ont pour équations respectives $f(x, y, z) = 0$ et $f(u, v, w) = 0$.

Il en résulte que tout calcul géométrique est susceptible d'une double interprétation; lorsque, par une suite de calculs déterminés sur les éléments d'une figure, points et droites, on sera parvenu à l'énoncé d'une certaine proposition, il suffira de reprendre les mêmes calculs en changeant la signification de chaque élément, c'est-à-dire en remplaçant les points par les droites de mêmes coordonnées et réciproquement, pour obtenir une nouvelle proposition qu'on appelle la *corrélative* de la première. On regarde comme proposition principale celle dont l'énoncé est le plus clair, le plus aisé à formuler et à comprendre.

C'est dans ce résultat capital que consiste le *principe de dualité*.

7. Si on considère l'équation générale ponctuelle des courbes d'ordre $m$, la ligne correspondante n'a ni points doubles ni points de rebroussement; en revanche, elle a des tangentes doubles et des points d'inflexion, c'est-à-dire qu'elle a des tangentes doubles à points de contact distincts et des tangentes doubles à points de contact confondus. Ce sont là les singularités ponctuelles ordinaires.

La transformation de figures que nous venons d'étudier nous apprend de même que si on envisage l'équation tangentielle générale des courbes de classe $m$, la ligne correspondante n'a ni tangentes doubles ordinaires ni tangentes inflexionnelles, mais qu'elle a des points doubles et des points de rebroussement ordinaires.

Pour cette raison, nous appellerons les tangentes doubles, les tangentes inflexionnelles, les points doubles et les points de rebroussement, les *singularités ordinaires* des courbes algébriques.

Or l'étude du nombre des tangentes menées par un point à une courbe algébrique d'ordre $m$, et celle du nombre des points d'inflexion nous ont conduits à établir deux formules fondamentales connues sous le nom de *formules de Plucker*; l'application du principe de dualité nous en donne immédiatement deux autres applicables aux lignes de classe $\mu$. Désignons alors par $m$, $\mu$, l'ordre et la classe d'une courbe algébrique, $\delta$ le nombre des points doubles et $\rho$ le nombre des points de rebroussement, supposés ordinaires; soient en outre $t$ le nombre des tangentes doubles, $i$ le nombre des points d'inflexion; supposons essentiellement toutes ces singularités ordinaires et supposons en outre qu'il n'y en ait pas d'autres; nous aurons alors

$$\mu = m(m-1) - 2\delta - 3\rho,$$
$$i = 3m(m-1) - 6\delta - 8\rho,$$

puis, par application du principe de dualité,

$$m = \mu(\mu-1) - 2t - 3i,$$
$$\rho = 3\mu(\mu-1) - 6t - 8i.$$

Si ces égalités étaient indépendantes, elles donneraient $\delta$, $\rho$, $t$ et $i$ en fonction de $m$ et de $\mu$; mais elles ne sont pas indépendantes : les deux premières combinées entre elles donnent

$$3\mu - i = 3m - \rho$$

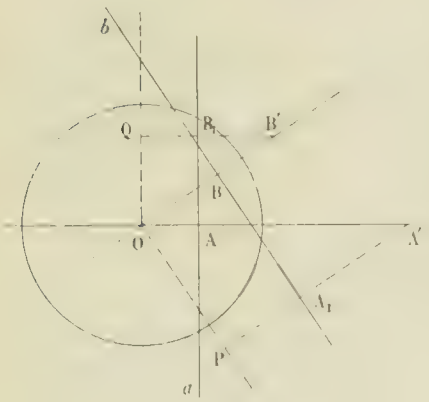
et cette combinaison dérive aussi des deux dernières. Donc les quatre égalités envisagées se réduisent à trois : les deux premières de chaque couple et celles que nous venons d'obtenir.

8. Dans la pratique, on emploie habituellement comme conique fondamentale un cercle ordinaire ;

alors, indépendamment des propriétés descriptives de la transformation que nous avons étudiées, il y a un certain nombre de propriétés métriques importantes que nous allons signaler. Nous avons déjà vu que le rapport anharmonique se conserve toujours, ainsi que toutes les propriétés qui en dérivent. Appelons O le centre du cercle et R son rayon. Ici la droite $a$ est perpendiculaire au rayon OA′ qui joint le point O au point correspondant de $a$ ; en outre, en appelant A le pied de la perpendiculaire OA′ sur $a$, on a $OA.OA' = R^2$.

Telles sont les propriétés métriques évidentes de la transformation. Nous allons y joindre un théorème connu sous le nom de théorème de Salmon et dont voici l'énoncé : *A′ et B′ étant les pôles de deux droites $a$ et $b$ par rapport à un cercle, $A_1$ et $B_1$, leurs projections respectives sur $b$ et $a$, on a la relation*

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{A'A_1}{B'B_1}.$$




Menons en effet par O deux parallèles à $b$ et $a$, OP et OQ, et abaissons de A′ et B′ des perpendiculaires sur ces deux droites. Les deux triangles rectangles OPA′ et OQB′ sont semblables, comme ayant les angles en A′ et B′ égaux ; nous avons donc

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{PA'}{QB'}, \quad \text{ou} \quad \frac{OA'}{OB'} = \frac{PA_1 + A_1A'}{QB_1 \quad B_1B'},$$

ou enfin

$$OA'.QB_1 + OA'.B_1B' = OB'.PA_1 + OB'\ A_1A',$$

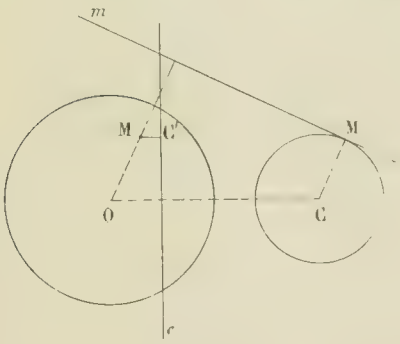
mais $QB_1 = OA$, $PA_1 = OB$ et $OA'.OA = OB'.OB$ ;

donc finalement $OA'.B_1B' = OB'.A_1A'$.

C'est la relation annoncée.

**9.** Ce théorème va nous permettre d'étudier sans peine les courbes polaires réciproques des cercles du plan par rapport à un cercle fondamental pris pour conique directrice.

Soient O le cercle choisi pour conique directrice et C le cercle à transformer. Menons une tangente quelconque au cercle C, et prenons son pôle M′ par rapport au cercle O ; soient en outre $c$ la polaire de C, M′C′ la perpendiculaire abaissée de M′ sur $c$ et CM le rayon de contact de $m$. Nous avons, d'après le théorème de Salmon, $\frac{OC}{OM'} = \frac{CM}{M'C'}$, ou $\frac{OM'}{M'C'} = \frac{OC}{CM} = C^{te}$.




Donc le lieu du point M′ est une conique ayant pour foyer le point O et pour directrice adjointe $c$ ; l'excentricité de cette conique est $e = \frac{OC}{CM}$ ; si donc OC est plus grand que CM la conique est une hyperbole, si OC est plus petit que CM, cette conique est une ellipse, et si $OC = CM$, c'est une parabole. La nature de la conique transformée dépend donc de la position du point O par rapport au cercle C. Cela était évident *a priori* ; si le point O est extérieur au cercle C, on peut mener de ce point deux tangentes au cercle C, dont les pôles sont à l'infini et la conique ayant deux points à l'infini est une hyperbole ; si le point O est intérieur au cercle C, la conique n'a pas de points à l'infini, c'est une ellipse ; si enfin le point O est sur le cercle, sa polaire est à l'infini et la conique, tangente à la droite de l'infini, est une parabole.

Il serait facile d'ailleurs d'étudier les transformées des divers cercles du plan à l'aide des propriétés générales de la tranformation réciproque sans faire appel au théorème de Salmon.

**10**. Il nous reste maintenant à indiquer comment on transforme une propriété de figures planes et à donner quelques exemples.

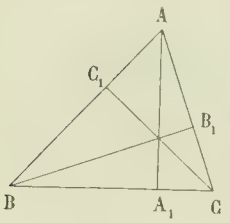
Pour éviter toute erreur ou tout oubli, on commence par former un tableau complet très détaillé de tous les éléments de la figure qui interviennent dans l'énoncé de la propriété à transformer et on place les éléments correspondants dans la figure nouvelle en observant avec soin les relations qui existent entre eux. Quand cela est fait, il n'y a plus qu'à énoncer la nouvelle propriété.

Il importe toutefois de n'appliquer la méthode qu'aux propriétés descriptives des figures ou à celles qui ne reposent que sur des relations métriques très simples, susceptibles d'interprétation immédiate dans la nouvelle figure, comme nous l'avons montré antérieurement. Toutes les relations métriques sont susceptibles d'être transformées et interprétées, mais elles ne conduisent le plus souvent qu'à des théorèmes obscurs et compliqués, inutiles à considérer.

Pour terminer, traitons quelques exemples simples.

1° *Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.*

Aux trois côtés BC, CA et AB du triangle donné, correspondent les trois sommets A′, B′, C′ du triangle polaire réciproque ; à la hauteur $AA_1$ correspond un point du côté B′C′ tel que le rayon qui joint le point O à ce point soit perpendiculaire à OA′. Le théorème corrélatif est dès lors évident : *si on joint un point* O *du plan d'un triangle aux trois sommets de ce triangle et qu'on élève à chaque fois par le point* O *une perpendiculaire sur le rayon ainsi obtenu, les trois points de rencontre de ces perpendiculaires avec les côtés opposés sont en ligne droite.*




2° *Lorsque deux tangentes à un cercle se coupent sous un angle constant, leur point de rencontre décrit un cercle concentrique au cercle proposé.*

Le cercle proposé se transforme en une conique ayant le point O pour foyer ; le second cercle se transforme en une autre conique ayant aussi le point O pour foyer et même directrice que la précédente. Quant aux deux tangentes au premier cercle, elles deviennent deux points de la première conique tels que la corde qui les joint soit vue du point O sous un angle donné. Le théorème corrélatif du théorème donné consiste en ce que cette corde vue du foyer sous un angle fixe enveloppe une seconde conique ayant même foyer et même directrice que la première.

3° *Lorsque deux droites rectangulaires tournent autour de deux points fixes, le lieu de leur point de rencontre est un cercle qui passe aux deux points.*

Le théorème corrélatif est immédiat : *lorsque les deux extrémités d'un segment glissent sur deux droites fixes de façon que ce segment soit vu d'un point fixe,* O, *sous un angle droit, la droite qui le porte enveloppe une conique dont le point* O *est un foyer.*

E. H.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1153**. — *On considère un ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

1° *Montrer qu'il y a trois séries de sphères doublement tangentes à cet ellipsoïde et que pour une seule*

*les plans des deux sections planes communes sont réels. Trouver le lieu des centres des sphères de cette série qui ont un rayon donné.*

2° *Soit* $\Sigma$ *la sphère variable qui décrit cette série. Trouver le lieu des points-sphères du faisceau linéaire déterminé par* $\Sigma$ *et par le plan polaire par rapport à l'ellipsoïde d'un point fixe* M $(x_0, y_0, z_0)$.

3° *Ce lieu est une quadrique. Discuter cette quadrique d'après la position du point* M *dans l'espace, et trouver le lieu des points* M *pour lesquels elle se réduit à un cône.*

**1.** Soit $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-\rho^2=0$ l'équation d'une sphère ; nous écrirons que cette sphère est doublement tangente à l'ellipsoïde en écrivant que dans le faisceau formé par l'ellipsoïde et la sphère il y a un couple de plans. Nous savons en effet que lorsque deux quadriques sont doublement tangentes elles se coupent suivant deux courbes planes ou bien ont une génératrice commune ; mais, dans le cas actuel, si les quadriques avaient une génératrice commune, cette génératrice étant imaginaire, elles auraient aussi en commun la génératrice imaginaire conjuguée ; cela ferait deux génératrices communes d'un même système ; les quadriques auraient donc encore deux génératrices communes de l'autre système ; par suite, elles se couperaient encore suivant deux courbes planes.

Nous avons donc à exprimer que pour une certaine valeur de $\lambda$ la forme quadratique

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-\rho^2$$

est une somme de deux carrés ou un produit de deux facteurs ; il faut alors écrire que les quatre dérivées partielles se réduisent à deux ou que les quatre équations obtenues en égalant ces dérivées à zéro représentent une droite ; or ces équations sont

$$\frac{\lambda x}{a^2}+x-\alpha=0,$$

$$\frac{\lambda y}{b^2}+y-\beta=0,$$

$$\frac{\lambda z}{c^2}+z-\gamma=0,$$

$$-\lambda-\alpha(x-\alpha)-\beta(y-\beta)-\gamma(z-\gamma)-\rho^2=0;$$

les trois premières ne contiennent chacune qu'une inconnue $x$, $y$, ou $z$ ; le système ne peut donc se réduire à deux équations que si l'une des trois premières est identiquement nulle. Annulons alors la première ; nous aurons $\lambda=-a^2$, $\alpha=0$ ; par suite, $y=\frac{b^2\beta}{b^2-a^2}$, $z=\frac{c^2\gamma}{c^2-a^2}$, puis $y-\beta=\frac{a^2\beta}{b^2-a^2}$, $z-\gamma=\frac{a^2\gamma}{c^2-a^2}$ et la dernière équation devient

$$\frac{\beta^2}{b^2-a^2}+\frac{\gamma^2}{c^2-a^2}-1+\frac{\rho^2}{a^2}=0;$$

elle donne le lieu des centres des sphères de la série envisagée qui ont un rayon donné et montre que cette série dépend de deux paramètres arbitraires. Les deux plans des courbes planes suivant lesquelles se coupent l'ellipsoïde et la sphère sont donnés par l'équation

$$(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-\rho^2-a^2\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=0;$$

et leurs directions, par l'équation

$$(b^2-a^2)\frac{y^2}{b^2}+(c^2-a^2)\frac{z^2}{c^2}=0,$$

et nous voyons ainsi que ces plans sont toujours imaginaires. Pour $\rho<a$ le lieu des centres est une ellipse imaginaire du plan des $yz$ ; pour $\rho=0$, c'est la focale ; enfin, pour $\rho>a$, c'est une ellipse réelle, et il y a des sphères réelles correspondantes. Si on se donne arbitrairement le centre de la sphère

$(0, \beta, \gamma)$, $\rho^2$ est toujours positif et plus grand que $a^2$; la sphère correspondante est réelle et parfaitement déterminée. D'autre part, on a identiquement

$$x^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \rho^2 - a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) \equiv (b^2 - a^2)\left(\frac{y+y_1}{b}\right)^2 + (c^2 - a^2)\left(\frac{z+z_1}{c}\right)^2;$$

donc, pour tous les points de la sphère, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ est positif; par conséquent l'ellipsoïde est tout entier à l'intérieur de la sphère, sauf aux deux points de contact qu'il a avec la sphère.

Si on annule identiquement la seconde équation, on a $\lambda = -b^2$, $\beta = 0$, et on obtient une nouvelle série de sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde dont l'équation générale est

$$(x-\alpha)^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 - \rho^2 = 0,$$

avec la relation

$$\frac{\alpha^2}{a^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2 - b^2} - 1 + \frac{\rho^2}{b^2} = 0;$$

cette relation montre que le lieu des centres des sphères de cette série qui ont un rayon donné $\rho$ est une hyperbole du plan des $zx$. Toutes les valeurs de $\rho^2$ sont acceptables, même celles qui sont négatives; il y a donc des sphères de cette série qui sont imaginaires de première espèce. Pour $\rho^2 = 0$, on retrouve l'hyperbole focale, comme on devait d'ailleurs s'y attendre.

Les plans des courbes planes qui correspondent aux sphères de cette série ont pour directions

$$x^2 + z^2 - b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 0;$$

ils sont toujours réels.

Si on annule identiquement la dernière équation, on a $\lambda = -c^2$, $\gamma = 0$, et on obtient une troisième série de sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde dont l'équation générale est

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 - \rho^2 = 0,$$

avec la relation

$$\frac{\alpha^2}{a^2 - c^2} + \frac{\beta^2}{b^2 - c^2} - 1 + \frac{\rho^2}{c^2} = 0.$$

Le lieu des centres des sphères de cette série est donc une ellipse; cette ellipse est réelle si $\rho < c$, imaginaire si $\rho > c$ et réduite à un point pour $\rho = c$. Pour $\rho = 0$, on retrouve l'ellipse focale réelle. Si on se donne $\alpha$ et $\beta$, $\rho^2$ a une valeur parfaitement déterminée, moindre que $c^2$, mais qui peut être négative; par conséquent, à tout point du plan des $xy$ correspond une sphère unique ayant son centre en ce point et doublement tangente à l'ellipsoïde, mais cette sphère peut être imaginaire de première espèce; celles qui sont réelles ont leurs centres à l'intérieur de l'ellipse focale.

Les plans des courbes communes à l'ellipsoïde et aux sphères de cette série sont toujours imaginaires; ils ont pour directions

$$x^2 + y^2 - c^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0.$$

Quelques-uns de ces résultats sont évidents quand on connaît bien la théorie des plans cycliques. On sait qu'il y a trois couples de plans cycliques passant par les trois axes de l'ellipsoïde; un seul de ces couples est réel, celui qui passe par l'axe moyen.

Au surplus, les plans des courbes planes communes à l'ellipsoïde et à une des sphères qui lui sont doublement tangentes, sont deux plans cycliques associés; par conséquent, il est évident *a priori* qu'il y a trois séries de sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde et que, pour une seule, les plans des courbes planes communes sont réels.

**2.** Considérons les sphères de la seconde série, qui peuvent, d'après ce que nous avons vu, prendre des rayons de grandeurs quelconques et qui coupent toujours l'ellipsoïde suivant deux cercles réels ou imaginaires, mais situés dans des plans réels. Leur équation générale est

$$(x-\alpha)^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 - \rho^2 = 0,$$

avec la condition

$$\frac{\alpha^2}{a^2-b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2-b^2}-1+\frac{\rho^2}{b^2}=0.$$

Le faisceau linéaire déterminé par l'une de ces sphères et par le plan polaire du point $(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation générale

$$(x-\alpha)^2+y^2+(z-\gamma)^2-\rho^2+\mu\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1\right)=0;$$

nous aurons le lieu du centre de l'une des sphères de rayon nul qui fait partie de ce faisceau en annulant les quatre dérivées partielles de cette fonction et en éliminant $\alpha$, $\beta$, $\rho^2$ et $\mu$ entre les équations ainsi obtenues et la relation qui donne $\rho^2$. Ce calcul nous donne d'abord

$$2(x-\alpha)+\mu\frac{x_0}{a^2}=0,$$

$$2y+\mu\frac{y_0}{b^2}=0,$$

$$2(z-\gamma)+\mu\frac{z_0}{c^2}=0,$$

et

$$-2\alpha(x-\alpha)-2\gamma(z-\gamma)-2\rho^2+\mu\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-2\right)=0;$$

puis la seconde de ces équations nous donne $\mu=-2b^2\dfrac{y}{y_0}$, la première et la troisième donnent ensuite

$$\alpha=x-\frac{b^2yx_0}{a^2y_0}. \qquad \gamma=z-\frac{b^2yz_0}{c^2y_0}.$$

En remplaçant $\rho^2$ par sa valeur et ensuite $\alpha$, $\gamma$ et $\mu$, nous avons de suite l'équation du lieu.

Nous ne nous arrêterons pas à la réduction de cette équation qui se fait sans aucune difficulté et qui nous conduit finalement à

$$\frac{(a^2y_0x-b^2x_0y)(yx_0-xy_0)}{a^2y_0^2(a^2-b^2)}+\frac{(c^2y_0z-b^2z_0y)(yz_0-zy_0)}{c^2y_0^2(c^2-b^2)}+\frac{y}{y_0}\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-2\right)+1=0.$$

Deux vérifications nous apparaissent immédiatement : la première est fournie par la section de la quadrique par le plan $y=0$ ; cette section est bien, comme cela devait être, l'hyperbole focale de l'ellipsoïde, car il est évident que si on part d'une sphère de rayon nul de la série, son centre est justement l'un des points du lieu, c'est-à-dire l'un des points de Poncelet du faisceau correspondant ; la deuxième vérification consiste en ce que, pour $y_0=0$, la quadrique se réduit à deux plans confondus avec le plan $y=0$ ; il est évident géométriquement aussi que le lieu ne pouvait contenir dans ce cas que des points du plan $y=0$, puisque la perpendiculaire abaissée alors du centre de la sphère sur le plan polaire est tout entière contenue dans le plan $y=0$.

3. Géométriquement d'ailleurs, il est évident que le lieu est une quadrique ayant le plan polaire pour plan de symétrie ; car toute perpendiculaire à ce plan rencontre le plan des $xz$ en un point qui est le centre d'une sphère parfaitement déterminée de la série, et, pour le faisceau linéaire correspondant, il y a deux points de Poncelet symétriques par rapport au plan polaire, qui est toujours par définition le plan radical du faisceau. Ces deux points sont confondus dans le plan quand la sphère lui est tangente ; l'un d'eux est dans le plan des $xz$, quand la sphère a un rayon nul.

Pour reconnaître la nature de cette quadrique, nous remarquons que le plan $y=0$ coupe la quadrique suivant une hyperbole ; il nous suffira dès lors de chercher les points de rencontre de la quadrique avec le diamètre conjugué du plan $y=0$ pour être fixé sur la nature de cette quadrique. En effet cette quadrique contenant une hyperbole, ne peut être qu'un hyperboloïde à une ou à deux nappes,

ou un cône réel, ou un paraboloïde hyperbolique, ou un cylindre hyperbolique. Dans le premier cas, les points de rencontre avec le diamètre sont réels ; dans le second ils sont imaginaires ; dans le troisième, ils sont confondus ; dans le quatrième cas, l'un d'eux est à l'infini, et, dans le cinquième, ils sont tous deux à l'infini. Ces divers cas sont donc parfaitement séparés.

Or le diamètre conjugué du plan $y = 0$ a pour équation $f'_x = 0$, $f'_z = 0$ ; on trouve aisément de cette façon $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$. En appelant $\rho$ la valeur commune de ces rapports, l'équation qui donne les $\rho$ des points de rencontre avec la quadrique est

$$\rho^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) - 2\rho + 1 = 0;$$

elle n'a jamais de racine infinie.

Si $1 - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right)$ est positif, les deux points de rencontre sont réels, la surface est un hyperboloïde à une nappe ; ce qui arrive quand le point $(x_0, y_0, z_0)$ est à l'intérieur de l'ellipsoïde.

Si $1 - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right)$ est négatif, les deux points de rencontre sont imaginaires, la surface est un hyperboloïde à deux nappes ; ce qui arrive quand le point $(x_0, y_0, z_0)$ est à l'extérieur de l'ellipsoïde.

Enfin, quand le point $(x_0, y_0, z_0)$ est sur l'ellipsoïde, les deux points de rencontre avec la quadrique sont confondus, et cette quadrique est un cône. Comme d'ailleurs, dans ce cas, $\rho = 1$, le sommet du cône est au point $(x_0, y_0, z_0)$ lui-même.

J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

Assez bonnes solutions : MM. Parrod, à Vesoul ; R. Bouvaist ; M. Treillou.

---

# CONCOURS DE 1902

## CONCOURS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

*Mathématiques* (Paris et Départements).

**1221**. — On donne une sphère $\Sigma$ de centre P et un paraboloïde hyperbolique $\Pi$ dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2(x - h) = 0$$

avec

$$h = -\frac{p - q}{4}.$$

Par le point P on mène un plan Q perpendiculaire à une génératrice rectiligne G du paraboloïde $\Pi$ et rencontrant cette droite au point $g$.

Soit $\Gamma$ le cercle situé dans le plan Q, ayant pour centre le point $g$ et coupant à angle droit la sphère $\Sigma$.

1° Trouver l'équation de la surface S engendrée par le cercle $\Gamma$ quand la droite G décrit le paraboloïde $\Pi$.

2° L'équation de cette surface est de la forme

$$(x^2 + y^2 + z^2)x + Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

les coefficients A, A', A'' étant liés par une relation.

3° Trouver toutes les droites qui peuvent être placées sur la surface S.

4° Montrer que la surface S admet dix familles de sections circulaires ; les plans des cercles d'une même famille se coupent suivant une même droite.

*(25 mai, de 8 h. 1/2 à 4 h. 1/2.)*

### *Physique* (Paris).

I. — Electromètres.

II. — **1222.** — On a deux condensateurs C et C′ ; la capacité du premier est 1 microfarad, celle du second $\frac{1}{2}$ de microfarad ; l'épaisseur du diélectrique séparant les deux armatures est la même et, par suite, ils peuvent supporter une même différence de potentiel maxima E, qui est de 1 000 volts.

On demande d'évaluer en dynes par centimètre carré l'augmentation maxima de pression que pourrait produire la décharge de ces condensateurs dans un litre d'air pris à 0° et sous la pression de 76 centimètres de mercure et maintenu à volume constant :

1° quand on les réunit en parallèle (en batterie) ;

2° quand on les réunit en série (en cascade).

On admettra que toute la chaleur produite par la décharge peut être communiquée à l'air, dont la chaleur spécifique à volume constant est 0,17.

(27 mai, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.)

### *Chimie* (Paris).

I. — Dissociation. Equilibres.

II. — **1223.** — On chauffe une solution sulfurique de sulfate de nitrosyle additionnée d'une quantité suffisante de sulfate d'ammoniaque. Le gaz qui se dégage est conduit dans un tube chauffé où il est en contact avec une nacelle remplie de calcium. A la fin de l'expérience, le contenu de la nacelle est repris par un excès d'eau qui dégage alors un volume de gaz de 5$^{lit}$,57. L'alcalinité de la solution, déterminée par un titrage à l'acide sulfurique, exige pour la neutralisation 450$^{cc}$ d'une solution contenant une molécule d'acide par litre.

1° Exposer la suite des réactions.

2° Déterminer le poids du calcium avant l'expérience.

3° Calculer le volume gazeux absorbé par le calcium.

4° Fixer le poids de sulfate de nitrosyle contenu dans l'acide sulfurique.

5° Déterminer la composition qualitative et quantitative des mélanges gazeux qui pourraient être absorbés par une solution sulfurique concentrée pour qu'elle renfermât la même quantité de sulfate de nitrosyle.

L'acide sulfurique contient l'eau nécessaire aux réactions. Ca = 40 ; S = 32.

(29 mai, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.)

---

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE

### *Mathématiques.*

**1224.** — Deux points P, $P_1$, rapportés à un système d'axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$, ont pour coordonnées $a$, $b$, $c$ et $a_1$, $b_1$, $c_1$. De ces points partent respectivement deux droites [D] et [$D_1$] ayant pour cosinus directeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, et $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$. L'axe des $z$ est vertical.

Deux points pesants, placés d'abord en P et $P_1$, sont abandonnés à eux-mêmes, au même instant, et descendent sur les droites [D] et [$D_1$], sur lesquelles ils occupent, au bout du temps $t$, les positions M et $M_1$.

I. — Exprimer les coordonnées des points M et $M_1$ en fonction du temps.

Les masses des deux points étant $\mu$ et $\mu_1$, déterminer le mouvement de leur centre de gravité G.

En supposant $c_1 = c$, $\gamma_1 = \gamma$, trouver à quelles conditions doivent satisfaire $\alpha$, $\alpha_1$, $\beta$, $\beta_1$, et quelle doit être la valeur du rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$ pour que G décrive une droite verticale.

II. — Ces dernières conditions étant remplies, former l'équation de la surface lieu de la droite $MM_1$, quand le temps varie.

Mettre en évidence les génératrices rectilignes de cette surface.

Calculer les coordonnées de son sommet.

III. — Le mètre étant pris pour unité de longueur, on suppose que l'on ait :

$$a = b = 0, \quad c = 1, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = 1, \quad \alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = 0, \quad \alpha_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}.$$

Dans ce cas particulier, calculer le rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$ de telle sorte que G parcoure une droite verticale : calculer en outre sa vitesse $v$ à l'instant où il vient rencontrer l'axe des $y$, ainsi que la durée T de sa chute jusqu'à cet instant. Ces valeurs seront calculées en secondes pour le temps, en mètres à la seconde pour la vitesse, en prenant 9,8 pour valeur de l'accélération due à la pesanteur.

N. B. — Il est bien entendu qu'on ne tient aucun compte du frottement, ni de la résistance de l'air dans le mouvement des points M et $M_1$.

*(2 juin, de 7 h. à 11 h.)*

### *Physique et Chimie.*

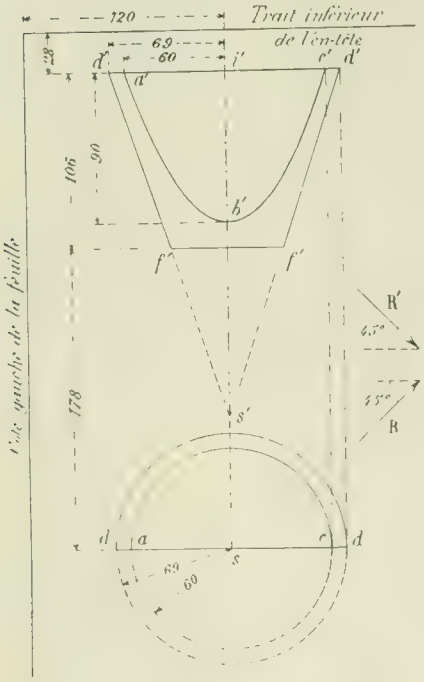
*Physique.* — I. La Loupe. — II. Détermination de l'équivalent mécanique de la calorie par les expériences de Joule sur le frottement des liquides sur les solides.

*Chimie.* — Préparation et purification, composition, caractères et usages de l'eau oxygénée.

*(2 juin, de 2 h. à 5 h.)*

### *Épure.*

**1225.** — Un tronc de cône de révolution a son axe I'S' vertical. Le solide compris entre ses deux bases $d'd'$ et $f'f'$ est évidé en forme de paraboloïde de révolution qui a le même axe que le cône, et dont la parabole méridienne est $a'b'c'$. La génératrice $d'f'$ du tronc de cône est parallèle à la tangente en $c'$ à la parabole.




Ces conditions et les cotes inscrites en millimètres sur le croquis ci-contre suffisent pour déterminer les données. On suppose que ce solide creux est coupé par le plan méridien de front $dsd$, et que la moitié située en arrière subsiste seule.

Cela posé, on admet que le solide restant est éclairé par des rayons lumineux parallèles entre eux et à la direction R, R' des projections de l'une des diagonales d'un cube dont deux faces sont parallèles aux plans de projection.

On demande :

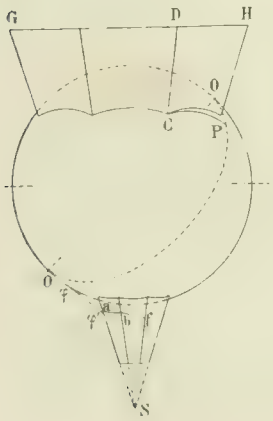
I. — de déterminer les ombres portées dans l'intérieur du paraboloïde : 1° par le demi-cercle de base supérieure $ac$, $a'c'$ ; 2° par l'arc de parabole $a'b'$ ;

II. — de tracer les ombres portées par le solide sur un mur de front supposé indéfini, et situé à 103 millimètres en arrière de l'axe.

On emploiera les traits noirs pour tracer les parties vues; les points ronds noirs pour les parties cachées; les traits rouges pour les constructions relatives aux points remarquables qu'on désignera par $m$, $m_1$, ..., etc., et aux tangentes qu'on désignera par les lettres $t$, $t_1$, ..., etc. Les parties dans l'ombre seront couvertes par des hachures.

*(4 juin, de 7 h. à 11 h.)*

### *Lavis.*




Exécuter, à l'encre de Chine, à teintes plates ou à teintes fondues (à volonté), le lavis du solide représenté ci-contre en projection verticale. Il est formé par l'ensemble d'une sphère et d'une pyramide octogonale régulière ; l'axe de la pyramide est vertical et passe par le centre de la sphère ; les deux faces SG et SH sont perpendiculaires au plan vertical. Les surfaces seront supposées dépolies.

CP. Ombre portée par l'arête CD sur la sphère.

OPQ. Séparatrice d'ombre de la sphère.

*abf.* Ombre portée par la sphère sur la pyramide.

*(4 juin, de 2 h. à 4 h.)*

### *Calcul trigonométrique.*

Dans un triangle on donne deux côtés $b = 482^m,76$, $c = 674^m,37$, et l'angle compris $A = 35° 42' 12''$.

Calculer : 1° le côté $a$ et les angles B et C à l'aide des formules ordinaires :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A, \qquad a = \frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}.$$

2° la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet A sur le côté opposé $a$.

3° la distance du pied de cette perpendiculaire au sommet C.

*(4 juin, de 1 h. à 5 h.)*

---

## ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

### *Mathématiques.*

**1226.** — On considère les deux surfaces du second degré (P), (Q), définies en coordonnées rectangulaires par les équations

$$(P) \qquad y^2 - zx - a^2 = 0,$$

$$(Q) \qquad 2y^2 - x^2 - zx - ay = 0,$$

où $a$ désigne une constante. Soit (C) la courbe d'intersection de ces deux surfaces.

1° Former les équations des projections orthogonales de cette courbe (C) sur le plan des $xy$ et sur le plan des $zx$. Construire ces courbes.

2° Considérant, en particulier, la projection de (C) sur le plan des $zx$, on déterminera l'aire comprise entre l'axe des $x$, la branche supérieure de la courbe et les droites qui, dans ce plan, ont pour équations

$$z = a, \qquad x = a\sqrt{3}.$$

3° Soit M un point de (C) ; par ce point passent deux génératrices rectilignes de la surface (P), qui rencontrent la courbe (C) en deux points $M_1$, $M_1'$ autres que M. Quel est le lieu (R) de la droite $M_1M_1'$ quand le point M décrit la courbe (C) ? De quoi se composent les intersections de la surface (R) avec chacune des surfaces (P), (Q) ?

4° Par le point $M_1$, précédemment défini, passe une génératrice de (P), autre que la droite $M_1M$ ; soit $M_2$ le point d'intersection, autre que $M_1$, de cette génératrice et de la courbe (C) ; par le point $M_2$ passe une génératrice de (P), autre que la droite $M_2M_1$ ; soit $M_3$ le point d'intersection, autre que $M_2$, de cette génératrice et de la courbe (C) ; on continue de la même façon... Démontrer que la ligne polygonale $MM_1M_2\ldots$ se ferme et qu'il en est de même de la ligne polygonale obtenue par la même construction en remplaçant simplement le point $M_1$ par le point $M_1'$.

*(15 juin, de 8 h. à 2 h.)*

### *Physique.*

I. — Un thermomètre à mercure étant construit et sa tige calibrée, comment achève-t-on son étude, et comment s'en sert-on pour déterminer une température ?

II. — **1227.** — Deux surfaces sphériques de centre O ont respectivement pour rayons un centimètre et un grand nombre de centimètres. Elles sont conductrices et portent des charges électriques M et $-$M ($M = 10^{-8}$ coulombs).

1° Prenant pour origine des potentiels le potentiel de la sphère extérieure, on demande quel est le potentiel sur la petite sphère, quel est le potentiel à un mètre du centre, et quelle est l'énergie accumulée dans le condensateur formé par les deux sphères.

2° Un corpuscule portant une charge $\mu = 10^{-19}$ coulombs, constitue un élément de surface de la petite sphère ; quelle est la valeur de la force qui le sollicite à se détacher, et à quelle force serait-il soumis s'il se trouvait à une distance finie mais très petite de cette surface ? Ce corpuscule s'étant détaché sans vitesse initiale, et se déplaçant ensuite suivant le rayon, on demande de calculer à un pour cent près le travail effectué par les forces électriques quand le corpuscule sera arrivé à un mètre du centre, et l'on demande quelle sera alors sa vitesse, sachant que sa masse est $m = 10^{-22}$ grammes.

3° Supposant maintenant que le corpuscule subisse une résistance proportionnelle à la vitesse, on écrira d'abord l'équation qui permettrait de trouver le mouvement de ce corpuscule, dans l'hypothèse où l'on pourrait négliger le produit de sa masse par son accélération devant les forces mises en jeu. On calculera ensuite sa vitesse à un mètre du centre, sachant que si ce corpuscule était lancé avec une vitesse de un centimètre par

seconde dans la direction des lignes de forces d'un champ uniforme de un volt par centimètre, il continuerait à se déplacer d'un mouvement rectiligne et uniforme.

(*16 juin, de 8 h. à 2 h.*)

## QUESTION PROPOSÉE

**1228.** — D'un point P on mène les six normales à un ellipsoïde et on considère les plans tangents à l'ellipsoïde aux pieds de ces normales.

1° Trouver l'enveloppe des plans coupant les plans tangents suivant six droites tangentes à une conique (S). C'est une surface de quatrième classe dont on indiquera des droites et plans tangents remarquables. Trouver le lieu des centres des coniques (S).

2° Pour qu'une conique (S) se trouve sur un cône donné ayant pour sommet le centre O de l'ellipsoïde, il faut que le point P soit sur une certaine surface. Trouver dans ces conditions l'enveloppe du plan (Q) de la conique, le lieu de son centre, le lieu de ses asymptotes.

3° Le plan tangent au pied $P_1$ de l'une des normales est coupé par les cinq autres plans tangents suivant cinq droites qui touchent une parabole, dont la directrice est la projection de OP sur son plan. Montrer que lorsque le point P se déplace sur la normale en $P_1$ à l'ellipsoïde, cette parabole reste fixe.

4° Trouver toutes les coniques (S) qui sont des paraboles ; donner une génération de leurs plans et montrer que la définition du 3° s'applique aux directrices de ces paraboles. Les directrices sont situées sur une surface du quatrième ordre qui a une droite triple.

5° Toutes les paraboles sont situées sur une surface ($\Sigma$) du quatrième ordre dont on cherchera les génératrices rectilignes. Montrer que les sections planes de ($\Sigma$) possèdent en général trois rebroussements et trouver le lieu des points de rebroussement quand le plan de la section varie. Quels sont les plans qui donnent des cubiques, des coniques ? Examiner en particulier les plans perpendiculaires à OP.

6° Réciproquement, étant donné un plan (Q), le lieu des points P tels que les six droites d'intersection de ce plan par les plans tangents aux pieds des six normales issues de P soient tangentes à une conique est un hyperboloïde équilatère qui contient la droite $\Delta$, perpendiculaire au plan donné mené par son pôle. Le lieu des centres des coniques est une conique. Que deviennent ces résultats lorsque le plan donné passe par le centre O de l'ellipsoïde ?

VASNIER.

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE CENTRALE (1902, 2e Session.)

### Géométrie analytique et Cinématique.

**1156.** — *La lettre $t$ représentant un paramètre réel arbitraire, on considère le point* M *du plan dont les coordonnées rectangulaires sont :*

$$x = \frac{t^2+1}{2t}, \qquad y = \frac{2t-1}{t^2}.$$

1° *Etudier les variations de $x$, et aussi celles de $y$, lorsque $t$ croît de $-\infty$ à $+\infty$.*

2° *Considérant la ligne* S, *lieu du point* M, *donner la formule du coefficient angulaire de la tangente en fonction de la valeur $t_0$ du paramètre qui détermine le point de contact.*

*Appliquer cette formule aux points remarquables : point d'inflexion, point de rebroussement. — Asymptotes de la ligne* S. — *Tracer la courbe* S.

3° *La lettre $t$ représentant le temps, on demande de discuter la vitesse du point* M *sur la trajectoire* S, *pour les valeurs de $t$ supérieures à* 1/2.

**1.** $x$ et $y$ sont des fonctions de la variable $t$, définies pour toutes valeurs de $t$, sauf 0 et admettant des dérivées :

$$x' = \frac{t^2 - 1}{2t^2} \qquad y' = \frac{-2(t-1)}{t^3}.$$

Le tableau suivant indique les variations de $x$ et de $y$, quand $t$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | $-\infty$ | croît | $-1$ (*Max.*) | décroît | $-\infty$ \| $-\infty$ | décroît | $1$ (*Min.*) | croît | $-\infty$ |
| $y'$ | | | $-$ | | | | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $0$ | | décroît | | $-\infty$ \| $-\infty$ | croît | $1$ (*Max.*) | décroît | $0$ |

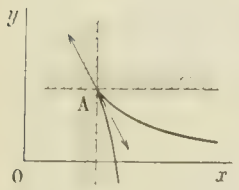
**2.** Le coefficient angulaire de la tangente en un point est donné par la formule

$$m = \frac{y'}{x'} = \frac{-4}{t(t+1)}.$$

Pour $t = \pm\infty$, on aura $m = 0$; pour $t = -1$ (maximum de $x$, $x = -1$, $y = -3$) $m = \infty$; enfin pour $t = 0$, $m = \infty$.

Un point d'inflexion correspond à un maximum ou à un minimum de $m$, ici à un maximum ou un minimum de $t(t+1)$; il y a un minimum pour $t = -\frac{1}{2}$ $\left(x = -\frac{5}{4},\ y = -8,\ m = 16\right)$.

Pour $t = 1$, $x$ passe par un minimum égal à 1, $y$ par un maximum aussi égal à 1. Au point correspondant A, la tangente a pour coefficient angulaire $-2$; l'équation de cette droite est




$$y - 1 = -2(x - 1).$$

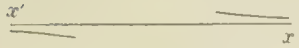
Pour étudier la disposition de la courbe par rapport à cette tangente, nous devrons étudier le signe de l'expression

$$\delta = y - 1 - 2(x - 1) = y + 2x - 3 = \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t^2} = \frac{(t-1)^3}{t^2}.$$

Pour $t < 1$, $\delta < 0$, la courbe est située au-dessous de la tangente;

pour $t > 1$, $\delta > 0$, la courbe est située au-dessus; le point A est un point de rebroussement de première espèce.

Etudions maintenant les branches infinies. Le point M va à l'infini : 1° pour $t = \pm\infty$, $x$ devient infini, $y$ tendant vers 0. La courbe est asymptote à l'axe des $x$.




Pour $t = -\infty$, $x = -\infty$ et $y$ décroît à partir de 0; pour $t = +\infty$, $x = +\infty$ et $y$ tend vers 0 en décroissant. La courbe par rapport à son asymptote présente la disposition ci-contre:

Pour $t = 0$, $x$ et $y$ deviennent tous deux infinis; le rapport $\frac{y}{x} = \frac{2(2t-1)}{t(t^2+1)}$ augmentant indéfiniment quand $t$ tend vers 0, la direction asymptotique correspondante est donnée par l'axe des $y$; mais l'asymptote est rejetée à l'infini; la courbe présente une branche parabolique.

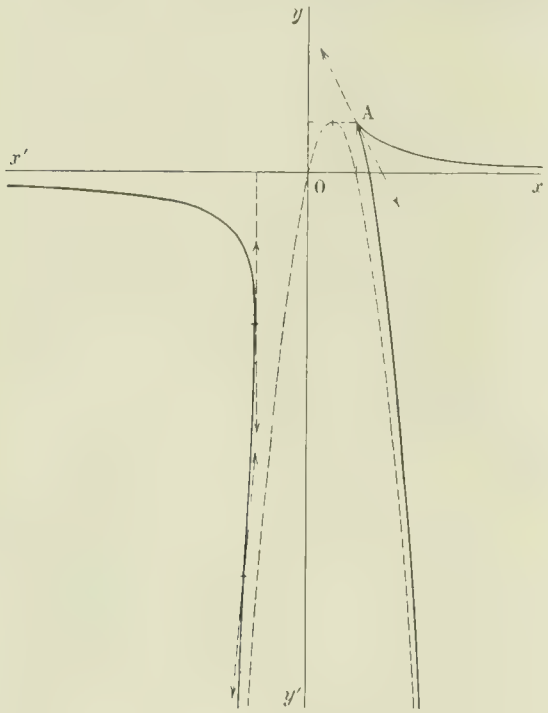
On peut déterminer une parabole asymptote; en effet les coordonnées du point M peuvent s'écrire

$$x = \frac{1}{2t} + \frac{t}{2}, \qquad y = \frac{2t-1}{t^2}.$$

Posons

$$X = \frac{1}{2t}, \qquad Y = \frac{2t-1}{t^2}.$$

Le point de coordonnées X, Y décrit la parabole $Y = 4X - 4X^2$ et pour une même valeur de $t$, on aura




$$y = Y, \qquad x = X + \frac{t}{2}.$$

La différence $\delta = x - X = \frac{t}{2}$ entre les abscisses de deux points de même ordonnée tend vers 0 en même temps que $t$ et on a $\delta < 0$ pour $t < 0$, $\delta > 0$ pour $t > 0$.

La courbe S présente la disposition ci-contre.

3. Désignant par $v$ la vitesse du point M au temps $t$, on a :

$$v^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{(t-1)^2(t^4 + 2t^3 + t^2 + 16)}{4t^6}.$$

Etudions les variations de $v^2$ lorsque $t$ varie de $\frac{1}{2}$ ($y = 0$, point de rencontre de la courbe avec l'axe des $y$) à $+\infty$. La dérivée de $v^2$ est

$$2vv' = \frac{(t-1)(t^3 + t^2 - 16t + 24)}{t^7};$$

Elle s'annule visiblement pour $t = 1$. Posons

$$z = t^3 + t^2 - 16t + 24:$$

$z$ s'annule pour une valeur négative de $t$, dont nous n'avons pas à tenir compte ; étudions comment varie $z$ quand $t$ varie de $\frac{1}{2}$ à $+\infty$.

On a $$z' = 3t^2 + 2t - 16 = 3\left(t + \frac{8}{3}\right)(t-2).$$

D'où le tableau suivant :

| $t$ | $\frac{1}{2}$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $z$ | | décroît | $+$ | croît | |

$z$ reste donc constamment positif. Par suite $2vv'$ est négatif pour $t$ compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 (mouvement retardé, la vitesse décroît de $\frac{\sqrt{265}}{2}$ à 0), et positif pour $t$ supérieur à 1 (mouvement accéléré, la vitesse croît de 0 à $\frac{1}{2}$).

P. L.

Solutions de MM. F. Pégorier, à Carcassonne et J. Haag, soldat au 69e de ligne, à Nancy.

## Mécanique.

**1157.** — 1° *Énoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un corps solide, invariable, sollicité par des forces, sachant que ce corps a un axe fixe autour duquel il ne peut que tourner.*

2° *La fixité de cet axe étant obtenue en fixant deux de ses points, établir les relations auxquelles doivent satisfaire les réactions exercées par ces points sur le corps en équilibre.*

3° *Une portion de plan indéformable, limitée par le rectangle* ABCD (AB = 4, BC = 12), *qui a deux points fixes* E, F, *milieux des côtés opposés* AB, CD, *est en équilibre sous l'action des forces* P, Q, R, *lorsqu'elle est horizontale.* P *et* Q *orthogonales avec* EF *sont appliquées l'une* P *en* 1, *au* 1/6 *de* DE *à partir de* D, *l'autre* Q *en* H, *au* 1/3 *de* EC *à partir de* E.

*Les projections sur l'axe* DC, *comptées positivement de* D *vers* C, *des vecteurs qui représentent ces forces sont* — 2 *et* + 3, *et les projections de ces mêmes vecteurs sur la verticale (dirigée de bas en haut) sont* 4 *et* 5.

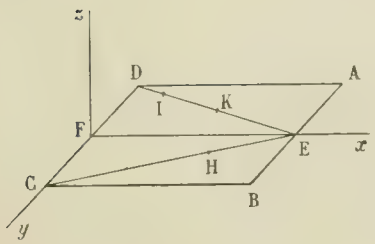
*Calculer l'intensité de la force* R *sachant qu'elle est verticale et que son point d'application est le milieu* K *de* DE.

4° *Représenter les projections des forces* P, Q, R, *sur un plan perpendiculaire à* EF.

**1. 2.** Questions de cours.

**3.** Le rectangle ABCD étant supposé horizontal, nous prendrons son plan pour plan des $xy$ ; soit F l'origine des coordonnées ; nous placerons l'axe des $x$ suivant la droite FE qui joint les deux points fixes, l'axe des $y$ suivant DC et l'axe des $z$ suivant la normale au plan du rectangle menée par le point F et vers le haut. — Désignant par R′ et R″ les réactions des points E et F, nous aurons le tableau suivant :

| | $x$ | $y$ | $z$ | X | Y | Z | L | M | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 2 | $-\frac{5}{3}$ | 0 | 0 | $-2$ | 4 | $-\frac{20}{3}$ | $-8$ | $-4$ |
| Q | 8 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 3 | 5 | $\frac{10}{3}$ | $-40$ | 24 |
| R | 6 | $-1$ | 0 | 0 | 0 | R | $-R$ | $-6R$ | 0 |
| R′ | 12 | 0 | 0 | X′ | Y′ | Z′ | 0 | $-12Z'$ | 12Y′ |
| R″ | 0 | 0 | 0 | X″ | Y | Z″ | 0 | 0 | 0 |



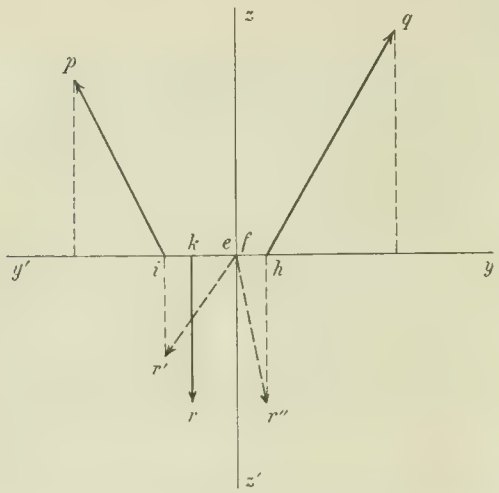

L'équation L = 0 donnera la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre

$$-\frac{20}{3}+\frac{10}{3}-R=0.$$

Elle permet de déterminer R

$$R=-\frac{10}{3}.$$

**4.** Les cinq autres équations d'équilibre serviront à calculer les réactions.




Elles se réduisent à

$$X' + X'' = 0, \qquad 28 + 12Z' = 0,$$
$$Y' + Y'' + 1 = 0, \qquad 20 + 12Y' = 0,$$
$$Z' + Z'' + \frac{17}{3} = 0.$$

Toutes les forces étant orthogonales à $Ox$, nous pouvons admettre que $X' = X'' = 0$. Supprimant la première équation et résolvant les quatre autres on trouve

$$Y' = -\frac{5}{3}, \qquad Y'' = \frac{2}{3},$$
$$Z' = -\frac{7}{3}, \qquad Z'' = -\frac{10}{3}.$$

La figure ci-contre représente les projections des forces P, Q, R et des réactions R', R'' sur le plan des $yz$, perpendiculaire à l'axe EF. Toutes ces forces s'y projettent en vraie grandeur puisqu'elles lui sont parallèles.

P. L.

Solution de M. R. Javelot, à Givet.

## ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (Concours de 1902).

### Mathématiques.

**1178.** — 1° *$x$ étant un nombre positif et $\lambda$ un nombre quelconque, énumérer très brièvement et sans démonstrations la série des définitions et conventions nécessaires pour donner une signification à l'expression*

$$(C) \qquad y = \frac{x^\lambda}{\lambda}.$$

2° *Représentation géométrique, $x$ et $y$ étant coordonnées. Allures de la courbe, suivant que $\lambda$ est $> 1$, compris entre 0 et 1, $< 0$. — Nous appellerons ces courbes les courbes* (C).

3° *Exprimer que la droite* $y = ux + w$ *est tangente à une des courbes* (C).

4° *Soient* C *et* C' *deux des courbes correspondant aux valeurs $\lambda$ et $\lambda'$ du paramètre.*

*Montrer qu'on peut leur mener une tangente commune si $\lambda$ et $\lambda'$ sont simultanément compris entre 0 et 1, ou simultanément en dehors de cet intervalle. Figurer, suivant les cas, les positions de cette tangente commune.*

5° *Si dans l'équation* (C) *on considère $x$ et $y$ comme donnés, $x$ étant toujours positif, l'équation* (C) *définit $\lambda$ comme fonction d'$x$ et d'$y$. $(x, y)$ étant un point du plan, montrer que du côté des $x$ positifs, $\lambda$ n'existe pas pour tout point, que suivant les cas $\lambda$ a 0, 1 ou 2 valeurs. Montrer que ces régions sont limitées par l'axe $x$, la droite $x = 1$ et une certaine courbe $\Gamma$ à laquelle toutes les courbes* (C) *sont tangentes.*

1. Commençons par rappeler la signification du symbole $x^\lambda$.

1° *$\lambda$ entier et positif :* $x^\lambda$ représente le produit de $\lambda$ facteurs tous égaux à $x$.

2° *$\lambda$ fractionnaire positif :* $\lambda = \frac{p}{q}$. On a

$$x^\lambda = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

3° $\lambda$ *entier ou fractionnaire, négatif* : soit $\lambda = -\lambda'$ ($\lambda' > 0$).

$$x^{\lambda} = x^{-\lambda'} = \frac{1}{x^{\lambda'}}.$$

Pour $\lambda = 0$, on aurait $x^{\lambda} = x^{0} = 1$.

4° $\lambda$ *incommensurable, positif ou négatif.* — Supposons $\lambda$ défini par une suite de nombres commensurables quelconques

(1) $$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \ldots \quad \lambda_n \quad \ldots$$

tendant vers $\lambda$. Les nombres

$$x^{\lambda_1} \quad x^{\lambda_2} \quad x^{\lambda_3} \quad \ldots \quad x^{\lambda_n} \quad \ldots$$

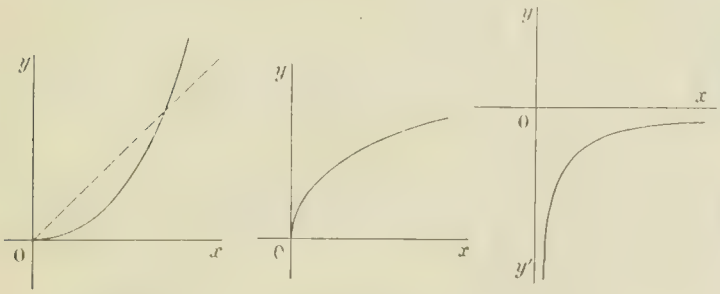
tendront eux aussi vers une limite : on démontre que la limite est la même quelle que soit la suite (1) considérée et on convient de représenter cette limite par le symbole $x^{\lambda}$.

$x^{\lambda}$ étant ainsi défini pour toute valeur de $\lambda$, l'expression $y = \frac{x^{\lambda}}{\lambda}$ n'est autre que le quotient de deux nombres quelconques ; elle est définie pour toute valeur de $\lambda$, sauf 0.

**2.** $\lambda$ étant donné, $y$ est une fonction de la variable $x$ définie pour toute valeur positive de $x$. La dérivée

$$y' = \frac{\lambda x^{\lambda-1}}{\lambda} = x^{\lambda-1}$$

est positive pour toute valeur de $x$ ; la fonction $y$ est donc constamment croissante.




1° $\lambda > 1$ 2° $0 < \lambda < 1$ 3° $\lambda < 0$

1° $\lambda > 1$. $y$ croît de 0 à $+\infty$ ; la courbe part de l'origine tangentiellement à l'axe des $x$ ($y'=0$), tourne sa concavité vers le haut ($y'' = (\lambda-1)x^{\lambda-2} > 0$) et va à l'infini par une branche parabolique dans la direction de $Oy$. — Pour $\lambda = 1$, la courbe C se réduit à la première bissectrice $y = x$

2° $0 < \lambda < 1$. — La courbe part de l'origine tangentiellement à l'axe des $y$ ($y' = \infty$), tourne sa concavité vers le bas ($y'' < 0$) et va à l'infini par une branche parabolique dans la direction de $Ox$.

3° $\lambda < 0$. $y$ croît de $-\infty$ à 0. La courbe admet pour asymptotes $Ox$ et $Oy'$ ; elle tourne constamment sa concavité vers le bas.

**3.** Considérons une courbe (C) et soit $x_0$, $y_0 = \frac{x_0^{\lambda}}{\lambda}$ un point de cette courbe. La tangente en ce point a pour équation

$$y - \frac{x_0^{\lambda}}{\lambda} = x_0^{\lambda-1}(x - x_0)$$

ou mieux

$$y = x_0^{\lambda-1}x + x_0^{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la droite $y = ux + w$ soit tangente à la courbe (C), c'est qu'il existe une valeur réelle et positive de $x_0$ telle que l'on ait simultanément

$$x_0^{\lambda-1} = u, \qquad x_0^{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) = w.$$

La première condition ne peut être vérifiée que si $u$ est positif ; supposons qu'il en soit ainsi ; on en déduit

$$x_0 = u^{\frac{1}{\lambda-1}}$$

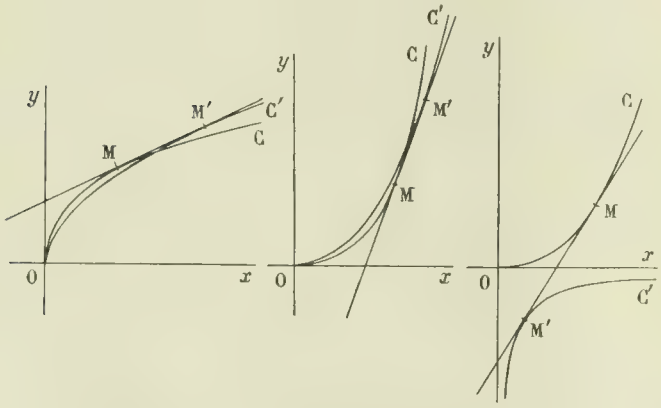
et portant dans la seconde,

$$w = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) u^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}.$$

Une courbe quelconque (C) admet donc une tangente et une seule parallèle à une direction de coefficient angulaire $u > 0$. L'équation de cette tangente est

$$y = ux + \left[\frac{1}{\lambda} - 1\right] u^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}.$$

L'ordonnée à l'origine $w$ est positive si $\frac{1}{\lambda} - 1$ est positif $(0 < \lambda < 1)$ et négative si $\frac{1}{\lambda} - 1$ est négatif ($\lambda$ extérieur à l'intervalle 0, 1).




1° $\begin{matrix} 0 < \lambda < 1 \\ 0 < \lambda' < 1 \end{matrix}$ $w > 0$ 2° $\begin{matrix} \lambda > 1 \\ \lambda' > 1 \end{matrix}$ $w < 0$ 3° $\begin{matrix} \lambda > 1 \\ \lambda' < 0 \end{matrix}$ $w < 0$

**4.** Pour qu'il existe une même droite tangente aux deux courbes C et C′, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer une valeur réelle et positive de $u$ vérifiant l'équation

$$\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) u^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} = \left(\frac{1}{\lambda'} - 1\right) u^{\frac{\lambda'}{\lambda'-1}},$$

ou

$$u^{\frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{\lambda'}{\lambda'-1}} = \frac{\frac{1}{\lambda'} - 1}{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

Cette équation exponentielle ne pourra être vérifiée que si le second membre a une valeur positive c'est-à-dire si l'on a simultanément :

1° $\frac{1}{\lambda} > 1$, $\frac{1}{\lambda'} > 1$, ce qui exige $0 < \lambda < 1$ et $0 < \lambda' < 1$. $(w > 0)$.

2° $\frac{1}{\lambda} < 1$ et $\frac{1}{\lambda'} < 1$, ce qui exige que $\lambda$ et $\lambda'$ soient tous deux extérieurs à l'intervalle 0, 1, $(w < 0)$.

Ces conditions remplies, on trouve une valeur et une seule pour $u$; les deux courbes C et C′ admettent une tangente commune et une seule. La figure ci-dessus indique les trois dispositions possibles.

**5.** $x$ et $y$ étant les coordonnées d'un point du plan $(x > 0)$, cherchons pour les différentes positions de ce point, combien de valeurs de $\lambda$ vérifient l'équation

$$f(\lambda) = y - \frac{x^\lambda}{\lambda} = 0.$$

Pour cela, nous étudierons les variations de la fonction $f(\lambda)$ quand $\lambda$ varie de $-\infty$ à $+\infty$. La dérivée de cette fonction est

$$f'(\lambda) = \frac{x^\lambda}{\lambda^2}(1 - \lambda . \mathrm{L}x).$$

Elle a le signe de la différence $1 - \lambda . \mathrm{L}x$. Pour étudier ce signe, il faudra distinguer suivant que $\mathrm{L}x \lesseqgtr 0$, c'est-à-dire suivant que $x \lesseqgtr 1$, d'où le tableau :

1° $x < 1$, $\mathrm{L}x < 0$.

| $\lambda$ | $f'(\lambda)$ | $f(\lambda)$ |
|---|---|---|
| $-\infty$ | | $+\infty$ |
| | $-$ | décroît |
| $\frac{1}{\mathrm{L}x}$ | 0 | $y = e\mathrm{L}x$ (Min.) |
| | $+$ | croît |
| 0 | | $\frac{+\infty}{-\infty}$ |
| | $+$ | croît |
| $+\infty$ | | $y$ |

2° $x > 1$, $\mathrm{L}x > 0$.

| $\lambda$ | $f'(\lambda)$ | $f(\lambda)$ |
|---|---|---|
| $-\infty$ | | $y$ |
| | $+$ | croît |
| 0 | | $\frac{+\infty}{-\infty}$ |
| | $+$ | croît |
| $\frac{1}{\mathrm{L}x}$ | 0 | $y = e\mathrm{L}x$ (Max.) |
| | $-$ | décroît |
| $+\infty$ | | $x$ |

On déduit de là les conclusions suivantes :

1° $x < 1$

$y < e\mathrm{L}x$, deux valeurs $\lambda_1, \lambda_2$

$$-\infty < \lambda_1 < \frac{1}{\mathrm{L}x} < \lambda_2 < 0.$$

$e\mathrm{L}x < y < 0$, 0 valeur

$0 < y$, une valeur $\lambda_3$ comprise entre 0 et $+\infty$.

2° $x > 1$

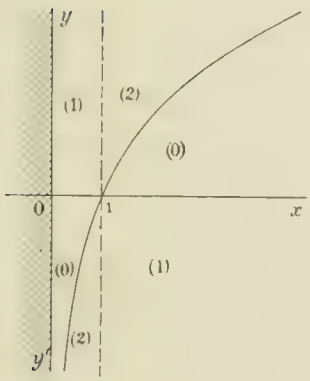
$y < 0$ une valeur $\lambda$ comprise entre $-\infty$ et 0.

$0 < y < e\mathrm{L}x$, 0 valeur.

$e\mathrm{L}x < y$, deux valeurs $\lambda_2, \lambda_3$.

$$0 < \lambda_2 < \frac{1}{\mathrm{L}x} < \lambda_3 < +\infty.$$

Soit $\Gamma$ la courbe représentée par l'équation $y = e\mathrm{L}x$ : cette courbe avec l'axe de $x$ et la droite $x = 1$ partage la partie du plan située à droite de $Oy$ en six régions. Si le point $(x, y)$ est dans l'une des deux régions marquées (0), il n'y a pas de valeur de $\lambda$ vérifiant l'équation proposée ; pour un point dans l'une des deux régions marquées (1), il y aura une seule valeur ; enfin pour un point pris dans l'une des régions (2) on trouvera deux valeurs de $\lambda$. Si le point était pris sur $\Gamma$, les deux valeurs se confondraient en une seule $\lambda = \frac{1}{\mathrm{L}x}$.




La courbe $\Gamma$ n'est autre que l'enveloppe des courbes C ; elle est définie comme le lieu des points des courbes C,

$$(\mathrm{C}) \qquad f(\lambda) = y - \frac{x^\lambda}{\lambda} = 0,$$

pour lesquels on a $f'(\lambda) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{L}x = \frac{1}{\lambda}$. Nous pouvons exprimer en fonction de $\lambda$ les coordonnées d'un pareil point. De l'équation $\mathrm{L}x = \frac{1}{\lambda}$, on déduit $x = e^{\frac{1}{\lambda}}$ et portant dans l'équation de la courbe (C), $y = \frac{e}{\lambda}$.

Quand $\lambda$ varie, le point de coordonnées

$$x = e^{\frac{1}{\lambda}}, \qquad y = \frac{e}{\lambda},$$

engendre une courbe qui n'est autre que $\Gamma$ $(y = e\mathrm{L}x)$.

Pour une valeur donnée de $\lambda$, ce point est aussi un point de la courbe C correspondante. Je dis qu'en ce point les deux courbes sont tangentes. En effet le coefficient angulaire de la tangente à la courbe C en ce point est

$$y'_\lambda = x^{\lambda-1} = \left(e^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\lambda-1} = e^{1-\frac{1}{\lambda}}.$$

Pour la courbe $\Gamma$, le coefficient angulaire est

$$\frac{y'_\lambda}{x'_\lambda} = \frac{e \times \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)}{e^{\frac{1}{\lambda}} \times \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)} = e^{1-\frac{1}{\lambda}}.$$

Les deux courbes admettent donc même tangente en ce point.

P. L.

Solutions de J.-B. Martin et A. Vial, Pensionnat de Valbenoîte, Confavreux, de Thy, Pensionnat Saint-Louis, Saint-Etienne.

---

## Géométrie descriptive.

**1179**. — Section plane d'une surface de révolution. — *L'axe de révolution $\omega ZZ'$ est vertical et à* 100mm *en avant de la ligne de terre* XY.

*La courbe génératrice de la surface est une ellipse de centre $oo'$ située dans un plan parallèle au bissecteur du* 1er *dièdre et dont les projections sont deux cercles de même rayon :*

$$om = o'm' = 50^{mm}.$$

*Le point $oo'$ est à* 150mm *en avant de la ligne de terre, à* 75mm *au-dessus de la même ligne, et à* 75mm *à gauche de l'axe $\omega ZZ'$. Il en résulte que le plan de front de l'axe touche l'ellipse en un point $mm'$, situé dans le plan de profil de $oo'$, et qui est le point le plus bas de l'ellipse;*

*Le plan sécant passe par le point $mo'$ et est déterminé par une horizontale $mb'$, $o'b'$ et une ligne de front $ma$, $o'a'$ de ce point, chacune de ces lignes faisant un angle de* 60° *avec la ligne de terre.*

*On demande de représenter à l'encre noire, en faisant la distinction des parties vues et cachées, ce qui reste du solide de révolution lorsque l'on enlève la partie située en avant du plan sécant.*

*Reproduire à l'encre (traits discontinus noirs ou traits continus de couleur) les constructions d'un point courant tant pour le contour apparent que pour l'intersection, et celles des points et tangentes remarquables qu'il est possible d'obtenir exactement.*

*Toutes les courbes (autres que les circonférences) seront tracées à la main (avec le tire-ligne ou à la plume) sans faire usage de pistolet.*

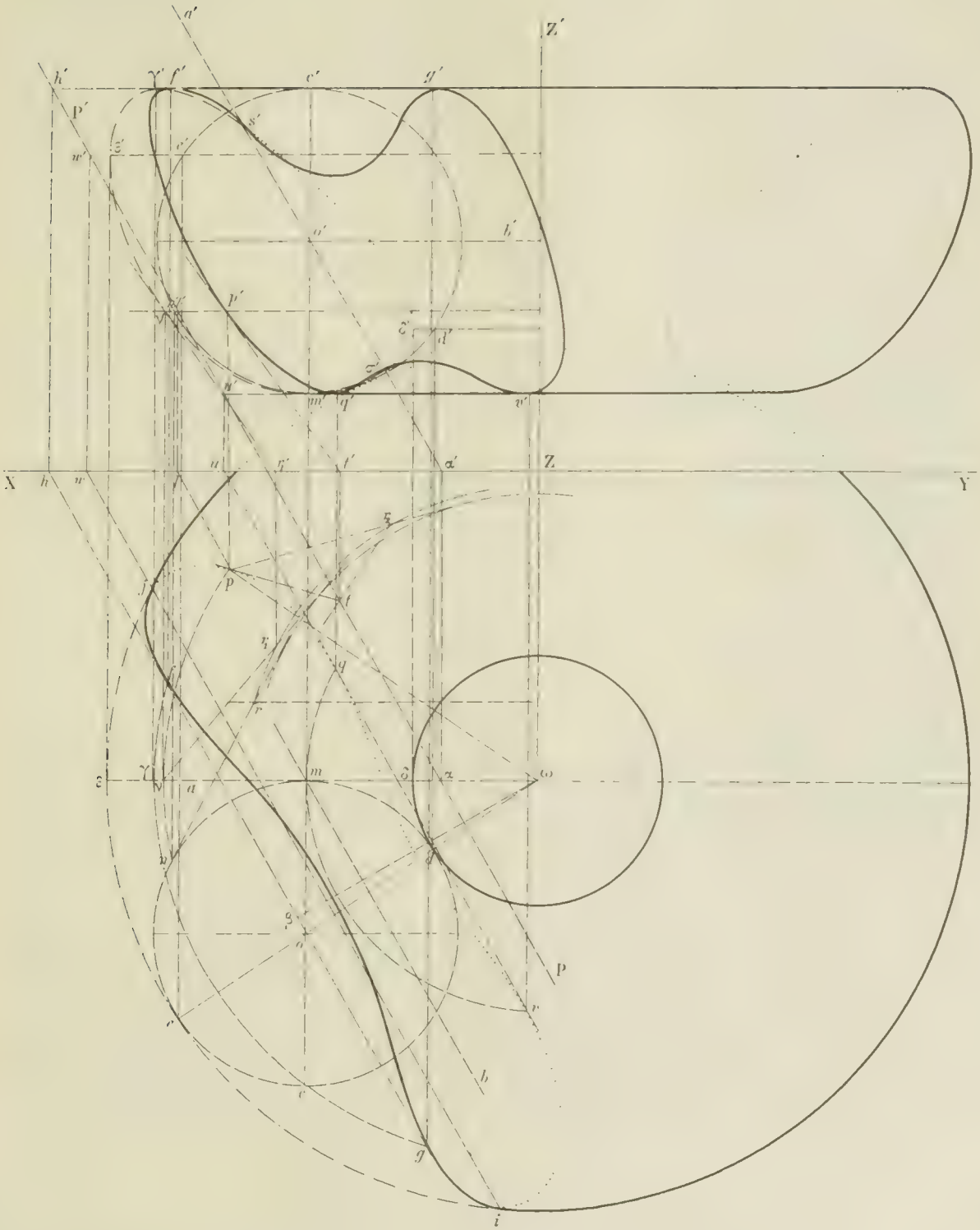
*Feuille quart grand aigle. On pourra placer $ZZ'$ suivant le grand axe de la feuille et la ligne de terre à* 50mm *au-dessus du petit axe.*

*Titre :* Surface de révolution. *Cadre inutile.*

*Contour apparent vertical de la surface.* — Pour avoir un point quelconque de la méridienne de front de la surface, nous prendrons sur l'ellipse génératrice donnée un point quelconque $(n, n')$ que nous ferons tourner autour de l'axe vertical $\omega ZZ'$ jusqu'à l'amener dans le plan de front de cet axe en $(\nu, \nu')$, qui est un point du contour apparent vertical. La tangente en ce point s'obtient en imprimant la même rotation à la tangente à l'ellipse au point $(n, n')$, qui vient alors en $(\nu r_1, \nu' r'_1)$; la tangente à la méridienne principale au point $(\nu, \nu')$ est projetée verticalement en $\nu' r'_1$. Faisant varier le point $(n, n')$ de l'ellipse, nous aurons autant de points que nous voudrons du contour apparent vertical.

Les points importants sont : le point le plus haut $(\gamma, \gamma')$ donné par le point le plus haut $(c, c')$ de l'ellipse, le point le plus bas $(m, m')$ qui est connu *a priori*, le point $(\delta, \delta')$ sur le parallèle de rayon minimum qui passe par $(d, d')$, et enfin le point $(\varepsilon, \varepsilon')$ sur le parallèle de rayon maximum auquel appartient $(e, e')$. En ces points remarquables la tangente est horizontale ou verticale; nous pouvons tracer la méridienne principale qui se compose de la courbe formée par tous les points précédents et de sa symétrique par rapport à $ZZ'$.

*Contour apparent horizontal de la surface.* — Il est formé par les deux cercles de rayons maximum et minimum de la surface, qui sont projetés suivant les cercles de centre commun $\omega$ et de rayons $\omega e$ et $\omega d$.


Z′
Z
X
Y
P
P

*Section plane de la surface.* — Le plan sécant $P\alpha P'$ est perpendiculaire au bissecteur du second dièdre. Un plan horizontal coupe ce plan suivant une horizontale et la surface suivant deux parallèles; leurs points communs appartiennent à la section plane cherchée. Le plan horizontal de $(\nu, \nu')$ coupe $P\alpha P'$ suivant l'horizontale $(lp, l'p')$ qui rencontre la parallèle $\omega\nu$ située dans ce plan en deux points dont l'un est $(p, p')$ qui est un point de la section plane cherchée. Pour avoir la tangente en ce point $(p, p')$ nous construisons le plan tangent en ce point; il est défini par la tangente en $(p, p')$ au parallèle et par la position que vient occuper la tangente en $(n, n')$ à l'ellipse génératrice quand $(n, n')$ vient en $(p, p')$. Cette tangente à l'ellipse est venue en $pr_2$ dont la trace horizontale est $r_2$; la trace horizontale du plan tangent est alors $r_2t$ perpendiculaire à $\omega p$. Cette trace horizontale coupe en $t$ la trace horizontale $P\alpha$ du plan sécant et on a en $(pt, p't')$ la tangente au point $(p, p')$ de la section plane.

On obtiendra autant de points que l'on voudra de cette section; nous avons construit les points importants qui sont $(f, f')$ et $(g, g')$ sur le parallèle le plus haut, $(q, q')$ et $(v, v')$ sur le parallèle le plus bas, et enfin $j$ et $i$ sur le parallèle maximum.

La projection horizontale de cette section admet pour axe de symétrie $\omega\beta$ perpendiculaire à $P\alpha$.

*Représentation du solide.* — Le plan sécant coupe le plan de front de l'axe de la surface suivant la droite $o'a'$ qui rencontre la méridienne principale aux points $s'$ et $\sigma'$. Il reste donc en projection verticale l'arc $s'\delta'\sigma'$ de cette méridienne ainsi que toute la portion de méridienne à droite de $ZZ'$. En projection horizontale, du contour apparent il reste le parallèle minimum tout entier et le parallèle maximum sauf l'arc $jei$ qui est enlevé.

En projection horizontale tout est vu, sauf l'arc $jqvi$ de la section plane, et l'arc du parallèle maximum situé dans le second dièdre.

En projection verticale tout est vu, sauf l'arc $s'\delta'\sigma'$ restant de la méridienne de gauche et l'arc intérieur à la surface dans la méridienne de droite. Les parallèles supérieur et inférieur restent et sont vus, sauf pour les arcs à gauche de $f'$ et de $q'$.

N. C.

## QUESTIONS PROPOSÉES

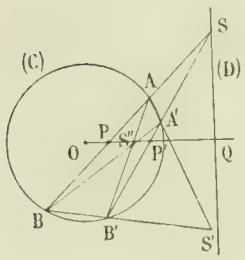
**1229**. — On considère un cercle variable qui passe par deux points fixes A et B et une droite fixe $\Delta$ qui passe au point A; cette droite rencontre le cercle variable en un point variable M.

1° Trouver le lieu du point de rencontre de la tangente en A avec la droite BM.

2° Trouver le lieu du milieu de la corde BM et l'enveloppe du rayon perpendiculaire à cette corde.

3° Trouver l'enveloppe de la tangente en M. Cette enveloppe est une parabole. Trouver le lieu de son sommet quand la droite $\Delta$ tourne autour du point A.

Th. Leconte.




**1230**. — On donne un cercle (C), deux points P et P' sur un même diamètre, et une droite (D) perpendiculaire à PP'. D'un point quelconque S de (D) on mène les sécantes PS et P'S qui coupent respectivement le cercle (C) en A, B et A', B'. Trouver le lieu du point de rencontre S' de AA' et BB', et le lieu du point de rencontre S'' de AB' et BA'.

Montrer que lorsque le point P seul est donné, on peut toujours déterminer la position du point P' et de la droite (D), de telle façon que le lieu de S' soit la droite (D), et le lieu de S'' le diamètre PP'.

E.-N. Barisien.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

13e Année. N° 11 Août 1903.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

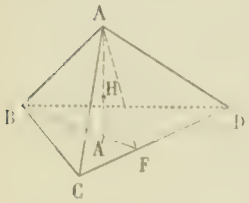
### CORRESPONDANCE

Lille, 28 mai 1903.

MONSIEUR,

La *Revue de Mathématiques spéciales* a signalé il y a quelques années quelques propriétés des cubiques gauches équilatères (*). Voici une démonstration géométrique de ces propriétés.

1. *Si une cubique gauche équilatère passe par les sommets d'un tétraèdre orthocentrique, elle passe par l'orthocentre du tétraèdre.*




En effet, d'abord tout cône ayant son sommet sur la cubique et admettant cette courbe pour directrice, est équilatère. Considérons en particulier les cônes de sommets C et D. Ils ont en commun la génératrice CD.

De plus, le plan ABF perpendiculaire à CD les coupe suivant deux hyperboles équilatères dont les points communs (F excepté) sont sur la cubique. Parmi ces points se trouve l'orthocentre du triangle ABF qui est aussi l'orthocentre du tétraèdre.

2. *Réciproquement, une cubique gauche qui passe par les sommets et l'orthocentre du tétraèdre* ABCD *est équilatère.*

En effet, si on coupe par le plan ABF les cônes qui ont pour sommets C et D et qui ont pour directrice la cubique, on obtient deux coniques passant par A, B, F, H, c'est-à-dire deux hyperboles équilatères.

Les deux cônes sont donc équilatères.

Il en est de même du cône de sommet A et qui s'appuie sur la cubique.

Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les points où la cubique rencontre le plan de l'infini.

Les traces des cônes (A) (C) sur le plan de l'infini sont deux coniques harmoniquement circonscrites au cercle de l'infini et dont les points communs sont $\alpha, \beta, \gamma, m$. Donc le pôle de la droite $\alpha\beta$ par rapport au cercle de l'infini est sur la droite $\gamma m$.

En considérant les cônes (A) et (D) dont les traces se coupent en $\alpha, \beta, \gamma, m'$ on démontre que le pôle de $\alpha\beta$ est sur $\gamma m'$.

Ce pôle est donc le point $\gamma$. En d'autres termes, le triangle $\alpha\beta\gamma$ est conjugué au cercle de l'infini et la cubique est équilatère.

Veuillez agréer, ...

H. DEROIDE,
*Professeur de Mathématiques spéciales, lycée de Lille.*

(*) Voir *Revue*, octobre 1897, page 302.

# NOTE SUR DEUX PROBLÈMES

Par M. **R. Bouvaist**.

L'objet de cette courte note est d'esquisser rapidement les solutions géométriques de deux problèmes déjà résolus analytiquement dans la *Revue*.

**936**. — *Si un triangle varie en restant inscrit à une conique* C *et circonscrit à une autre conique* C′ *le cercle circonscrit au triangle reste orthogonal à un cercle fixe et son centre décrit une conique* (n° de janvier 1901).

Soient deux triangles $T_1$ et $T_2$ inscrits à C et circonscrits à C′; d'après un théorème connu, ces deux triangles sont conjugués à une même conique $\Sigma$; C et C′ sont évidemment polaires réciproques par rapport à $\Sigma$ qui par suite est conjuguée au triangle autopolaire commun de C et C′. La conique $\Sigma'$ conjuguée à $T_1$ et à un triangle analogue $T_3$ coïncidera avec $\Sigma$, puisque ces deux coniques ont deux triangles autopolaires communs sans être bitangentes; il en résulte que tous les triangles T sont conjugués à une même conique $\Sigma$, par suite les cercles circonscrits à ces triangles sont, d'après le théorème de Faure, orthogonaux au cercle de Monge de $\Sigma$. Le centre de ce cercle est d'ailleurs le point d'intersection des deux cordes D et D′, interceptées sur C par les tangentes à C′ parallèles aux asymptotes de C.

Les droites D et D′ jointes respectivement à la droite de l'infini forment deux cercles circonscrits à des triangles inscrits à C et circonscrits à C′, par suite la droite de l'infini coupe en deux points le lieu des centres de ces cercles qui par conséquent est une conique.

Remarque. — De ce qui précède il résulte immédiatement que l'enveloppe des cercles considérés est une anallagmatique du quatrième ordre.

**992**. — *On donne dans un plan deux coniques* S *et* S′ *et un point* R. *Soient* P, Q *et* P′, Q′ *les points de contact des tangentes menées de* R *respectivement aux coniques* S *et* S′.

1° *Montrer que les droites* PP′, PQ′, QP′, QQ′ *et les quatre tangentes communes aux coniques* S *et* S′ *sont tangentes à une même conique* $\Sigma$. $P_1, Q_1$ *et* $P'_1, Q'_1$ *étant les points de contact des tangentes menées d'un point* $R_1$ *à* S *et* S′, *montrer qu'il existe une infinité de points* $R_1$, *tels que les droites* $P_1P'_1$, $P_1Q'_1$, $Q_1P'_1$, $Q_1Q'_1$ *soient tangentes à* $\Sigma$ *et trouver le lieu du point* $R_1$.

2° *La conique* S *et le point* R *étant fixes, trouver l'enveloppe de la polaire de* R *par rapport à* $\Sigma$, *lorsque* S′ *varie en restant inscrite à un quadrilatère circonscrit à* S *ou circonscrite à un quadrilatère inscrit à* S.

La solution repose sur le théorème suivant :

Théorème. — *Étant données quatre coniques, si le faisceau ponctuel ou tangentiel déterminé par deux d'entre elles et le faisceau analogue déterminé par les deux autres ont une conique commune, il en est de même quelle que soit la manière de grouper deux à deux les quatre coniques.*

Soient $C_1, C_2, C_3, C_4$ les quatre coniques, supposons que le faisceau $C_1 + \lambda C_2 = 0$ et le faisceau $C_3 + \lambda' C_4 = 0$ aient une conique commune $\Sigma$, ces deux faisceaux sont alors respectivement identiques aux faisceaux $C_1 + \mu\Sigma = 0$, $C_3 + \mu'\Sigma = 0$ qui appartiennent à un même réseau $C_1 + \lambda_1 C_3 + \lambda_2 \Sigma = 0$; il en résulte que les quatre coniques considérées appartiennent à un même réseau. Comme deux faisceaux appartenant à un même réseau ont toujours une conique commune, le théorème est démontré.

Dans le problème qui nous occupe, le faisceau tangentiel déterminé par la conique S et les points

P et Q et le faisceau analogue déterminé par S' et les points P' et Q' ont une conique commune, le point double R, par suite les tangentes communes à S et S' et aux coniques (PQ), (P'Q') sont tangentes à une même conique Σ.

On voit d'ailleurs facilement que la conique Σ', polaire réciproque de Σ par rapport à l'une des quatre coniques par rapport auxquelles S se transforme en S', passe par R, cette conique Σ' constitue le lieu des points R, tels que les quatre droites $P_1P_1$, $P_1Q_1$, $P_1Q_1$, $Q_1Q_1$ soient tangentes à Σ. La seconde partie du problème n'offre aucune difficulté, elle revient à chercher l'enveloppe des polaires d'un point fixe soit par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel, soit par rapport aux coniques d'un faisceau ponctuel. On sait que dans le premier cas cette enveloppe est une conique harmoniquement inscrite aux coniques du faisceau considéré, dans le second c'est le point conjugué du point considéré par rapport aux coniques du faisceau.

## SUR UNE APPLICATION DE LA TRANSFORMATION PAR INVERSION

par M. **R. Bouvaist.**

Je me propose de démontrer au moyen de la transformation par inversion, le théorème suivant, probablement déjà connu des lecteurs de la *Revue*.

*Par un point* M *pris sur une strophoïde droite on peut mener à cette courbe deux tangentes, et la droite joignant les points de contact enveloppe une parabole dont le sommet coïncide avec celui de la strophoïde et dont le foyer est le symétrique du point double par rapport au sommet commun.*

Ce théorème résulte des propriétés suivantes qu'il est à peine besoin de démontrer :

1° *Par le sommet* S *d'une hyperbole équilatère* H *et par un point* M *pris sur la courbe passent deux cercles tangents à l'hyperbole; leurs points de contact avec l'hyperbole sont sur un même diamètre.*

Soit en effet α l'un des contacts ; le diamètre Oα et la corde MS sont rectangulaires, ces deux droites sont en effet symétriques de la tangente en α, la première par rapport aux asymptotes, la seconde par rapport aux axes. Il en résulte immédiatement que le contact du second cercle sera l'extrémité β du diamètre Oα.

2° *Le cercle* C *passant par un sommet* S *d'une hyperbole équilatère* H *et par les extrémités d'un diamètre enveloppe la podaire de l'hyperbole* H *par rapport au point* S.

Soient α, β les extrémités du diamètre considéré, γ le quatrième point d'intersection de l'hyperbole et du cercle. Le diamètre αβ et la corde Sγ étant également inclinés sur les axes, le diamètre conjugué de Sγ sera perpendiculaire sur αβ ; si l'on désigne par ω le milieu de Sγ on aura par conséquent $S\omega = \omega\beta = \omega\gamma$, le point ω sera le centre du cercle considéré. Le lieu de ce point est alors évidemment l'hyperbole homothétique de l'hyperbole H par rapport au point S dans le rapport $\frac{1}{2}$. Le cercle C passant constamment par le point S enveloppe alors la podaire de l'hyperbole H par rapport au point S.

On sait que la transformée par inversion d'une conique par rapport à un point pris sur la courbe est une cubique circulaire admettant le point considéré pour point double, les tangentes en ce point étant parallèles aux directions asymptotiques de la conique. Dans le cas d'une hyperbole équilatère la transformée est une strophoïde, c'est une strophoïde droite si le pôle d'inversion coïncide avec l'un des sommets.

On voit alors qu'aux deux cercles tangents à l'hyperbole H menés par les points M et S correspondent les tangentes menées à une strophoïde par un point M' pris sur la courbe ; au cercle passant par le point S et les extrémités du diamètre αβ correspond la droite joignant les points de contact des deux tangentes, cette droite enveloppe la transformée de la podaire de l'hyperbole H.

On sait que la podaire d'une courbe par rapport à un point S et sa polaire réciproque par rapport à un cercle de centre S sont deux figures inverses, la puissance d'inversion étant égale au carré du rayon du cercle.

La transformée de l'enveloppe du cercle C est alors visiblement une parabole ayant pour sommet le sommet de la strophoïde et le point S pour pied de sa directrice.

Ce qui démontre le théorème énoncé au début.

## NOTE SUR UNE CUBIQUE

(Remarque sur la Note de M. Vacquant : n° d'avril 1903.)

Par M. **A. Sainte-Laguë**, élève à l'Ecole Normale Supérieure.

Dans une note insérée dans la *Revue* (n° d'avril 1903) on considère les coniques tangentes aux trois côtés d'un triangle et telles que les trois normales aux points de contact soient concourantes. On trouve pour lieu du point de rencontre de ces normales une certaine cubique $\Gamma$.

Si on considère les coniques circonscrites au triangle ABC et telles que les normales en A, B, C soient concourantes, on trouve pour lieu du point de concours de ces normales une cubique qui est aussi $\Gamma$.

On verrait en effet, en refaisant des raisonnements analogues, que la cubique peut être considérée comme le lieu des points communs à deux faisceaux homographiques de droites et d'hyperboles. On verrait que la cubique obtenue ainsi passe par les points A, B, C, A′, B′, C′, D′∞, E′∞, F′∞ en gardant les mêmes notations ; qu'elle passe par les centres des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits et par l'orthocentre. Il y a assez d'éléments pour qu'on puisse l'identifier à la cubique $\Gamma$.

On peut remarquer que, d'après la théorie des transversales, si un point appartient à la cubique, il en est de même du point symétrique par rapport au centre O du cercle circonscrit. La cubique $\Gamma$ admet donc O pour centre. C'est d'ailleurs le point de rencontre des trois asymptotes. On a en ce point une tangente d'inflexion. Si on considère le symétrique par rapport à O du centre du cercle inscrit, on trouve que la cubique $\Gamma$ passe par le centre du cercle circonscrit au triangle des trois bissectrices extérieures.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1168.** — *Soient* $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ *les centres des quatre cercles de Joachimstal relatifs aux normales menées d'un point* P *à une ellipse* (E) *ayant pour axes de symétrie* $Ox$ *et* $Oy$.

1° *Démontrer que, quelles que soient les grandeurs des axes de l'ellipse, ces centres sont situés sur une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes* $Ox$ *et* $Oy$ *et passant par le milieu* I *de* OP.

2° *Si* $2a$ *et* $2b$ *désignent les longueurs des axes de* (E), *les centres* $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ *sont les points d'incidence des normales menées d'un point* Q *à une conique* (C) *ayant pour centre le point* I, *dont les axes sont parallèles à ceux de* (E) *et ont respectivement pour longueurs* $\frac{c^2}{2a}$ *et* $\frac{c^2}{2b}$.

3° *En déduire que trois des centres* $C_i$ *et le point symétrique du quatrième par rapport au point* I *sont sur un cercle.*

Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes et $\alpha$, $\beta$ les coordonnées d'un point P quelconque dans le plan de cette ellipse. En exprimant que la normale au point $(x, y)$ passe en P, nous avons la condition

$$\frac{\alpha-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\beta-y}{\frac{y}{b^2}};$$

désignons par $\lambda$ la valeur commune de ces deux rapports, nous avons

$$(1)\qquad x=\frac{a^2\alpha}{a^2+\lambda},\qquad y=\frac{b^2\beta}{b^2+\lambda},$$

et, en écrivant que ce point est sur l'ellipse,

$$(2)\qquad \frac{a^2\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2+\lambda)^2}-1=0.$$

Cette équation du quatrième degré en $\lambda$ donne les paramètres des pieds des quatre normales menées du point P à l'ellipse; nous désignerons par $\lambda_0$ l'un d'eux, et nous allons chercher l'équation du cercle qui passe aux points ayant pour paramètres les autres valeurs de $\lambda$.

A cet effet, remarquons que les équations (1) représentent, quand $\lambda$ varie, l'hyperbole habituellement désignée sous le nom d'hyperbole d'Apollonius du point P, et que l'équation (2) donne les valeurs de $\lambda$ qui correspondent aux points de rencontre de cette hyperbole avec l'ellipse. Si nous désignons par

$$x^2+y^2-2px-2qy+r=0$$

l'équation du cercle cherché, les $\lambda$ des points de rencontre de l'hyperbole et du cercle sont racines de l'équation

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2+\lambda)^2}-\frac{2pa^2\alpha}{a^2+\lambda}-\frac{2qb^2\beta}{b^2+\lambda}+r=0,$$

et celle-ci doit avoir trois racines communes avec l'équation (2); or si nous multiplions le premier membre de l'équation (2) par $\lambda$ et que nous l'ajoutions ensuite à la précédente, nous obtenons une équation plus simple, du troisième degré seulement,

$$\frac{a^2\alpha^2-2pa^2\alpha}{a^2+\lambda}+\frac{b^2\beta^2-2qb^2\beta}{b^2+\lambda}+r-\lambda=0,$$

qui donne les paramètres des trois points choisis.

En multipliant le premier membre par $\frac{\lambda-\lambda_0}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}$, nous avons une expression identique au premier membre de l'équation (2). Nous n'avons alors qu'à décomposer cette fraction rationnelle en ses éléments simples et à identifier le résultat avec la fraction (2). Or on a identiquement

$$\frac{\lambda-\lambda_0}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}=\frac{a^2+\lambda_0}{c^2(a^2+\lambda)}-\frac{b^2+\lambda_0}{c^2(b^2+\lambda)};$$

par conséquent la fraction en $\frac{1}{(a^2+\lambda)^2}$ s'obtient immédiatement et, en égalant les deux numérateurs, on a

$$(a^2+\lambda_0)(\alpha-2p)=c^2\alpha,$$

d'où

$$2p=\frac{b^2+\lambda_0}{a^2+\lambda_0}\alpha;$$

de même

$$2q=\frac{a^2+\lambda_0}{b^2+\lambda_0}\beta.$$

Reste à trouver $r$; pour cela, il faut former la fraction en $\frac{1}{a^2+\lambda}$ et annuler son numérateur;

cette fraction provient de la fraction en $\frac{1}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}$ que l'on décompose en éléments simples et de la fraction en $\frac{1}{a^2+\lambda}$; les deux numérateurs réunis donnent l'égalité

$$a^2\alpha^2\frac{b^2+\lambda_0}{a^2+\lambda_0}+b^2\beta^2\frac{a^2+\lambda_0}{b^2+\lambda_0}+(r+a^2)(a^2+\lambda_0)=0.$$

D'autre part, on a

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2+\lambda_0)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2+\lambda_0)^2}-1=0;$$

l'égalité précédente se réduit donc à

$$(a^2+\lambda_0)(b^2+\lambda_0)+(r+a^2)(a^2+\lambda_0)=0;$$

elle donne

$$r=-a^2-b^2-\lambda_0.$$

L'équation du cercle de Joachimstal est donc finalement

$$x^2+y^2-\frac{b^2+\lambda_0}{a^2+\lambda_0}\alpha x-\frac{a^2+\lambda_0}{b^2+\lambda_0}\beta y-a^2-b^2-\lambda_0=0.$$

Nous avons suivi cette méthode un peu longue pour établir l'équation du cercle de Joachimstal uniquement pour donner aux élèves une application intéressante de la théorie des fractions rationnelles qui vient d'être réintroduite dans le programme d'admission à l'École Polytechnique.

1. Les coordonnées du centre d'un tel cercle sont donc fournies par les équations

$$2x=\frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}\alpha,\qquad 2y=\frac{a^2+\lambda}{b^2+\lambda}\beta,$$

$\lambda$ étant une racine de l'équation

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2+\lambda)^2}-1=0;$$

par conséquent ces quatre points sont sur l'hyperbole

$$4xy=\alpha\beta,$$

que l'on obtient en éliminant $\lambda$ entre les deux équations qui donnent $x$ et $y$. C'est bien l'hyperbole indiquée dans l'énoncé.

2. En outre, on voit aisément que

$$2x-\alpha=-\frac{c^2\alpha}{a^2+\lambda},\qquad 2y-\beta=\frac{c^2\beta}{b^2+\lambda};$$

donc on a

$$\frac{a}{c^2}(2x-\alpha)=-\frac{a\alpha}{a^2+\lambda},$$

$$\frac{b}{c^2}(2y-\beta)=\frac{b\beta}{b^2+\lambda},$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation qui donne $\lambda$,

$$a^2(2x-\alpha)^2+b^2(2y-\beta)^2=c^4.$$

C'est l'ellipse indiquée dans l'énoncé.

Reste à montrer que les points de rencontre de cette ellipse avec l'hyperbole déjà trouvée sont les points d'incidence des normales menées par un point à cette ellipse, c'est-à-dire en somme que l'hyperbole $4xy=\alpha\beta$ est l'hyperbole d'Apollonius d'un certain point H par rapport à l'ellipse précédente. Pour cela, nous écrivons l'hyperbole d'Apollonius d'un point (X, Y),

$$\frac{X-x}{a^2(2x-\alpha)}=\frac{Y-y}{b^2(2y-\beta)},$$

et nous annulons les coefficients de $x$ et de $y$ ; ce calcul nous donne

$$X = \frac{a^2\alpha}{2b^2}, \qquad Y = \frac{b^2\beta}{2a^2},$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation de l'hyperbole, nous voyons de suite qu'elle se réduit à $4xy = \alpha\beta$.

Le fait est donc établi.

3. Quant à la dernière partie elle est évidente : elle résulte des propriétés classiques du cercle de Joachimstal.

J. MARCHAL.

Nous publions une deuxième solution à cause de son originalité toute particulière.

**Autre solution.** — 1. L'ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

les coordonnées d'un point quelconque de cette ellipse peuvent être représentées par

$$x = \frac{a(t^2+1)}{2t}, \qquad y = \frac{b(t^2-1)}{2ti}.$$

$x_1$ et $y_1$ étant les coordonnées du point P, les points d'incidence des normales menées de ce point à l'ellipse sont sur l'hyperbole

$$c^2xy + b^2y_1x - a^2x_1y = 0.$$

Donc les valeurs du paramètre $t$ correspondant à ces quatre points sont les racines de l'équation

$$(1) \qquad c^2t^4 - 2(ax_1 - by_1i)t^3 + 2(ax_1 + by_1i)t - c^2 = 0.$$

Soient $t, t_1, t_2, t_3$ ces racines. Les valeurs de $t$ qui correspondent aux points où l'un des cercles de Joachimstal coupe l'ellipse sont $-t, t_1, t_2, t_3$. Si $p$ et $q$ sont les coordonnées du centre de ce cercle, on voit sans peine que ces quatre valeurs sont racines de l'équation

$$(2) \qquad c^2t^4 - 4(ap - bqi)t^3 + 2(a^2 + b^2 + 2h)t^2 - 4(ap + bqi)t + c^2 = 0.$$

On déduit de cette équation

$$4(ap - bqi) = c^2(t_1 + t_2 + t_3 - t),$$

et

$$4(ap + bqi) = c^2(t_1t_2t_3 - t(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)),$$

ou

$$4(ap + bqi) = c^2\left[-\frac{1}{t} - t(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)\right].$$

Mais on tire de la première équation

$$2(ax_1 - by_1i) = c^2(t_1 + t_2 + t_3 + t),$$

et

$$2(ax_1 + by_1i) = c^2\left[-\frac{1}{t} + t(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)\right].$$

On a donc, en fonction de $t$ seulement,

$$(3) \qquad 2(ap - bqi) = ax_1 - by_1i - c^2t,$$

et

$$(4) \qquad 2(ap + bqi) = ax_1 + by_1i - \frac{c^2}{t}.$$

On en tire par addition et soustraction

$$4ap = 2ax_1 - c^2\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

$$4bqi = 2by_1i + c\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

En multipliant ces deux relations membre à membre, on trouve

$$16abpqi = 4abx_1y_1i - c^2\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + 2ac^2x_1\left(t - \frac{1}{t}\right) - 2bc^2y_1i\left(t + \frac{1}{t}\right).$$

Si on remarque que $t$ est racine de l'équation (1), qui s'écrit

$$c^2\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + 2by_1i\left(t + \frac{1}{t}\right) - 2ax_1\left(t - \frac{1}{t}\right) = 0,$$

on voit que cette relation se réduit à

$$4pq = x_1y_1,$$

ce qui démontre le théorème.

2. Si j'élimine $t$ entre les équations (3) et (4) je trouve

$$c^4 = a^2(2p - x_1)^2 + b^2(2q - y_1)^2.$$

Cette équation, si on y considère $p$ et $q$ comme coordonnées courantes, représente une ellipse sur laquelle se trouvent les quatre centres. Si on transporte l'origine au point I, son équation devient

$$c^4 = 4(a^2p^2 + b^2q^2).$$

C'est la conique (C) de l'énoncé. L'hyperbole équilatère sur laquelle se trouvent les quatre centres d'après le premier théorème a pour équation dans le nouveau système d'axes

$$pq + \frac{py_1}{2} + \frac{qx_1}{2} = 0.$$

Or l'hyperbole d'Apollonius relative à la conique (C) pour un point de coordonnées $\alpha$ et $\beta$ a pour équation

$$c^2pq - a^2\beta p + b^2\alpha q = 0.$$

Si donc on pose $\alpha = \frac{c^2x_1}{2b^2}$ et $\beta = -\frac{c^2y_1}{2a^2}$, on aura les coordonnées d'un point Q dont les points d'incidence des normales menées à (C) sont les quatre centres considérés. Les coordonnées de ce point dans le système primitif sont $\frac{a^2x_1}{2b^2}$ et $\frac{b^2y_1}{2a^2}$.

3. Cette propriété découle immédiatement du théorème de Joachimstal.

G. DULIMBERT.

Bonnes solutions : MM. H. Lefèvre ; E. N. Barisien ; J. Haag ; R. Bouvaist ; Parrod ; L. Sade.
Assez bonnes solutions : MM. M. Treillou ; A. Vial, pensionnat de Valbenoîte, Saint-Etienne ; J. Roda, à Toulouse.

---

**1172.** — *Étant donnés deux axes rectangulaires* $Ox$, $Oy$ *et deux points* A *et* B *dont les coordonnées sont* $a$, 0 *et* 0, $b$, *on considère les coniques* S *inscrites dans le triangle* ABO *et qui détachent sur la droite* $x = -a$ *un segment vu d'un point* P $(x_0, y_0)$ *donné sous un angle droit.*

1° *Trouver le lieu des centres des coniques* S. *Ce lieu est une conique* S′ *dont on discutera la nature suivant les différentes positions de* P.

2° *Pour que la conique* S′ *passe par un point donné* M, *il faut que* P *soit sur un certain cercle* Γ. *Montrer que lorsque* P *se déplace sur ce cercle,* S′ *passe par trois autres points fixes* I, J, K. *Le point* M *variant d'une manière quelconque, les droites* IJ, IK, JK *pivotent autour de points fixes.*

3° *Trouver et construire la courbe, lieu du point* M, *tel que le cercle* Γ *ait un rayon donné* R.

1. $x$, $y$ étant les coordonnées du centre de S, l'équation tangentielle de cette conique est de la forme

$$2kuv + 2xuw + 2yvw + w^2 = 0,$$

avec

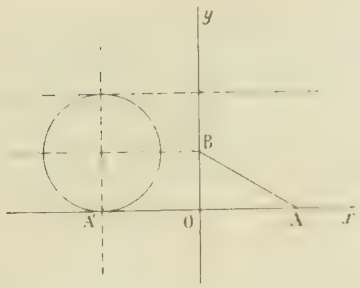
$$2k = 2bx + 2ay - ab.$$

L'équation ponctuelle correspondante étant

$$(yX - xY - k)^2 - 2(2xy - k)XY = 0,$$

les ordonnées des points $M_1$, $M_2$ où la conique S rencontre la droite $X = -a$, s'obtiennent immédiatement, et l'on peut écrire de suite l'équation du cercle décrit sur $M_1M_2$ comme diamètre :

$$(-ay + xY - k)^2 - 2(2xy - k)aY + x^2(X + a)^2 = 0.$$




Il suffit d'y remplacer X, Y par $x_0$, $y_0$, et d'y regarder $x$, $y$ comme coordonnées courantes pour avoir le lieu du centre des coniques S :

$$\left[(y_0 - b)x - 2ay - \frac{ab}{2}\right]^2 - ay_0(2x - a)(2y - b) + (x_0 + a)^2x^2 = 0.$$

Suivant les notations habituelles, on a

$$\delta = AC - B^2 = 4a^2(x_0 + a)^2 + (y_0 - b)^2 - b^2,$$

$$\Delta = ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2$$
$$= -4a^2y_0(y_0 - 2b)(x_0 + a)^2 - (y_0 - b)^2 - b^2.$$

Ces expressions montrent que la conique S′ est une ellipse ou une hyperbole suivant que le point P est extérieur ou intérieur au cercle $(x + a)^2 + (y - b)^2 - b^2 = 0$. Elle se réduit à deux droites parallèles si P est sur ce cercle, et à deux droites imaginaires, si P est sur une des droites $y = 0$, $y = 2b$.

**2.** Si S′ passe par un point $M(x_1, y_1)$, on a

$$(1) \qquad [(x_0 + a)^2 + y_0^2 - 2by_0]x_1^2 + (bx_1 + 2ay_1)^2 - 3\frac{a^2b^2}{4} - a(bx_1 + 2ay_1 - ab)(y_0 - b) = 0;$$

$x_0$, $y_0$ étant regardés comme coordonnées courantes, c'est l'équation d'un cercle Γ.

L'équation de la conique S′ étant

$$(2) \qquad [(x_0 + a)^2 + y_0^2 - 2by_0]x^2 + (bx + 2ay)^2 - 3\frac{a^2b^2}{4} - a(bx + 2ay - ab)(y_0 + b) = 0,$$

multiplions les premiers membres de (1) et (2) respectivement par $-x^2$ et $+x_1^2$, et ajoutons ; il vient

$$x_1^2(bx + 2ay)^2 - x^2(bx_1 + 2ay_1)^2 + 3\frac{a^2b^2}{4}(x^2 - x_1^2)$$
$$+ a(y_0 + b)[(bx_1 + 2ay_1 - ab)x^2 - (bx + 2ay - ab)x_1^2] = 0,$$

ou

$$T + a(y_0 + b)T' = 0.$$

Lorsque $y_0$ varie, la conique S′ passe donc par les quatre points d'intersection des deux coniques $T = 0$, $T' = 0$, dont un coïncide avec le point $(x_1, y_1)$, ce qui était évident.

Si l'on pose $bx + 2ay - ab = h$, $bx_1 + 2ay_1 - ab = h_1$, les équations des deux coniques s'écrivent

$$(3) \qquad x_1^2(h - h_1)(h + h_1 + 2ab) - (x^2 - x_1^2)\left(h_1^2 + 2abh_1 + \frac{a^2b^2}{4}\right) = 0,$$

$$(4) \qquad x_1^2(h - h_1) - (x^2 - x_1^2)h_1 = 0.$$

Elles ont en commun les deux points $x^2 - x_1^2 = 0$, $h - h_1 = 0$.

L'un est le point $M(x_1, y_1)$, l'autre le point I, $x = -x_1$, $y = y_1 + \frac{b}{a}x_1$.

Eliminant $h - h_1$, $x^2 - x_1^2$ entre (3) et (4), on a la droite qui joint les deux autres points fixes,

$$(5) \qquad h_1h - \frac{a^2b^2}{4} = 0.$$

Pour avoir les abscisses de ces points, il suffit de porter dans (4) la valeur de $h$, on obtient ainsi

$$x^2 = \frac{a^2b^2x_1^2}{4h_1^2}, \qquad \text{d'où} \qquad x' = \frac{abx_1}{2h_1}, \qquad x'' = -\frac{abx_1}{2h_1}.$$

On tire les ordonnées de l'équation (5)

$$y' = \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4h_1}\left(\frac{a}{2} - x_1\right), \qquad y'' = \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4h_1}\left(\frac{a}{2} + x_1\right).$$

Ayant les coordonnées des points I, J, K, on forme aisément les équations des droites IJ, IK :

$$(4bx_1 + 4ay_1 - 3ab)x + ax_1(4y - 3b) = 0,$$
$$(4bx_1 + 4ay_1 - ab)x + ax_1(4y - b) = 0.$$

On voit donc que la droite JK reste parallèle à une direction fixe $(h = 0)$, et que les droites IJ, IK passent respectivement par les points fixes $x = 0$, $y = \frac{3b}{4}$, et $x = 0$, $y = \frac{b}{4}$.

3. L'équation du cercle Γ s'écrit, en utilisant les notations précédentes,

$$(x + a)^2 + y^2 - 2\left(b + \frac{ah_1}{2x_1^2}\right)y + \frac{\left(h_1 + \frac{ab}{2}\right)^2}{x_1^2} = 0.$$

Pour que le rayon soit égal à R, il faut que l'on ait

$$\left(b + \frac{ah_1}{2x_1^2}\right)^2 - \frac{\left(h_1 + \frac{ab}{2}\right)^2}{x_1^2} - R^2 = 0,$$

ou

$$(4x_1^2 - a^2)(h_1^2 - b^2x_1^2) + 4R^2x_1^4 = 0.$$

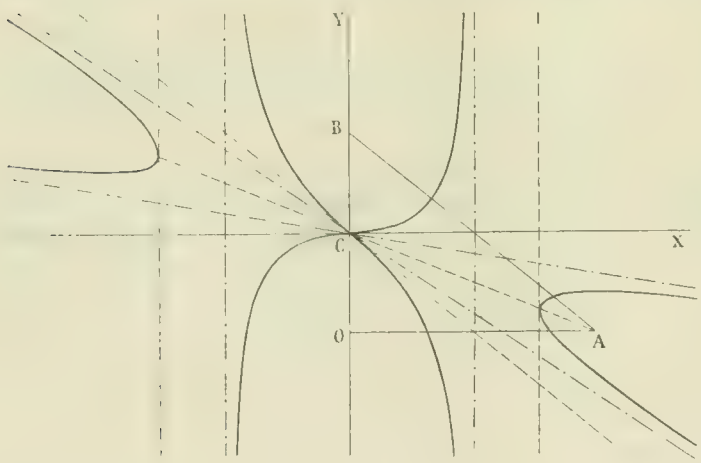
Le lieu cherché est donc une quartique qui a un point double au point $x = 0$, $y = \frac{b}{2}$. En y transportant l'origine, la nouvelle équation de la courbe est

$$(4X^2 - a^2)(bX + aY)aY + R^2X^4 = 0,$$

forme qui donne des régions pour la construction de la courbe, par rapport aux tangentes au point double et à deux asymptotes. En outre du point double à l'infini sur OY, la quartique admet les deux directions asymptotiques

$$(R^2 - b^2)X^2 + (bX + 2aY)^2 = 0,$$

réelles si $R < b$, confondues si $R = b$.




D'ailleurs la nouvelle origine étant centre, et les directions asymptotiques simples, les asymptotes passent par l'origine. Pour placer la courbe il suffit d'écrire

$$(4X^2 - a^2)\left[(bX + aY)aY + \frac{R^2}{4}X^2\right] + \frac{a^2R^2}{4}X^2 = 0.$$

On doit remarquer que lorsqu'elles sont réelles, les asymptotes sont comprises dans l'angle $Y = 0$, $bX + aY = 0$, puisque le produit $Y(bX + aY)$, égal à $-\frac{R^2}{4}X^2$, doit être négatif.

Si l'on résout par rapport à Y, on a

$$(2aY + bX)^2\left(X^2 - \frac{a^2}{4}\right) - X^2\left[(b^2 - R^2)X^2 - \frac{a^2b^2}{4}\right] = 0.$$

Si $R > b$, toute la courbe est comprise entre les droites $X^2 = \frac{a^2}{4}$. De même si $R = b$. Si $R < b$, à chaque valeur de X correspondent deux valeurs finies de Y pourvu que

$$\left(X^2 - \frac{a^2}{4}\right)\left(X^2 - \frac{a^2b^2}{4k^2}\right) > 0,$$

avec

$$k^2 = b^2 - R^2.$$

Toutes ces indications permettent de tracer exactement la courbe. Nous la représentons pour $R < b$. Si $R = b$, ou $R > b$, même forme, sauf que les branches infinies comprises entre les asymptotes obliques ont disparu.

VASNIER.

Bonnes solutions : MM. J. Marchal ; R. Bouvaist ;
Assez bonnes solutions : MM. J. Haag, à Nancy ; Parrod, à Vesoul.

---

**1174.** — *Etant données deux quadriques homothétiques et concentriques, les cônes qui ont leurs sommets sur l'une et qui sont circonscrits à l'autre (les bases étant les coniques de contact) ont un volume constant.*

Soit M le sommet d'un cône circonscrit à une quadrique Q, M étant un point d'une quadrique $Q_1$ homothétique et concentrique à Q, et soient $k$ le rapport d'homothétie, $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées du point M. L'équation de la quadrique Q peut se représenter par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

celle de $Q_1$ est alors

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - k^2 = 0,$$

et l'on a

$$Q_0 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = k^2 - 1$$

D'autre part, le plan polaire du point M a pour équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0,$$

et la distance du point M à ce plan est donnée par

$$\delta = \frac{Q_0}{\sqrt{\Sigma \frac{x_0^2}{a^4}}} = \frac{k^2 - 1}{\sqrt{\Sigma \frac{x_0^2}{a^4}}}.$$

Le centre de la section faite dans Q par le plan polaire de M a pour coordonnées $\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0$, avec $\lambda = \frac{1}{Q_0 + 1} = \frac{1}{k^2}$.

Si nous portons les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, l'équation de la quadrique devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\lambda\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2}\right) + \lambda^2(Q_0 + 1) - 1 = 0,$$

et celle du plan polaire

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 0.$$

En tenant compte de cette équation, celle de la quadrique se simplifie et devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 0;$$

on est donc ramené à trouver l'axe d'une section centrale et, par suite, les carrés des longueurs des axes de cette section. Or on sait que l'équation qui donne les carrés des longueurs des demi-axes de la section faite par le plan

$$ux + vy + wz = 0$$

dans la quadrique

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} - 1 = 0$$

est

$$\frac{a'^2u^2}{\rho^2 - a'^2} + \frac{b'^2v^2}{\rho^2 - b'^2} + \frac{c'^2w^2}{\rho^2 - c'^2} = 0\,;$$

par conséquent,

$$\rho^2\rho'^2 = \frac{a'^2b'^2c'^2\Sigma u^2}{\Sigma a'^2u^2}\,;$$

ici on a donc

$$\rho^2\rho'^2 = \frac{a^2b^2c^2\dfrac{(k^2-1)^2}{k^4}\Sigma\dfrac{x_0^2}{a^4}}{\Sigma\dfrac{x_0^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad Q_0 + 1}.$$

L'aire de la section plane est alors

$$S = \pi\rho\rho' = \pi abc\frac{k^2-1}{k^3}\sqrt{\Sigma\frac{x_0^2}{a^4}},$$

et le volume V du cône circonscrit est

$$V = \frac{S\delta}{3} = \frac{\pi\delta\rho\rho'}{3} = \frac{\pi}{3}abc\frac{(k^2-1)^2}{k^3}\,;$$

donc ce volume est constant.

Remarques. — 1° La proposition s'étend à deux paraboloïdes ayant même axe et homothétiques.

2° Dans le cas des coniques, un théorème analogue a lieu : le cône est remplacé par le triangle ayant pour sommet le point M et pour base la corde qui détermine sa polaire dans une conique homothétique et concentrique, le volume du cône est remplacé par l'aire de ce triangle.

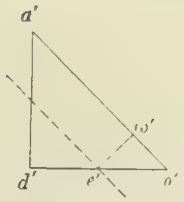
VASNIER et J. MARCHAL.

Bonnes solutions : MM. Dulimbert ; Javelot ; R. Bouvaist.

MM. Javelot et R. Bouvaist font remarquer que la transformation $x = aX$, $y = bY$, $z = cZ$ conserve la notion de volume et transforme les deux quadriques en deux sphères concentriques pour lesquelles le théorème est évident.

## GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

**1120.** — *Nous recevons la communication suivante relative à la détermination, par une construction simple, des points sur le contour apparent horizontal de la sphère dans l'épure du concours de l'École Polytechnique (1902).*



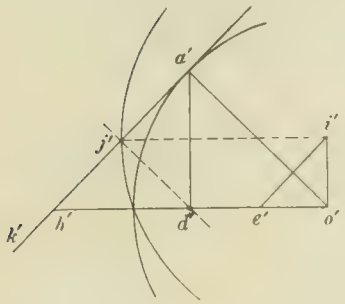

Soit $d'$ le point où la ligne de rappel du point $a'$ coupe $o'e'$. Je dis que la parabole, projection verticale de l'intersection, passe par $d'$. Il suffit, pour cela, de montrer que le milieu de $ad'$ est situé sur le diamètre conjugué des cordes verticales de la parabole.

Soit $e'$ le point où se projette verticalement la ligne des points doubles, et considérons la corde verticale menée par ce point dans la parabole : on sait que $e'$ doit être le milieu de cette corde (théorie des points doubles). Nous obtiendrons donc le diamètre

conjugué des cordes verticales en menant par $e'$ une parallèle à $o'a'$. Mais l'on a

$$o'e' = \sqrt{2},$$

$$o'd' = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$




Par suite $e'$ est le milieu de $o'd'$, et la parallèle à $o'a'$ passe bien par le milieu de $a'd'$.

On arrive encore au même résultat en déterminant les points sur le contour apparent horizontal de la sphère par une sphère auxiliaire de centre $i\ i'$ contenant le grand cercle de contour apparent. Le rayon de cette sphère auxiliaire égale $3\sqrt{2}$.

Or, si l'on mène par $i'$ la parallèle à $o'e'$, elle coupe $a'k'$ en un point $j'$ tel que $i'j' = e'h' = 3\sqrt{2}$. Mais d'autre part $j'$ est le milieu de $a'h'$.

J. R.

## CONCOURS DE 1903

### BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DES SCIENCES

#### Mathématiques.

**1231.** — Dans un plan rapporté à des coordonnées rectangulaires, le mouvement d'un point matériel est défini par les équations

$$x = 3t^2, \qquad y = 3t - t^3.$$

La masse du point matériel est 1 gr. ; l'unité de longueur est le centimètre, l'unité de temps est la seconde.

1° Former l'équation de la trajectoire. Déterminer l'époque à laquelle le mobile passe en un point de la trajectoire dont on donne les coordonnées $x_0$, $y_0$ ; le problème posé n'admet-il qu'une solution ?

La trajectoire forme une boucle ; calculer l'aire de cette boucle.

2° Déterminer, pour l'époque $t$, la vitesse, l'accélération totale, l'accélération tangentielle, l'accélération normale, le rayon de courbure de la trajectoire au point où se trouve le mobile, le travail accompli depuis l'origine du temps.

3° Soit, à l'époque $t$, (D) la droite qui contient l'accélération totale regardée comme un vecteur dont l'origine est le point M où se trouve le mobile à cette époque. Démontrer que la droite symétrique de la tangente en M par rapport à la droite (D) est parallèle à une direction fixe.

4° Montrer que la droite (D) reste normale à une parabole fixe dont l'axe des $x$ est l'axe de symétrie.

*(23 juin, de 8 h. à midi.)*

#### Sciences physiques.

*Physique.*

I. Définition de la capacité d'un condensateur. Calcul de la capacité d'un condensateur dont les armatures sont deux sphères concentriques.

II. — **1232.** — Un pendule compensé oscille devant le balancier d'une horloge battant exactement la seconde. On observe une première coïncidence à $1^h\,52^m\,37^s$ et une seconde à $2^h\,15^m\,6^s$, les deux pendules marchant dans le même sens, le pendule composé ayant pris de l'avance sur le balancier. La longueur du pendule synchrone du pendule composé est $99^{cm},11$. Le terme dû à l'amplitude est négligeable.

Quelle est l'intensité de la pesanteur en cet endroit ?

Au même endroit, la hauteur du baromètre est exactement $753^{mm},35$ à un certain moment, la température du mercure étant 18°6. Quelle est, en unités C. G. S. (baries) la pression atmosphérique à ce moment ?

Densité du mercure à 0° 13,596. Coefficient de dilatation absolue du mercure 0,00018.

*Chimie.*

I. Acide sulfhydrique.

II. — **1233**. — On fait passer un courant de chlore sec sur du bore et on recueille un liquide dont la densité de vapeur est 4,065.

On demande la formule du corps ainsi obtenu, étant donné qu'en en dissolvant 1 gramme dans de l'eau en excès, on obtient un liquide acide qui exige pour être saturé à l'héliantine $25^{cc},5$ d'une dissolution de soude contenant 40 grammes de NaOH au litre. $B = 11$, $Cl = 35,5$, $Na = 23$.

(*24 juin, de 8 h. à midi.*)

## ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

### Épure.

Prendre comme origine le centre de la feuille.

On donne les points

| | | | |
|---|---|---|---|
| SS' | $x = -6$, | $y = 12$, | $z = 6$, |
| $aa'$ | $x = -10$, | $y = 8$, | $z = 0$, |
| $o'_1$ | $x = 6$, | $y = 0$, | $z = 0$. |

On considère le cône de sommet SS' et dont la base dans le plan horizontal est une strophoïde droite qui a pour sommet $a$ et pour point double S.

Construire l'intersection de ce cône avec la sphère de centre SS', ayant pour rayon 6. Le point $o'_1$ étant considéré comme un point du plan horizontal, définit l'intérieur du cône. Représenter le solide commun au cône et à la sphère.

Le même solide sera figuré dans une projection verticale auxiliaire, telle que $o'_1$ soit la nouvelle projection verticale du sommet du cône.

On calculera en degrés ou grades, l'angle de la tangente à la projection verticale primitive de la courbe, au point le plus bas, avec la ligne de terre.

(*23 juillet, de 8 h. à midi.*)

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1234**. — On considère l'ellipse E qui a pour équation, rapportée à ses axes, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et un point M variable sur cette ellipse.

1° Équation de l'ellipse C qui admet pour axes la tangente MT et la normale MN à l'ellipse E et qui est tangente en O à $Oy$; la construire géométriquement; montrer que son grand axe conserve la même longueur.

2° Lieu des points de contact des tangentes à l'ellipse C qui sont parallèles à OM.

3° Lieu des foyers de l'ellipse C.

4° Résoudre les mêmes questions pour l'hyperbole H qui a pour axes MT et MN et qui est tangente en O à $Ox$. Enveloppe de ses asymptotes.

**1235**. — Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$, une droite $\Delta$ et un point I sur cette droite, on considère deux points variables de la droite, $M_1$, $M_2$, équidistants de I, que l'on projette sur les axes en $A_1$, $B_1$, $C_1$ et $A_2$, $B_2$, $C_2$, et on considère en outre un plan P coupant les axes aux points A, B, C tels que

$$OA = d\,\frac{OA_1}{OA_2}, \qquad OB = d\,\frac{OB_1}{OB_2}, \qquad OC = d\,\frac{OC_1}{OC_2},$$

$d$ étant une constante donnée.

1° Déterminer l'ordre et la classe de la surface $\Sigma$ enveloppe des plans P, et trouver les traces de cette surface sur les plans de coordonnées.

2° Montrer qu'il existe une infinité de systèmes ($\Delta$, I) qui conduisent à la même surface $\Sigma$. Trouver le lieu des droites $\Delta$ passant par un point donné, l'enveloppe des droites $\Delta$ qui sont contenues dans un plan donné, et, à chaque fois, le lieu des points I correspondants.

3° Montrer qu'à un plan P on peut associer un plan P' tel que les six points A, B, C, A', B', C' soient sur une même sphère S. Lieu des centres et enveloppe des sphères S. Enveloppe des plans de contact des sphères S avec leur enveloppe. Lieu des droites d'intersection des plans P et P'.

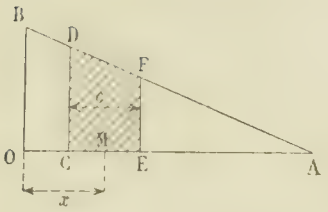
VASNIER.

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (Cours préparatoires, 1902).

### Algèbre.

**1163.** — *Etant donné un triangle rectangle* AOB *ayant pour côtés de l'angle droit* $OA = a$ *et* $OB = b$, *on mène au côté* OB *les deux parallèles* CD *et* EF, *comprises entre ce côté* OB *et le sommet* A, *et à la distance* $CE = c$ *l'une de l'autre.*




*Soit* $x$ *la distance du point* O *au milieu* M *de* CE.

1° *Déterminer* $x$ *de manière que le volume engendré par le trapèze* CDEF *en tournant autour de* OB *ait une valeur donnée* V.

2° *Discuter et déduire du résultat de la discussion le maximum et le minimum de* V.

*Appelons* $V_1$ *le maximum de* V *et* $d$ *la valeur correspondante de* OC.

3° *Prenant* $b = \frac{c}{16}$, *déterminer* $c$ *en fonction de* $a$ *de manière que* $V_1$ *soit égal au volume de la sphère agant* $d$ *pour diamètre.*

4° *Indiquer le nombre des racines de l'équation en* $c$ *ainsi obtenue qui conviennent à la question.*

Le volume V peut être considéré comme la différence des volumes engendrés par les deux trapèzes OEFB, OCDB.

$$\text{Vol. OEFB} = \pi.\overline{OE}^2 \times EF - \frac{1}{3}\pi.\overline{OE}^2(OB - EF).$$

$$\text{Vol. OCDB} = \pi.\overline{OC}^2 \times CD + \frac{1}{3}\pi.\overline{OC}^2(OB - CD);$$

or $OE = x + \frac{c}{2}$, $OC = x - \frac{c}{2}$; EF, CD sont les ordonnées des points F, D de la droite AB $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0\right)$ qui correspondent aux abscisses $x \pm \frac{c}{2}$

$$EF = b\left(1 - \frac{x + \frac{c}{2}}{a}\right), \qquad CD = b\left(1 - \frac{x - \frac{c}{2}}{a}\right);$$

on en déduit

$$V = \pi\left(x + \frac{c}{2}\right)^2\left[b - \frac{2b}{3a}\left(x + \frac{c}{2}\right)\right] - \pi\left(x - \frac{c}{2}\right)^2\left[b - \frac{2b}{3a}\left(x - \frac{c}{2}\right)\right],$$

et tous calculs faits

$$V = \frac{2\pi bc}{a}\left[-x^2 + ax - \frac{c^2}{12}\right].$$

Si V est donné, on aura pour déterminer l'inconnue $x$ une équation du second degré

$$x^2 - ax + \frac{c^2}{12} + \frac{aV}{2\pi bc} = 0.$$

D'après l'énoncé, une valeur réelle de $x$ ne peut convenir que si l'on a

$$0 < x - \frac{c}{2} < x + \frac{c}{2} < a,$$

c'est-à-dire

$$\frac{c}{2} < x < a - \frac{c}{2}.$$

1° Condition de réalité :

$$a^2 - \frac{c^2}{3} - \frac{2aV}{\pi bc} \geqslant 0,$$

d'où

$$V \leqslant \frac{\pi bc}{2a}\left(a^2 - \frac{c^2}{3}\right).$$

2° Cette condition remplie, l'équation fournira pour $x$ deux valeurs réelles, positives et équidistantes de $\frac{a}{2}$, par suite correspondant à des positions du point M symétriques l'une de l'autre par rapport au milieu de OA ; ces valeurs ne sont acceptables qu'à la condition d'être comprises dans l'intervalle $\frac{c}{2}$, $a - \frac{c}{2}$. Cela exige que l'on ait :

$$f\left(\frac{c}{2}\right) = f\left(a - \frac{c}{2}\right) = \frac{c^2}{3} - \frac{ac}{2} + \frac{aV}{2\pi bc} \geqslant 0,$$

ou

$$V \geqslant \pi \frac{bc^2}{a}\left(a - \frac{2}{3}c\right).$$

En résumé, le problème n'est possible que si l'on a :

$$\frac{\pi bc^2}{a}\left(a - \frac{2}{3}c\right) \leqslant V \leqslant \frac{\pi bc}{2a}\left(a^2 - \frac{c^2}{3}\right).$$

Pour $V = \frac{\pi bc^2}{a}\left(a - \frac{2}{3}c\right)$ (minimum), l'une des racines est $x' = \frac{c}{2}$ (CD se confond avec OB); l'autre est $x'' = a - \frac{c}{2}$ (le point E est en A, le trapèze DCEF se réduit à un triangle).

Dans le cas du maximum, $V = \frac{\pi bc}{2a}\left(a^2 - \frac{c^2}{3}\right)$, les deux racines sont confondues :

$$x' = x'' = \frac{a}{2},$$

le point M est au milieu de OA et on a $OC = d = \frac{a - c}{2}$.

Il est bon de remarquer que la valeur trouvée pour le minimum est toujours inférieure à la valeur trouvée pour le maximum. En effet, l'inégalité

$$\frac{\pi bc^2}{a}\left(a - \frac{2}{3}c\right) < \frac{\pi bc}{2a}\left(a^2 - \frac{c^2}{3}\right)$$

se réduit à

$$a^2 - 2ac + c^2 \geqslant 0$$

toujours vérifiée.

Soit $b = \frac{c}{16}$; pour que

$$V_1 = \frac{\pi c^2}{32a}\left(a^2 - \frac{c^2}{3}\right) = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi\frac{(a-c)^3}{8},$$

il faut prendre $c < a$ et racine de l'équation :

$$c^2(3a^2 - c^2) = 2a(a - c)^3.$$

Cette équation

$$f(c) \equiv c^4 - 2ac^3 + 3a^2c^2 - 6a^3c + 2a^4 = 0,$$

du quatrième degré, complète et ne présentant que des variations, ne peut admettre que des racines positives (0, 2 ou 4).

La dérivée

$$f'(c) = 4c^3 - 6ac^2 - 6a^2c - 6a^3$$

est complète et du troisième degré. Mais la dérivée seconde

$$f''(c) = 12c^2 - 12ac + 6a^2 = 6(c^2 - ac + a^2)$$

n'a pas de racine. La suite de Rolle pour l'équation dérivée

$$f'(c) = 0$$

ne comprenant qu'un intervalle ($-\infty$ à $+\infty$), cette équation a une racine réelle seulement, $\alpha$, comprise entre $a$ et $2a$. L'équation $f(c) = 0$ a donc au plus deux racines réelles, d'ailleurs positives; pour séparer ces racines, il suffirait de substituer dans $f(c)$ les nombres $0$, $\alpha$, $+\infty$. En substituant $0$, $a$, $2a$ et $+\infty$ on met en évidence une racine comprise entre $0$ et $a$ qui convient au problème, l'autre entre $a$ et $2a$ qui ne convient pas. Il y a donc une seule valeur de $c$ répondant à la question.

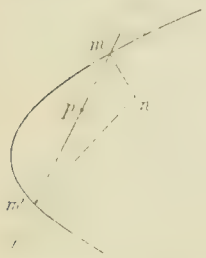
P. L.

Bonne solution de M. F. Pegomier, à Carcassonne.

---

## Géométrie analytique.

**1164.** — *Lieu du point de concours $n$ des normales à une parabole aux points $m$ et $m'$ où cette courbe est rencontrée par une sécante $mm'$ qui passe par un point fixe $p$.*




Soient $x_0, y_0$ les coordonnées du point fixe $p$, $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du point $n$. L'hyperbole d'Apollonius relative au point $n$ aura pour équation

$$xy - (\alpha - p)y - p\beta = 0,$$

et l'équation générale des coniques passant par les points de rencontre de cette hyperbole avec la parabole donnée sera de la forme

$$(1) \qquad y^2 - 2px + \lambda[xy - (\alpha - p)y - p\beta] = 0.$$

L'un des trois systèmes de sécantes communes sera formé par la droite $mm'$ associée à une parallèle à l'axe de la parabole. Or les directions asymptotiques des coniques du faisceau sont données par l'équation

$$y^2 + \lambda xy = 0 \qquad (y = 0 \qquad y + \lambda x = 0).$$

La droite $mm'$ aura pour équation $y - y_0 + \lambda(x - x_0) = 0$ et la seconde sécante sera représentée par une équation de la forme $y = \mu$. Identifions l'équation (1) avec l'équation

$$(y - \mu)(y - y_0 + \lambda(x - x_0)) = 0,$$

il vient :

$$2p = \lambda\mu,$$
$$\lambda(\alpha - p) = \mu + y_0 + \lambda x_0,$$
$$-\lambda p\beta = \mu(y_0 + \lambda x_0).$$

En éliminant $\lambda$ et $\mu$ entre ces trois équations, on obtiendra l'équation du lieu. Remplaçant $\lambda\mu$ par $2p$ dans la troisième, on aura pour calculer $\lambda$ et $\mu$ deux équations du premier degré :

$$\lambda(x_0 - \alpha + p) + \mu + y_0 = 0,$$
$$\lambda p\beta + \mu y_0 + 2px_0 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{y_0^2 - 2px_0}{p\beta + y_0\alpha - y_0(x_0 + p)},$$

$$\mu = -p\frac{y_0\beta + 2x_0\alpha - 2x_0(x_0 + p)}{p\beta + y_0\alpha - y_0(x_0 + p)}.$$

Portant dans $\lambda\mu = 2p$, il vient

$$2[p\beta + y_0\alpha - y_0(x_0 + p)]^2 + (y_0^2 - 2px_0)[y_0\beta + 2x_0\alpha - 2x_0(x_0 + p)] = 0.$$

En remplaçant $\alpha$ et $\beta$ par des coordonnées courantes on aura l'équation cherchée

$$2[p(y - y_0) + y_0(x - x_0)]^2 + (y_0^2 - 2px_0)[y_0 y + 2x_0(x - x_0 - p)] = 0,$$

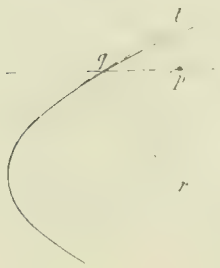
c'est l'équation d'une parabole ; on a en évidence le diamètre

$$p(y - y_0) + y_0(x - x_0) = 0,$$

qui passe par le point $p(x_0, y_0)$ et la tangente à l'extrémité de ce diamètre

$$y_0 y + 2x_0(x - x_0 - p) = 0.$$

Ces deux droites se coupent sur l'axe des $x$, au point $y = 0$, $x = x_0 + p$. Ce point correspond au cas où la corde $mm'$ étant perpendiculaire à l'axe de la parabole, les normales aux points $m$ et $m'$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à cet axe. Le second point de rencontre du lieu avec l'axe des $x$ correspond au cas où la corde $mm'$ passe par le sommet de la parabole. Le point $n$ ne peut être rejeté à l'infini que si l'un des points $m$ ou $m'$ est rejeté à l'infini, ce qui exige que la corde $mm'$ soit parallèle à l'axe de la parabole ; dans ce cas le point $m'$ est rejeté à l'infini, le point $m$ est en $q$, le point $n$ est rejeté à l'infini dans la direction $qr$ perpendiculaire à la tangente $qt$ au point $q$ (coefficient angulaire de $qt = \frac{p}{y_0}$; coefficient angulaire de la normale $qr = -\frac{y_0}{p}$; c'est le coefficient angulaire du diamètre mis en évidence plus haut).




Remarque. — Désignant par $(x, y)$ les coordonnées du point $n$ et par $(\alpha, \beta)$ les coordonnées du pôle tangentiel de la droite $mm'$, on a

$$x = p - \alpha + \frac{2\beta^2}{p}, \tag{1}$$

$$y = -\frac{2\alpha\beta}{p}. \tag{2}$$

Ecrivant que la droite $mm'$, polaire du point $(\alpha, \beta)$, passe par le point $x_0 y_0$, il vient

$$\beta y_0 - p(x_0 + \alpha) = 0. \tag{3}$$

En éliminant $\alpha, \beta$ entre les équations (1), (2), (3) on aurait l'équation du lieu.

P. L.

Bonne solution de M. R. Bouvaist.

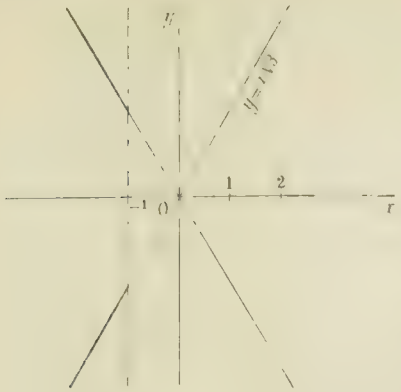
Autres solutions : MM. J. Haag, à Pont-à-Mousson ; T. Lemoyne, à Troyes ; J.-B. Martin, à St-Etienne (Valbenoite) ; M. Treillou.

## ALGÈBRE

**1169.** — *Déterminer tous les systèmes de valeurs réelles de $x$ et de $y$ pour lesquels l'expression $(x + y\sqrt{-1})^3$ est réelle et supérieure à 8.*

*Ayant tracé deux axes rectangulaires, indiquer sur la figure les points dont ces valeurs de $x$ et de $y$ sont les coordonnées.*

L'expression $(x + y\sqrt{-1})^3$ s'écrit $x^3 - 3xy^2 + \sqrt{-1}(3x^2y - y^3)$ ; pour qu'elle soit réelle, il faut




déjà que $3x^2y - y^3$ soit nulle et nous devrons avoir ensuite $x^3 - 3xy^2 > 8$. La question est donc résolue par l'équation

$$3x^2y - y^3 = 0,$$

accompagnée de la restriction

$$x^3 - 3xy^2 > 8;$$

or l'équation trouvée se décompose en deux : $y = 0$ et $y^2 = 3x^2$; pour $y = 0$, l'inégalité devient

$$x^3 > 8 \qquad \text{ou} \qquad x > 2;$$

donc tous les points de $Ox$, au delà du point d'abscisse 2 et du côté des $x$ positifs, conviennent; pour $y^2 = 3x^2$, l'inégalité devient

$$-8x^3 > 8 \qquad \text{ou} \qquad x^3 < -1,$$

elle donne $x < -1$; donc tous les points des deux droites

$$y = \pm x\sqrt{3}$$

situés à gauche de la droite $x = -1$ conviennent.

La figure ci-dessus renferme tous les résultats indiqués.

R. BOUVAIST.

Bonne solution : M. F. Pégorier, à Carcassonne.
Assez bonnes solutions : MM. Canet, à Nancy, et R. Javelot.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

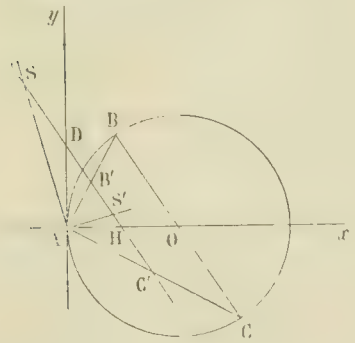
**1171.** — *Par un point fixe A d'un cercle donné on mène deux cordes rectangulaires variables* AB *et* AC.

1° *Le lieu des centres de similitude des cercles de diamètres* AB *et* AC *est une strophoïde droite.*

2° *Le lieu des centres de similitude du cercle donné et du cercle de diamètre* AB *est une quartique. Construire la courbe.*

**1.** Soient B′ et C′ les milieux de AB et AC; les cercles décrits sur ces cordes comme diamètres ont pour centres les points B′ et C′, leurs rayons sont égaux à AB′ et AC′, et par suite leurs centres de similitude sont sur la droite B′C′ et divisent B′C′ dans le rapport $\frac{AB'}{AC'}$. Il en résulte que ces points sont à l'intersection de la droite B′C′ et des bissectrices de l'angle BAC.

Prenons pour axe des $x$ le diamètre du point A, pour axe des $y$ la tangente au cercle en ce point; l'équation du cercle est alors $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$. La droite BC passe par le centre O du cercle, puisque l'angle BAC est droit. Désignons par $y = m(x - R)$ son équation. Nous avons facilement l'équation de l'ensemble des droites AB et AC en éliminant la variable d'homogénéité entre les équations du cercle et de la droite BC; nous trouvons ainsi




$$\frac{x^2 + y^2}{2Rx} = \frac{mx - y}{mR}$$

ou

$$mx^2 - 2xy - my^2 = 0,$$

et l'ensemble des bissectrices de ces deux droites a pour équation

$$(1) \qquad x^2 + 2mxy - y^2 = 0.$$

La droite B′C′ est parallèle à BC et passe par le milieu H de AO, son équation est donc $y = m\left(x - \frac{R}{2}\right)$.

Pour avoir l'équation du lieu, il suffit d'éliminer $m$ entre cette équation et l'équation (1). Ce calcul est immédiat et donne

$$\frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{y}{x - \frac{R}{2}},$$

ou, en simplifiant,

$$x(x^2 + y^2) + \frac{R}{2}(y^2 - x^2) = 0.$$

Cette équation représente une strophoïde droite ayant le point A pour point double et le point H pour sommet.

**2.** Dans cette nouvelle question, les points du lieu sont à l'intersection de la droite OB′ et des bissectrices de l'angle OAB. Soit $\lambda$ le coefficient angulaire de AB; OB′ étant perpendiculaire à AB a pour équation

$$(2) \qquad y = -\frac{1}{\lambda}(x - R).$$

Les bissectrices de l'angle OAB ont pour équation

$$y = \frac{y - \lambda x}{\pm\sqrt{1 + \lambda^2}},$$

ou

$$(3) \qquad \lambda x^2 - 2xy - \lambda y^2 = 0.$$

Éliminons $\lambda$ entre (2) et (3), nous avons l'équation du lieu; nous obtenons ainsi

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2} = -\frac{x - R}{y},$$

ou

$$x(x^2 + y^2) - R(x^2 - y^2) = 0,$$

équation qui représente une strophoïde droite ayant le point A pour point double et le point O pour sommet.

M. TREILLOU.

**Solution géométrique.** — **1.** Les centres de similitude S et S′ des cercles qui ont pour diamètres AB et AC sont à l'intersection de la ligne des centres B′C′ et des bissectrices de l'angle BAC. Soit D le point de rencontre de B′C′ et de A$y$.

Or nous avons

$$\widehat{DAS'} = \widehat{DAB'} + \widehat{B'AS'} = \widehat{ACB} + 45^\circ,$$

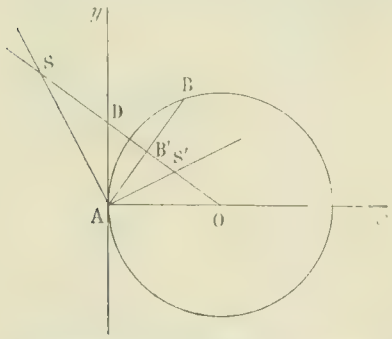
et

$$\widehat{AS'D} = \widehat{AC'B'} + \widehat{C'AS'} = \widehat{ACB} + 45^\circ;$$

par suite $\widehat{DAS'} = \widehat{AS'D}$, le triangle DAS′ est isocèle et comme AS est perpendiculaire à AS′, on a

$$DS = DS' = AD,$$

ce qui montre que le lieu des points S et S′ est la strophoïde de sommet H et de point double A.




**2.** Les centres de similitude du cercle donné et du cercle de diamètre AB sont les pieds des bissectrices de l'angle OAB sur la ligne des centres OB′. Le triangle ADS′ est encore isocèle; en effet, nous avons

$$\widehat{DAS'} = \widehat{DAB} + \frac{\widehat{OAB}}{2} = \widehat{DOA} + \frac{\widehat{OAB}}{2}$$

et

$$\widehat{DS'A} = \widehat{DOA} + \frac{\widehat{OAB}}{2};$$

par suite $\widehat{DAS'} = \widehat{DS'A}$, $AD = DS' = DS$, et le lieu des points S et S′ est la strophoïde droite qui a pour point double le point A et pour sommet le point O.

PARROD, à Vesoul.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist ; J. Haag ; H. Lefevre ; J. Marchal ; J.-B. Martin, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne ; P. Tribier ; L. Sade, lycée de Marseille ; H. Vial.

**1189.** — *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$a = x^y,$$

*$a$ désignant une constante positive (qu'on supposera plus grande que 1, pour fixer les idées). Déterminer le point d'inflexion et la tangente en ce point.*

L'équation proposée est équivalente à l'équation $y = \log_a a$ ou $y = \frac{1}{\log_a x}$. C'est sous cette forme que nous allons étudier la fonction $y$ en supprimant l'indice $a$; dans tout ce qui suivra, $\log x$ désignera le logarithme de $x$ dans le système de base $a$.

Puisque $a$ est plus grand que 1, $\log x$ est une fonction croissante, donc $y$ est décroissante, et des variations connues de $\log x$, on déduit sans peine celles de $y$, qu'on peut représenter dans le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | | $1-\varepsilon$ | $1+\varepsilon$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | décroît | $-\infty$ | $+\infty$ | décroît | $0$ |

La courbe correspondante présente un point d'arrêt à l'origine. Pour déterminer la tangente en ce point, cherchons la limite du rapport $\frac{y}{x}$ quand $x$ tend vers 0. Nous avons

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x \log x};$$

or on sait que $x \log x$ a pour limite zéro pour $x = 0$, donc $\frac{y}{x}$ croît indéfiniment ; la tangente à l'origine est $0y$.

La droite $x = 1$ est asymptote, et on aperçoit l'existence d'un point d'inflexion que l'on peut déterminer en cherchant la valeur de $x$ qui annule $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\log e}{x(\log x)^2}$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\log e}{x^2(\log x)^3}[\log x + 2\log e].$$

Pour que la dérivée seconde de $y$ s'annule, il faut qu'on ait $\log x = -2\log e$ ou $\log x = \log \frac{1}{e^2}$ ou $x = \frac{1}{e^2}$. De plus, quand $x$ traverse cette valeur, $\frac{d^2y}{dx^2}$ change de signe ; le point M correspondant est donc bien un point d'inflexion. Les coordonnées de ce point sont $x_0 = \frac{1}{e^2}$, $y_0 = -\frac{1}{2\log e}$.

Calculons le coefficient angulaire de la tangente en ce point. La valeur de $\frac{dy}{dx}$ pour $x = \frac{1}{e^2}$ est $-\frac{e^2}{4\log e}$ ou $\frac{y_0}{2x_0}$. Par suite, pour construire la tangente au point M, nous mènerons MP perpendicu-

laire sur $Ox$, nous joindrons le point O au milieu I de MP, et la tangente au point M sera parallèle à OI.

J. HAAG, à Nancy.

Bonnes solutions par MM. R. Bouvaist ; R. Javelot, à Givet ; J. Maréchet, lycée de Saint-Etienne ; P. Tribier.

## PHYSIQUE

**1158.** — *Deux boules métalliques dont la distance des centres est d centimètres sont chargées positivement, la première d'une masse électrique* Q, *la seconde d'une masse* $q$. *Une balle de sureau est assujettie à se déplacer sur la ligne des centres. Déterminer la position d'équilibre.*

*Application :* $d = 50^{\text{cm}}$, $+Q = 16$, $+q = 4$.

(*École centrale*, 2e *session* 1902.)

Soient A et B les boules respectivement chargées de Q et de $q$, M la position d'équilibre de la balle de sureau, et $x$ le segment AM compté positivement dans le sens AB. Pour déterminer $x$, écrivons que les forces produites par les boules A et B en M sont égales : alors les influences se contrebalanceront et la balle de sureau restera neutre. On sait que les forces sont proportionnelles aux masses et inversement proportionnelles aux carrés des distances; nous aurons donc

$$\frac{Q}{x^2} = \frac{q}{(d-x)^2}.$$

Pour que les forces soient de signes contraires, la balle de sureau doit être entre A et B ; $x$ et $d-x$ sont positifs et on peut écrire

$$\frac{\sqrt{Q}}{x} = \frac{\sqrt{q}}{d-x}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}+\sqrt{q}}\,d.$$

En faisant l'application numérique, on obtient

$$x = 33\frac{1}{3}.$$

J. HAAG, à Nancy.

La position calculée ci-dessus est une position d'équilibre instable et la balle de sureau, écartée infiniment peu de cette position, va se précipiter sur l'une des boules métalliques, par exemple sur celle qui porte la charge Q, et prendre une partie $k$Q de cette charge, la fraction $k$ dépendant des dimensions respectives de la boule et de la balle. Celle-ci sera alors repoussée d'un côté par la charge $(1-k)Q$ restée sur la première boule, de l'autre côté par la charge $q$ de l'autre boule ; il y aura équilibre et, cette fois, équilibre stable, à une distance $y$ telle qu'on ait

$$\frac{(1-k)Q}{y^2} = \frac{q}{(d-y)^2},$$

d'où

$$y = \frac{\sqrt{1-k}\,\sqrt{Q}}{\sqrt{1-k}\,\sqrt{Q}+\sqrt{q}}\,d = \frac{\sqrt{1-k}}{2\sqrt{1-k}+1}\,100.$$

Par exemple, si la boule et la balle ont même dimension, $k = \frac{1}{2}$ et il vient

$$y = 50(2-\sqrt{2}) = 29^{\text{cm}},3.$$

## CONCOURS DE 1903 (*suite*)

### ÉCOLE CENTRALE (**Première session**).

*Mathématiques.*

STATIQUE.

**1236.** — 1° Enoncer sans démonstration les conditions d'équilibre communes à tous les systèmes materiels libres.

2° Deux barres articulées en A à une hauteur H au-dessus d'un plan horizontal poli, sur lequel posent leurs pieds B et C, sont maintenues dans un plan vertical où elles sont figurées par les lignes droites $BA = l$, $CA = l'$. Elles sont réunies par un fil horizontal à une hauteur $h$ au-dessus du plan horizontal ; la barre BA porte un poids P attaché en un point D tel que $BD = \alpha . BA$.

Déterminer la tension du fil et les réactions de l'articulation, en négligeant le poids des barres et en les supposant rigides, en négligeant le poids du fil et en le supposant inextensible.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET CINÉMATIQUE.

**1237.** — On donne deux axes quelconques $Ox$, $Oy$, un point $A(x = a)$ sur l'axe des $x$, un point $B(y = b)$ sur l'axe des $y$.

1° Former l'équation de la parabole tangente aux axes respectivement aux points A et B.

2° Un voyageur parcourt l'axe des $y$ d'une vitesse constante $v$, dans le sens positif. Au moment où il part de l'origine des coordonnées, son chien part du point A se dirigeant constamment vers son maitre qu'il rejoint au point B, après avoir parcouru l'arc de parabole AB. On demande les équations des projections sur les axes du mouvement du chien et la vitesse minimum de ce dernier en supposant les axes rectangulaires.

(*1 juillet, de 7 h. à 11 h.*)

*Physique et Chimie.*

I. — Oscillation d'un barreau aimanté dans un champ uniforme. Comparaison des moments magnétiques des barreaux et des intensités de champs.

II. — **1238.** — On mélange $V^{gr}$ de vapeur d'eau à 100°, $E^{gr}$ d'eau à $t°$ et $G^{gr}$ de glace à zéro ; quelle sera la température $x$ de l'eau qu'on obtiendra? Quel doit être le rapport $\frac{V}{G}$ pour que la température finale soit $t°$?

Chercher $x$ avec les données suivantes : $V = 30$, $E = 2000$, $G = 130$, $t = 10$.

Chaleur de vaporisation $L = 537$ ; chaleur de fusion $l = 80$.

III. — Eau régale.

IV. — **1239.** — Une salle de dimensions $6^m \times 4^m,5 \times 5^m$ renferme de l'air pur et sec.

On mélange à cet air le gaz provenant de la réaction, à chaud, d'un certain poids de ferrocyanure de potassium anhydre sur un excès d'acide sulfurique concentré. On prélève 100 litres de l'air ainsi vicié, et on les fait passer lentement dans un tube étroit A contenant des cristaux d'anhydride iodique, puis dans un tube semblable B, rempli de cuivre pulvérulent très pur.

Les deux tubes A et B sont disposés dans une étuve chauffée à 100° environ, et le tube à cuivre a été taré avant l'expérience. Quand elle est achevée, son poids a augmenté de 22 milligrammes 858.

On demande : 1° D'expliquer et de formuler les réactions qui se passent entre le ferrocyanure et l'acide sulfurique concentré d'une part, et dans chacun des tubes A et B d'autre part;

2° Quelle est la proportion, en volume, du gaz étranger mélangé à l'air de la salle ;

3° Quel poids de ferrocyanure anhydre a été décomposé.

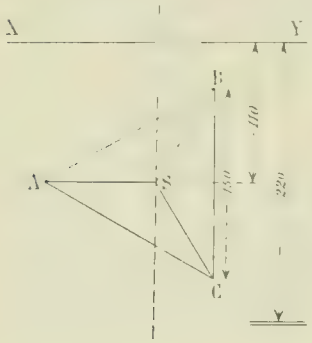
Pour simplifier, on supposera les gaz mesurés dans les conditions normales, et on ne fera pas de corrections. (Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.)

(*1 juillet, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

*Géométrie descriptive.*

INTERSECTION DE *trois* CÔNES. — SOLIDE COMMUN.

**1240**. — Un tétraèdre régulier a sa base ABC dans le plan horizontal et son arête SA parallèle au plan vertical. Les trois arêtes SA, SB, SC de ce tétraèdre sont respectivement les axes de trois cônes de révolution ayant comme sommets les trois points A, B et C. Le demi-angle au sommet de chacun de ces trois cônes est de 30°.




On demande, après avoir construit les projections des intersections de ces trois surfaces deux à deux, de représenter par ses deux projections le solide commun.

Titre extérieur : Géométrie descriptive. — Titre intérieur : Solide commun à trois cônes.

Cadre de 270$^{mm}$ sur 450$^{mm}$. — Ligne de terre XY à 220$^{mm}$ du côté inférieur du cadre. — Côté du tétraèdre 150$^{mm}$. — Eloignement du point S, 110$^{mm}$.

La projetante de S se confond avec la ligne médiane parallèle aux grands côtés du cadre.

(*5 juillet, de 7 h. à 11 h.*)

*Trigonométrie.*

PROBLÈME.

**1241**. — Dans un triangle ABC on connaît l'angle A, le périmètre $2p$ et le rayon $r$ du cercle inscrit.

1° Calculer les tangentes des moitiés des angles B et C.

2° Trouver les limites du rapport $\frac{r}{p}$ pour que le problème soit possible.

3° Construire géométriquement le triangle ABC et discuter.

4° Faire concorder les conditions de possibilité obtenues dans les deux méthodes.

CALCUL.

**1242**. — Calculer les arcs positifs, inférieurs à 360°, qui vérifient la formule

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{a^2}\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{3}\beta}.$$

$a = 0{,}371258$, $\alpha = 141°37'43''$, $\beta = 104°13'28'',5$.

(*5 juillet, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

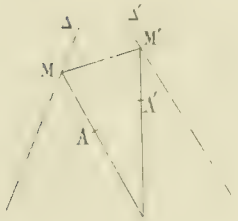
## QUESTIONS PROPOSÉES

**1243**. — On considère une ellipse et son cercle principal ; un rayon mené par le centre O de l'ellipse rencontre d'un même côté du grand axe l'ellipse et le cercle, respectivement en M et P. Trouver et construire la courbe lieu du point de rencontre de la normale en M à l'ellipse avec la parallèle au petit axe menée par le point P.

E.-N. BARISIEN.

**1244**. — Les deux extrémités d'un segment vu d'un point fixe O sous un angle droit glissent sur deux droites fixes Δ et Δ'. Trouver l'enveloppe de la droite qui porte ce segment et le lieu de son milieu.

E.-N. BARISIEN.




**1245**. — On considère deux droites fixes Δ, Δ' et deux points fixes A et A'. On prend sur ces droites des points M et M' tels que $\frac{AM}{A'M'} = k$, et on demande le lieu du point de rencontre des droites AM, A'M', ainsi que l'enveloppe de la droite MM'.

E.-N. BARISIEN.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

13e Année. N° 12 Septembre 1903.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ

**qui servent à la recherche des plans principaux d'une surface du second ordre ou à l'étude de l'intersection de deux coniques. — Discussion algébrique complète de ces équations.**

1. La méthode que je vais exposer pour l'étude de ces équations repose essentiellement sur deux théorèmes bien connus.

Le premier est celui-ci :

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction du second degré, homogène et à $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soit la somme des carrés de fonctions, en nombre inférieur à $n$, linéaires, homogènes et indépendantes de ces variables, est que les $n$ dérivées partielles soient nulles pour des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui ne soient pas toutes nulles.*

Le second théorème est celui-ci :

*La condition nécessaire et suffisante pour que $n$ équations linéaires et homogènes à $n$ inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient vérifiées pour des valeurs des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui ne soient pas toutes nulles, est que le déterminant des coefficients des inconnues dans ces équations soit nul.*

J'admettrai ces deux théorèmes, qui sont aujourd'hui classiques, et je vais étudier séparément chacune des trois questions que je me suis proposées.

2. *Recherche des plans principaux dans une surface du second ordre.*

Je désigne par $\varphi(x, y, z)$ la fonction homogène et du second degré :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

et par

$$\varphi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

l'équation générale des surfaces du second ordre rapportées à trois axes de coordonnées rectangulaires.

J'appelle $x, y, z$ les coordonnées d'un point pris sur une corde principale menée par l'origine des coordonnées, et je désigne par X, Y, Z les coordonnées courantes. Alors, les équations de cette corde principale sont :

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

et l'on a, pour équation du plan principal correspondant :

$$\frac{1}{2}\varphi'_x X + \frac{1}{2}\varphi'_y Y + \frac{1}{2}\varphi'_z Z + Cx + C'y + C''z = 0,$$

à condition que $x, y, z$ vérifient les relations suivantes :

$$\frac{\frac{1}{2}\varphi'_x}{x} = \frac{\frac{1}{2}\varphi'_y}{y} = \frac{\frac{1}{2}\varphi'_z}{z}.$$

C'est donc de la résolution de ces équations que dépend la question posée. Mais le probleme se résout d'une façon plus symétrique et bien plus élégante si l'on introduit une nouvelle inconnue S, qui représentera la valeur commune des trois rapports écrits plus haut.

On obtiendra alors les trois équations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi'_x - Sx \equiv (A - S)x + B''y + B'z = 0, \\ \frac{1}{2}\varphi'_y - Sy \equiv B''x + (A' - S)y + Bz = 0, \\ \frac{1}{2}\varphi'_z - Sz \equiv B'x + By + (A'' - S)z = 0 ; \end{cases}$$

d'après la nature même des inconnues $x, y, z$, ces équations doivent donner pour $x, y, z$ des valeurs qui ne soient pas toutes trois nulles ; il faudra donc que le déterminant des coefficients de ces trois lettres dans les équations (1) soit nul, et l'on obtiendra ainsi une équation du troisième degré qui donne les valeurs de S :

$$(2)\quad \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0.$$

Ces valeurs de S étant calculées, les équations (1) donnent pour chacune d'elles une direction principale ou une infinité, et le plan principal s'obtient aisément à chaque fois, surtout en remarquant que son équation se simplifie et s'écrit :

$$(3)\quad S(xX + yY + zZ) + Cx + C'y + C''z = 0.$$

Je remarque maintenant que l'équation (2) exprime que la différence :

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2),$$

est la somme des carrés de deux fonctions au plus, linéaires, homogènes et indépendantes de $x, y, z$ ; de plus, si l'on suppose les coefficients de $\varphi(x, y, z)$ réels, et c'est le cas dans lequel je me place, l'équation (2) a nécessairement une racine réelle $S_0$, puisque cette équation est du troisième degré. Pour cette racine réelle $S_0$, on a donc :

$$(4)\quad \varphi(x, y, z) - S_0(x^2 + y^2 + z^2) \equiv P^2 + P'^2,$$

identité dans laquelle P et P' désignent deux fonctions linéaires, homogènes de $x, y, z$ :

$$P \equiv ax + by + cz,$$
$$P' \equiv a'x + b'y + c'z.$$

Il faut que les coefficients du second membre de l'identité (4) soient réels ; donc les coefficients $a, b, c$ seront réels ou les produits par $i$ de nombres réels, il en sera de même de $a', b' c'$ ; on peut même affirmer qu'un seul groupe de ces coefficients pourra être imaginaire ; car, si les deux groupes se trouvaient de cette nature, il n'y aurait qu'à reprendre la question en changeant les signes de tous les coefficients de $\varphi(x, y, z)$ et cela serait évité. J'ai donc le droit de supposer $a, b, c$ réels et $a', b' c'$ réels aussi ou égaux à des nombres réels, multipliés par l'imaginaire $i$.

Cela posé, on peut mettre sous une forme remarquable l'équation du second degré qui donne les deux autres racines : il suffit de poser $S = S_0 + s$ et d'exprimer que la différence :

$$\varphi(x, y, z) - (S_0 + s)(x^2 + y^2 + z^2) \equiv P^2 + P'^2 - s(x^2 + y^2 + z^2),$$

est une somme des carrés de deux fonctions linéaires et homogènes en $x, y, z$. Cela s'exprimera en annulant les dérivées partielles relatives à $x, y, z$, et en exprimant que les cinq équations :

$$\begin{aligned} sx &= aP + a'P', \\ sy &= bP + b'P', \\ sz &= cP + c'P', \\ P &= ax + by + cz, \\ P' &= a'x + b'y + c'z, \end{aligned}$$

sont satisfaites pour des valeurs des lettres $x, y, z, P, P'$, qui ne soient pas toutes nulles; or, si on multiplie les trois premières équations, soit par $a, b, c$, soit par $a', b', c'$, et qu'on ajoute à chaque fois, on obtient :

$$(s - a^2 - b^2 - c^2)P = (aa' + bb' + cc')P',$$
$$(aa' + bb' + cc')P = (s - a'^2 - b'^2 - c'^2)P';$$

d'où l'on conclut l'équation qui donne $s$ :

$$(5) \qquad s^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2)s + (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 = 0.$$

Cette équation a toujours ses deux racines réelles; car, si $a', b', c'$ sont réels, la quantité placée sous le radical est positive :

$$(a^2 + b^2 + c^2 - a'^2 - b'^2 - c'^2)^2 + 4(aa' + bb' + cc')^2;$$

si $a', b', c'$ contiennent en facteur l'imaginaire $i$, le terme constant de l'équation (5) est négatif, d'après l'identité de Lagrange; donc on a le théorème suivant :

Théorème I. — *L'équation* (2) *a toutes ses racines réelles.*

On peut donc supposer que dans tous les calculs qui précèdent, $S_0$ est l'une quelconque des racines de l'équation (2); si l'on veut qu'elle soit racine double, il faudra que l'équation (5) ait une racine nulle, c'est-à-dire que la condition :

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 = 0,$$

soit remplie; d'après les remarques que nous avons faites, cette condition entraîne :

$$a' = 0, \qquad b' = 0, \qquad c' = 0,$$

ou bien :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

et l'on voit que la différence :

$$\varphi(x, y, z) - S_0(x^2 + y^2 + z^2),$$

est un carré parfait. D'où le théorème :

Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (2) *ait une racine double est que, pour cette valeur de* S, *la différence* $\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2)$ *soit le carré d'une fonction linéaire et homogène de* $x, y, z$.

On connaît ces conditions qui s'obtiennent en annulant les six déterminants mineurs de l'équation (2); je ne m'arrête pas à ces conditions bien connues.

Enfin si l'on veut que $S_0$ soit racine triple, il faut ajouter aux conditions

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

la condition $a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2 = 0$; or, nous venons de voir que les premières peuvent se remplacer par $a' = b' = c' = 0$, et la dernière donne alors $a = b = c = 0$. Donc :

Théorème III. — *Pour que l'équation* (2) *ait une racine triple, il faut que, pour cette valeur de* S, *la différence* $\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2)$, *soit identiquement nulle.*

Dans ce dernier cas, la surface est une sphère.

La discussion de l'équation (2) est complètement achevée. Occupons-nous maintenant de la corde principale (parallèle à la direction principale menée par l'origine des coordonnées), qui répond à la racine $S_0$.

Pour $S = S_0$, les trois équations (1) sont équivalentes aux deux équations $P = 0$, $P' = 0$. Si l'on suppose $S_0$ racine simple, les trois quantités $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$ ne sont pas nulles à la fois et il existe une seule corde principale dont ces nombres sont les coefficients directeurs. Donc :

*A une racine simple de l'équation* (2) *correspond une direction principale unique.*

Si, au contraire, $S_0$ est racine double de l'équation (2), les trois équations (1) se réduisent à une seule, $P = 0$, et la corde principale n'est astreinte qu'à la seule condition d'être dans ce plan ; donc :

*A une racine double de l'équation* (2) *correspondent, comme cordes principales, toutes les droites d'un plan passant à l'origine.*

Enfin, si $S_0$ est racine triple, toutes les directions de l'espace sont des directions principales.

Une propriété importante des directions principales est exprimée par le théorème suivant :

Théorème IV. — *Deux directions principales qui répondent à des racines différentes de l'équation* (2) *sont rectangulaires.*

D'après ce que nous avons vu, il n'y a pas à étudier le cas de la racine triple. Supposons donc $S_0$ racine simple ; alors les coefficients directeurs de la direction principale correspondante sont donnés par

$$\frac{x_0}{bc' - cb'} = \frac{y_0}{ca' - ac'} = \frac{z_0}{ab' - ba'}.$$

D'ailleurs, que les autres racines soient dictinctes ou confondues, on a $s \neq 0$ ; donc les coefficients directeurs de l'une des autres cordes principales sont de la forme :

$$\frac{x_1}{aP + a'P'} = \frac{y_1}{bP + b'P'} = \frac{z_1}{cP + c'P'},$$

pour certaines valeurs de P et P' ; et l'on a :

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Telles sont les principales questions que soulève la recherche des plans principaux.

**3.** *Intersection de deux coniques.*

Une méthode semblable à celle indiquée plus haut va me permettre de traiter complètement cette question et d'une manière analytique. Je n'emploierai la géométrie que pour traduire, dans le langage qui lui est propre, chacune des relations simples que j'aurai à étudier.

Soient :

$$f(x, y, z) \equiv ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) \equiv a_1x^2 + a'_1y^2 + a''_1z^2 + 2b_1yz + 2b'_1zx + 2b''_1xy = 0,$$

les équations de deux coniques, dans un certain système de coordonnées trilinéaires. L'équation :

$$(1) \qquad f(x, y, z) - S\varphi(x, y, z) = 0,$$

pour chaque valeur de S, représente une conique passant par les points communs aux deux coniques données. Annulons le discriminant de cette équation : nous obtiendrons une équation du troisième degré en S. Pour une racine de cette équation, le premier membre de l'équation (1) est le produit de deux facteurs linéaires R, R', et les points de rencontre des deux coniques s'obtiennent en prenant les points d'intersection des droites $R = 0$, $R' = 0$ avec l'une ou l'autre des deux coniques données ; cela résulte de l'identité :

$$f(x, y, z) - S_0\varphi(x, y, z) = RR',$$

identité dans laquelle $S_0$ désigne une racine de l'équation du troisième degré en S. On voit donc qu'il

y a, en général, quatre points de rencontre et, par suite, trois couples de droites passant par l'intersection des deux coniques ; et les équations de ces trois couples s'obtiennent en portant successivement dans l'équation (1) les racines de l'équation du troisième degré dont j'ai parlé.

Je me place, d'abord, dans le cas où l'une des coniques, $\varphi(x, y, z) = 0$, par exemple, est une conique véritable, c'est-à-dire dans le cas où la fonction $\varphi(x, y, z)$ peut se mettre sous forme de la somme des carrés de trois fonctions linéaires et homogènes de $x, y, z$, indépendantes. Je suppose donc qu'on ait réalisé l'identité :

$$\varphi(x, y, z) \equiv Q^2 + Q'^2 + Q''^2,$$

$Q, Q', Q''$ étant trois fonctions linéaires homogènes de $x, y, z$, telles que le déterminant formé avec les coefficients des variables dans ces trois fonctions ne soit pas nul. On peut alors obtenir toutes les fonctions linéaires qui remplissent à l'égard de $\varphi(x, y, z)$ le rôle de $Q, Q', Q''$ ; il suffit d'introduire les neuf quantités $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, qui vérifient les six relations :

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1,\\
\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1,\\
\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1,\\
\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0,\\
\alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0,\\
\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0,
\end{aligned}$$

et de s'appuyer sur l'identité :

$$Q^2 + Q'^2 + Q''^2 \equiv (\alpha Q + \alpha' Q' + \alpha'' Q'')^2 + (\beta Q + \beta' Q' + \beta'' Q'')^2 + (\gamma Q + \gamma' Q' + \gamma'' Q'')^2.$$

Je désigne par X, Y, Z, l'un de ces systèmes de trois fonctions linéaires

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\alpha Q + \alpha' Q' + \alpha'' Q'' &= X,\\
\beta Q + \beta' Q' + \beta'' Q'' &= Y,\\
\gamma Q + \gamma' Q' + \gamma'' Q'' &= Z.
\end{aligned}\right.$$

Les trois fonctions X, Y, Z sont indépendantes et je puis effectuer la substitution linéaire indiquée par les équations (2) ; c'est-à-dire tirer $x, y, z$ de ces équations en fonction de X, Y, Z et porter dans les fonctions $\varphi(x, y, z)$, $f(x, y, z)$. Celles-ci deviendront :

$$\varphi(X, Y, Z) \equiv X^2 + Y^2 + Z^2,$$
$$F(X, Y, Z) \equiv AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY.$$

L'équation (1) deviendra alors :

$$F(X, Y, Z) - S(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0,$$

et en annulant le discriminant de cette fonction, j'obtiendrai l'équation du troisième degré en S dont j'ai parlé :

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0.$$

Pour une racine $S_0$ de cette équation on a l'identité suivante :

$$(4)\qquad F(X, Y, Z) - S_0(X^2 + Y^2 + Z^2) \equiv P^2 + P'^2,$$

identité dans laquelle P et P' désignent deux fonctions linéaires, homogènes de X, Y, Z et généralement indépendantes,

$$P \equiv lX + mY + nZ,$$
$$P' \equiv l'X + m'Y + n'Z.$$

Les deux droites, dont les équations actuelles sont $P + iP' = 0$, $P - iP' = 0$, forment le couple de sécantes communes qui répondent à la racine $S_0$ de l'équation (3), et, lorsque ces deux droites sont distinctes, leur point de rencontre a pour coordonnées :

$$mn' - nm', \qquad nl' - ln', \qquad lm' - ml'.$$

Cela posé, nous allons former une équation du second degré donnant les deux autres racines de l'équation (3); posons pour cela $S = S_0 + s$, et exprimons que la différence :

$$F(X, Y, Z) - (S_0 + s)(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

qui est identique à la différence :

$$P^2 + P'^2 - s(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

d'après l'identité (4), est une somme des carrés de deux fonctions linéaires homogènes de X, Y, Z. Ceci s'obtiendra, en annulant les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} lP + l'P' &= sX, \\ mP + m'P' &= sY, \\ nP + n'P' &= sZ; \end{aligned}$$

ces trois dérivées devront être nulles pour des valeurs de X, Y, Z qui ne soient pas toutes trois nulles ; en introduisant les deux inconnues P, P', on aura donc les cinq équations suivantes :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} sX &= lP + l'P', \\ sY &= mP + m'P', \\ sZ &= nP + n'P', \\ P &= lX + mY + nZ, \\ P' &= l'X + m'Y + n'Z, \end{aligned} \right.$$

à vérifier pour des valeurs des lettres P et P', X, Y, Z, qui ne soient pas toutes nulles. Je multiplie les équations (5) par $l$, $m$, $n$ et j'ajoute ; de même par $l'$, $m'$, $n'$ et j'ajoute de nouveau. J'obtiens ainsi les deux équations :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} (l^2 + m^2 + n^2 - s)P + (ll' + mm' + nn')P' &= 0, \\ (ll' + mm' + nn')P + (l'^2 + m'^2 + n'^2 - s)P' &= 0, \end{aligned} \right.$$

lesquelles doivent donner pour P, P' des valeurs qui ne soient pas toutes deux nulles, sans quoi X, Y, Z seraient nulles d'après (5). Donc $s$ est donné par l'équation :

$$(7) \qquad s^2 - (l^2 + m^2 + n^2 + l'^2 + m'^2 + n'^2)s + (l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2) - (ll' + mm' + nn')^2 = 0.$$

A chacune des racines de cette équation correspond un couple de sécantes communes dont l'équation s'obtient en portant cette valeur de $s$ dans :

$$P^2 + P'^2 - s(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0;$$

le point de rencontre de ces deux droites a pour coordonnées les valeurs de X, Y, Z données par les égalités (5), P et P' étant donnés par (6).

Avant d'aller plus avant, examinons la signification des trois équations

$$\begin{gathered} (mn' - nm')^2 + (nl' - ln')^2 + (lm' - ml')^2 = 0, \\ l^2 + m^2 + n^2 + l'^2 + m'^2 + n'^2 = 0, \\ (l^2 + m^2 + n^2 - l'^2 - m'^2 - n'^2)^2 + 4(ll' + mm' + nn')^2 = 0, \end{gathered}$$

obtenues en annulant le terme indépendant de $s$ et le coefficient de $s$ dans l'équation (7), puis en exprimant que cette équation a une racine double. La première égalité exprime que le point double du système de sécantes communes, qui répond à la racine $S_0$ de l'équation (3), est sur la seconde conique et aussi sur la première d'après l'identité (4). La seconde égalité peut s'écrire :

$$(l + il')(l - il') + (m + im')(m - im') + (n + in')(n - in') = 0;$$

sous cette forme, elle exprime que les deux sécantes communes dont j'ai parlé sont conjuguées par rapport à la seconde conique ; elles le sont aussi par rapport à la première d'après l'identité (4). Enfin, la dernière condition peut s'écrire :

$$[(l+il')^2+(m+im')^2+(n+in')^2][(l-il')^2+(m-im')^2+(n-in')^2]=0;$$

sous cette forme elle exprime que l'une ou l'autre des sécantes communes coupe la seconde conique en deux points confondus et, par suite, aussi la première.

Si l'on prend maintenant le point double qui correspond à la racine $S_0$ et dont les coordonnées sont :

$$mn'-nm', \qquad nl'-ln', \qquad lm'-ml',$$

on voit vite que la polaire de ce point dans la seconde conique a pour équation :

$$(mn'-nm')X+(nl'-ln')Y+(lm'-ml')Z=0;$$

c'est aussi d'après l'identité (4) la polaire du même point relativement à la première conique ; de plus, cette polaire passe par tous les points dont les coordonnées sont :

$$lP+l'P', \qquad mP+m'P', \qquad nP+n'P',$$

et en particulier aux points doubles des deux autres couples de sécantes communes. Donc :

Théorème I. — *Le point double de l'un des systèmes de sécantes communes à deux coniques a même polaire dans les deux coniques et cette polaire contient les autres points doubles.*

Nous pouvons maintenant faire la discussion complète du problème qui nous intéresse.

Si $S_0$ est racine simple de l'équation (3), le terme constant de l'équation (7) n'est pas nul ; donc les sécantes communes correspondantes sont distinctes et ne se coupent pas en un point commun aux deux coniques. Si les deux autres racines sont simples aussi, aucune de ces sécantes n'est tangente aux coniques données. Donc :

Théorème II. — *Lorsque l'équation* (3) *a ses trois racines simples, les trois couples de sécantes communes sont distincts ; chacun d'eux se compose de deux droites distinctes qui se coupent en un point où les deux coniques données ne passent pas, et les trois points doubles des systèmes de sécantes forment un triangle polaire commun aux deux coniques : les quatre points de rencontre sont isolés.*

Examinons le cas où il y a une racine double. Supposons d'abord que $S_0$ soit cette racine double ; alors le terme constant de l'équation (7) est nul et les deux sécantes communes $P+iP'=0$, $P-iP'=0$ se coupent en un point commun aux deux coniques données, ou bien elles coïncident et on peut supposer $l'=m'=n'=0$. Dans le premier cas, le point double des deux sécantes communes qui répondent à la racine $S_0$ ayant même polaire dans les deux coniques, ces coniques sont tangentes en ce point ; le système de sécantes communes, qui répond à la racine simple, se compose de deux droites distinctes dont l'une est cette tangente.

Dans le second cas, le système simple de sécantes communes a pour équation :

$$(l^2+m^2+n^2)(X^2+Y^2+Z^2)-P^2=0;$$

il se compose des deux tangentes à la seconde conique aux points où la droite $P=0$ la coupe ; ces droites sont aussi tangentes à la première conique d'après l'identité (4). Donc :

Théorème III. — *Lorsque l'équation* (3) *a une racine double, les deux coniques données sont simplement ou doublement tangentes ; parmi les quatre points de rencontre, deux sont confondus ou bien ils sont confondus deux à deux. Le système de sécantes communes, qui répond à la racine double, se compose, dans le premier cas, de deux droites distinctes allant du point de contact aux deux autres points de rencontre ; dans le second cas, de deux droites confondues joignant les deux points de contact. Le système de sécantes communes, qui répond à la racine simple, se compose, dans le premier cas, de la tangente commune et de la droite qui joint les deux autres points de rencontre ; dans le second cas, des deux tangentes communes.*

Enfin, si l'on veut que $S_0$ soit racine triple, il faudra encore annuler le coefficient de $s$ dans l'équation (7); la condition de racine double est alors remplie pour l'équation (7). Si les deux sécantes sont distinctes, elles se coupent sur les deux coniques et l'une d'elles est une tangente commune aux deux coniques en ce point, l'autre joint ce point au quatrième point de rencontre des deux coniques; il y a trois points de rencontre confondus en un seul avec le point de contact des deux coniques. Si les deux sécantes sont confondues, alors $l' = m' = n' = 0$ et l'on a:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 0,$$

qui exprime que la sécante double est tangente à la seconde conique et, par suite aussi, à la première au même point : les quatre points de rencontre sont confondus. Il y aura aussi une racine triple si $l = m = n = l' = m' = n' = 0$, c'est-à-dire si les deux coniques sont identiques ou que l'une d'elles soit identiquement nulle, la première. Donc :

Théorème IV. — *Lorsque l'équation* (3) *a une racine triple, il y a trois points de rencontre confondus en un seul et alors le système triple de sécantes communes se compose de la tangente commune aux deux coniques en ce point et de la droite qui joint ce point au quatrième point de rencontre; ou bien il y a quatre points de rencontre confondus en un seul et le système triple de sécantes communes se compose de deux droites confondues avec la tangente commune aux deux coniques en ce point.*

*Il peut arriver aussi que les deux coniques soient identiques ou que l'une d'elles soit identiquement nulle.*

Tout ce qui précède a été déduit de la discussion complète des équations (3) et (7) et nous voyons clairement que, dans le cas où nous nous sommes mis, l'équation du troisième degré qu'on obtient en annulant le discriminant de la fonction

$$f(x, y, z) - S\varphi(x, y, z),$$

n'est jamais identiquement nulle; mais il nous reste un cas à étudier, celui où les coniques $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ se réduisent, toutes deux, à deux droites. Dans ce cas, l'équation du troisième degré en S se réduit à :

$$\Theta_1 S^2 - \Theta S = 0.$$

Il est facile d'avoir les expressions de $\Theta_1$ et $\Theta$; si on désigne par A, A', A'', B, B' B'' les déterminants mineurs du discriminant de $f(x, y, z)$ et par $A_1, A'_1, A''_1, B_1, B'_1, B''_1$ ceux du discriminant de $\varphi(x, y, z)$, on trouve que :

$$\Theta_1 = aA_1 + a'A'_1 + a''A''_1 + 2bB_1 + 2b'B'_1 + 2b''B''_1,$$
$$\Theta = a_1A + a'_1A' + a''_1A'' + 2b_1B + 2b'_1B' + 2b''_1B''.$$

Du reste, s'il est admis que $f(x, y, z) = 0$ se réduit à deux droites, le point de rencontre de ces deux droites a des coordonnées qui vérifient les égalités

$$\frac{x^2}{A} = \frac{y^2}{A'} = \frac{z^2}{A''} = \frac{yz}{B} = \frac{zx}{B'} = \frac{xy}{B''}.$$

Nous pouvons facilement maintenant discuter ce cas particulier; nous voyons, déjà, que l'équation en S a toujours une racine nulle et une racine infinie, ce qui était évident *a priori*; d'autre part, pour que l'équation en S ait une racine double, nulle par exemple, il faut $\Theta = 0$, c'est-à-dire que le point double du système de droites qui répond à la racine double soit sur l'autre conique; ce résultat est conforme à ceux déjà obtenus. Enfin pour que l'équation en S soit identiquement nulle, il faut $\Theta = 0$, $\Theta_1 = 0$, c'est-à-dire que le point double de chaque conique soit sur l'autre, ou bien encore que l'une des coniques soit identiquement nulle; donc :

Théorème V. — *Lorsque l'équation en* S *est identiquement satisfaite, les deux coniques se réduisent chacune à deux droites et ces couples de droites ont même centre, ou bien une droite commune, ou bien l'un d'eux est identiquement nul.*

*Remarque.* — Les théorèmes réciproques des théorèmes II, III, IV, V ont été démontrés en même temps que les théorèmes directs, grâce à la méthode même employée, qui fait correspondre à chaque relation analytique sa signification géométrique complète.

Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici, il n'a pas été établi de différences entre les éléments réels et les éléments imaginaires. Nous allons aborder maintenant la question à ce nouveau point de vue, mais dans un cas unique, dans le cas où les coefficients des deux équations $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ sont tous réels et où le triangle de référence employé est réel ; alors, en mettant en évidence la réalité des coefficients de la fonction $\varphi(x, y, z)$ et en effectuant une substitution linéaire réelle, cette fonction sera $X^2 + Y^2 + Z^2$ ou $X^2 + Y^2 - Z^2$, une fois la substitution linéaire effectuée. Je rejette les deux formes possibles $X^2 - Y^2 - Z^2$ et $-X^2 - Y^2 - Z^2$, car elles peuvent être évitées en changeant les signes des coefficients de $\varphi(x, y, z)$.

La fonction $f(x, y, z)$ deviendra $F(X, Y, Z)$, sans que ses coefficients aient cessé d'être réels, et comme on pourra aussi changer les signes de tous ses coefficients *a priori*, si on le juge convenable, on peut supposer, que pour la racine réelle $S_0$ de l'équation en S, la différence :

$$F(X, Y, Z) - S_0(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

ou

$$F(X, Y, Z) - S_0(X^2 + Y^2 - Z^2),$$

soit de la forme $P^2 + P'^2$ ou $P^2 - P'^2$, sans que la forme $-P^2 - P'^2$ se présente ; donc, en conservant la forme $P^2 + P'^2$ adoptée dans nos calculs, $l, m, n$ seront réels et $l', m', n'$ aussi, ou bien ces derniers seront les produits par $i$ de nombres réels. Alors, si l'on suppose que la seconde conique soit imaginaire, c'est-à-dire ait la forme $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, l'équation qui donne les deux autres racines mises sous la forme $S_0 + s$ sera

$$(8) \quad s^2 - (l^2 + m^2 + n^2 + l'^2 + m'^2 + n'^2)s + (l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2) - (ll' + mm' + nn')^2 = 0,$$

et elle sera, dans l'autre cas,

$$(9) \quad s^2 - (l^2 + m^2 - n^2 + l'^2 + m'^2 - n'^2)s + (l^2 + m^2 - n^2)(l'^2 + m'^2 - n'^2) - (ll' + mm' - nn')^2 = 0,$$

si la seconde conique est réelle, c'est-à-dire si son équation est de la forme $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$.

Premier cas : *Équation* (8). — La seconde conique étant imaginaire, les points de rencontre sont évidemment imaginaires. Les racines de l'équation (8) sont réelles et de même signe si $l', m', n'$ sont réels, réelles et de signes contraires si $l, m, n$ contiennent $i$ en facteur, et dans ce dernier cas $S_0$ est la racine moyenne. Ceci montre, en outre, que des trois couples de sécantes communes un seul est réel, celui qui correspond à la racine moyenne ; les trois points doubles des systèmes de sécantes communes sont réels. Si l'on veut qu'il y ait racine double, il faut que l'équation (8) ait une racine nulle, ce qui entraîne ici $\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$ ; la différence :

$$F(X, Y, Z) - S_0(X^2 + Y^2 - Z^2)$$

est un carré parfait et on peut aussi bien supposer $l' = m' = n' = 0$ ; le système double de sécantes communes se compose de deux droites confondues avec une droite réelle $lX + mY + nZ = 0$ ; le système simple ayant pour équation :

$$(l^2 + m^2 + n^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (lX + mY + nZ)^2 = 0,$$

se compose de deux droites imaginaires conjuguées, les tangentes aux deux coniques aux points où la droite $lX + mY + nZ = 0$ les coupe.

Enfin, pour que $S_0$ soit racine triple, il faut que la différence $F(X, Y, Z) - S_0(X^2 + Y^2 + Z^2)$ soit identiquement nulle.

Second cas : *Équation* (9). — La condition de réalité des racines de l'équation (9) est :

$$(l^2 + m^2 - n^2 - l'^2 - m'^2 + n'^2)^2 + 4(ll' + mm' - nn')^2 > 0$$

ou

$$[(l + l'i)^2 + (m + m'i)^2 - (n + n'i)^2][(l - l'i)^2 + (m - m'i)^2 - (n - n'i)^2] > 0.$$

Cette condition est évidemment remplie si $l'$, $m'$, $n'$ sont réels. Si l'on suppose maintenant $l'$, $m'$, $n'$ imaginaires de la forme indiquée, les droites $P + iP' = 0$, $P - iP' = 0$ ont leurs coefficients réels ; d'autre part, la droite réelle $uX + vY + wZ = 0$ coupe la conique $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ en deux points réels ou imaginaires conjugués suivant que $u^2 + v^2 - w^2$ est positif ou négatif ; *donc dans ce cas, l'équation* (9) *aura ses racines réelles ou imaginaires, suivant que les deux sécantes communes relatives à la racine* $S_0$ *couperont la seconde conique de la même manière ou non.*

Dans le cas où l'équation en S a une racine double, la racine double et la racine simple sont réelles ; si l'on suppose que $S_0$ soit la racine simple, on a :

$$(l + l'i)^2 + (m + m'i)^2 - (n + n'i)^2 = 0,$$

ou bien

$$(l - l'i)^2 + (m - m'i)^2 - (n - n'i)^2 = 0,$$

ou ces deux conditions à la fois ; ce sont des conditions de contact relatives aux sécantes communes du système simple. Dans le cas du simple contact, $l'$, $m'$, $n'$ sont nécessairement imaginaires de la forme $\beta i$ sans quoi ces deux conditions seraient simultanément réalisées ; donc, alors, les sécantes du système simple sont forcément réelles. Dans le cas du double contact, ceci n'est plus obligé. Si l'on envisage maintenant $S_0$ comme étant la racine double, on a la condition :

$$(l^2 + m^2 - n^2)(l'^2 + m'^2 - n'^2) - (ll' + mm' - nn')^2 = 0,$$

et la réalité de $l'$, $m'$, $n'$ est indifférente ; le système double de sécantes communes, lorsqu'il se compose de deux droites distinctes, peut donc être réel ou imaginaire.

Enfin, dans le cas de la racine triple, on a l'une et l'autre des deux conditions :

$$(l + l'i)^2 + (m + m'i)^2 - (n + n'i)^2 = 0,$$

$$(l - l'i^2) + (m - m'i)^2 - (n - n'i)^2 = 0,$$

et la condition :

$$l^2 + m^2 - n^2 + l'^2 + m'^2 - n'^2 = 0.$$

Les deux sécantes sont réelles, car l'une d'elles au moins coïncide avec la tangente au point réel :

$$mn' - nm', \qquad nl' - ln', \qquad lm' - ml'.$$

On peut résumer ainsi cette seconde discussion :

*1° Lorsque l'équation en* S *a trois racines simples réelles, les deux coniques se coupent en quatre points réels ou en quatre points imaginaires, conjugués deux à deux. Les trois points doubles des systèmes de sécantes communes sont réels. Si les quatre points d'intersection sont réels, les trois systèmes de sécantes communes sont réels ; sinon un seul est réel.*

*2° Lorsque l'équation en* S *a une seule racine réelle, les deux coniques se coupent en deux points réels et deux points imaginaires conjugués : des trois points doubles des systèmes de sécantes communes, un seul est réel, les deux autres sont imaginaires conjugués : un seul des systèmes de sécantes communes est réel, celui qui répond à la racine réelle. Ici, les deux droites d'un système imaginaire ne sont pas conjuguées comme cela avait lieu dans le cas précédent.*

*3° Lorsque l'équation en* S *a une racine double, ou bien il y a simple contact, et alors le système simple de sécantes communes est réel : le système double peut ne pas l'être et se composer de deux droites imagi-*

*naires conjuguées ; ou bien il y a double contact, et alors le système simple est réel ou composé de deux droites imaginaires conjuguées.*

*4° Lorsque l'équation en* S *a une racine triple, les points d'intersection sont réels, ainsi que les sécantes communes.*

Dans les deux discussions qui précèdent, on peut négliger l'idée géométrique et substituer aisément aux locutions employées le langage algébrique.

E. H.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1173.** — *Le lieu des foyers des sections faites par un plan donné* (P) *dans les cônes de révolution* (C) *circonscrits à une quadrique donnée* S, *se compose de trois coniques qui restent sur trois quadriques lorsque le plan* P *se déplace parallèlement à lui-même.*

Les foyers d'une section plane d'un cône de révolution sont les points de contact du plan sécant avec deux sphères inscrites dans le cône.

Soient alors $a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 = 0$ l'équation tangentielle de l'ellipsoïde et

$$\alpha u + \beta v + \gamma w + r)^2 - R^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

celle de l'une des deux sphères ; la développable circonscrite à la sphère et à l'ellipsoïde devra se décomposer en deux cônes ; par conséquent, parmi les quadriques inscrites dans cette développable, il y en aura une qui se décomposera en deux points. Or l'équation générale des quadriques inscrites dans cette développable est

$$\lambda(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2) + (\alpha u + \beta v + \gamma w + r)^2 - R^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0 :$$

nous avons donc à écrire que les quatre dérivées partielles de cette forme quadratique se réduisent à deux ou, plus exactement, que deux d'entre elles sont conséquences des deux autres. Posons alors $P = \alpha u + \beta v + \gamma w + r$ ; nous aurons cinq équations à cinq inconnues, $u, v, w, r$ et P, linéaires et homogènes, et deux d'entre elles devront dépendre des trois autres. Ces équations sont

$$\begin{aligned}
(\lambda a^2 - R^2)u + \alpha P &= 0,\\
(\lambda b^2 - R^2)v + \beta P &= 0,\\
(\lambda c^2 - R^2)w + \gamma P &= 0,\\
-\lambda r + P &= 0,\\
\alpha u + \beta v + \gamma w + r - P &= 0.
\end{aligned}$$

La quatrième équation ne pouvant pas dépendre des trois premières, ni la cinquième, il faut nécessairement déjà que l'une des trois premières disparaisse, c'est-à-dire, soit identiquement nulle. Choisissons, par exemple, la seconde ; nous aurons $\lambda = \frac{R^2}{b^2}$ et $\beta = 0$ ; les deux autres donnent alors $u$ et $w$, la quatrième donne $r$ en fonction de P et, en portant dans la cinquième, nous avons finalement

$$\frac{Pb^2}{R^2}\left(\frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2 - c^2} + 1 - \frac{R^2}{b^2}\right) = 0.$$

En supprimant le facteur $\frac{Pb^2}{R^2}$ qui n'est pas nul, puisque les solutions envisagées sont des solutions non nulles du système des cinq équations, il résulte la relation

$$\frac{\alpha^2}{a^2-b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2-b^2}-1+\frac{R^2}{b^2}=0.$$

Il faut écrire maintenant que le plan donné

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

est tangent à la sphère, ce qui donne

$$(A\alpha+C\gamma+D)^2-R^2(A^2+B^2+C^2)=0.$$

Le lieu du centre de la sphère est donc la conique du plan des $zx$,

$$\frac{\alpha^2}{a^2-b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2-b^2}-1+\frac{(A\alpha+C\gamma+D)^2}{b^2}=0,$$

où nous avons fait $A^2+B^2+C^2=1$, pour abréger l'écriture. Ce lieu est une conique doublement tangente à la focale du plan des $zx$.

Le lieu du point de contact avec le plan donné est alors la projection orthogonale de cette conique sur ce plan; c'est, par suite, une conique. Il y a trois lieux de ce genre; le lieu total se compose donc bien de trois coniques.

Cherchons maintenant le cylindre projetant la conique trouvée plus haut sur le plan donné; pour cela, appelons $x$, $y$, $z$ l'un de ses points et exprimons que la génératrice correspondante

$$\frac{\alpha-x}{A}=\frac{\beta-y}{B}=\frac{\gamma-z}{C}$$

rencontre la conique, c'est-à-dire exprimons que les nombres

$$\alpha=x-\frac{Ay}{B},\qquad \gamma=z-\frac{Cy}{B}$$

vérifient l'équation qui relie $\alpha$ et $\gamma$; nous aurons

$$\frac{(Bx-Ay)^2}{a^2-b^2}+\frac{(Bz-Cy)^2}{c^2-b^2}-B^2+\frac{[B(Ax+Cz)-(A^2+C^2)y+BD]^2}{b^2}=0.$$

Cette équation, jointe à celle du plan, $Ax+By+Cz+D=0$, définit le lieu des foyers qui correspond à la focale du plan des $zx$. En éliminant D entre les deux, nous aurons le lieu de cette conique quand le plan se déplace parallèlement à lui-même. Ce lieu est la quadrique

$$\frac{(Bx-Ay)^2}{a^2-b^2}+\frac{(Bz-Cy)^2}{c^2-b^2}-B^2+\frac{y^2}{b^2}=0.$$

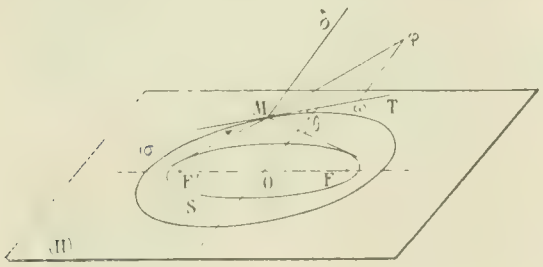
Elle contient la focale du plan des $zx$.

Il y a deux autres lieux analogues correspondant aux deux autres focales.

J. HAAG, soldat au 69e de ligne, à Nancy.

Bonne solution de M. R. Bouvaist.

**Solution géométrique.** — Les foyers des sections sont, comme on sait, les points de contact de sphères (Σ) inscrites au cône (C) et tangentes au plan (P).




Les sommets des cônes (C) étant situés sur les focales de (S), considérons l'une d'elles (σ) contenue dans le plan principal (Π), et cherchons le lieu des foyers lorsque le plan (P) se déplace parallèlement à lui-même. Tout point ω d'une tangente MT à (σ) est le centre d'une sphère (Σ) tangente en un point φ à un certain plan (P), tel que $\omega\varphi = M\omega \sin\theta$, θ étant le demi-angle au sommet du cône, c'est-à-dire l'angle de la tangente MT avec les tangentes menées de M à la section principale (s) de la surface (S), contenue dans le plan (Π), conique homofocale à (σ).

La droite $\omega\varphi$ ayant une direction fixe $\delta$ (perpendiculaire aux plans (P)), et $\frac{\omega\varphi}{M\omega}$ étant constant, les foyers $\varphi$ des sections du cône d'axe MT sont sur une droite passant par M.

Le lieu complet, lorsque M se déplace sur $(\sigma)$, est donc un lieu de droites s'appuyant sur la focale. Nous prouverons que c'est une surface du 2° ordre, en montrant que ses sections par les plans $(\Pi')$, parallèles à $(\Pi)$, sont des coniques homothétiques à $(\sigma)$.

Les points $\varphi$ d'un plan $(\Pi')$ correspondent évidemment à $\omega\varphi = C^{te}$. Et comme $\omega$ est la projection oblique de $\varphi$ parallèlement à $\delta$, il nous suffit de chercher le lieu des points $\omega$ dans le plan $(\Pi)$.

Lorsque la surface (S) est à centre, il en est de même des coniques $(s)$ et $(\sigma)$, et l'on a

$$\sin^2\theta = \frac{b^2 - B^2}{b'^2},$$

$\varepsilon B^2$, $\varepsilon b^2$ étant les carrés des demi-axes non transverses de $(s)$ et $(\sigma)$, et $\varepsilon b'^2$ le carré du demi-diamètre parallèle à MT dans $(\sigma)$. D'où il suit que $\frac{\overline{M\omega}^2}{b'^2} = C^{te}$.

Or soit $\frac{1}{k}$ le rapport d'homothétie de $(\sigma)$ et de la conique homothétique et concentrique passant en $\omega$. On a

$$\frac{\overline{OM}^2}{a'^2} + \frac{\overline{M\omega}^2}{\varepsilon b'^2} = k^2,$$

et comme $OM = a'$,

$$\frac{\overline{M\omega}^2}{b'^2} = (k^2 - 1).$$

Il en résulte que M décrivant $(\sigma)$, $k$ est constant, et $\omega$ décrit une conique homothétique à $(\sigma)$, dont la projection cylindrique sur $(\Pi')$ est le lieu des foyers $\varphi$ de ce plan.

Le cas où (S) est un paraboloïde se traite aussi aisément. On a alors

$$\sin^2\theta = \frac{p - P}{q},$$

P et $p$ étant les paramètres des paraboles $(s)$ et $(\sigma)$, $q$ le paramètre au diamètre de M dans $(\sigma)$. D'où il suit que

$$\frac{M\omega^2}{q} = C^{te}.$$

Or soit $d$ la distance des sommets de $(\sigma)$ et de la parabole égale et coaxiale passant en $\omega$. On a

$$\overline{M\omega}^2 = 2qd.$$

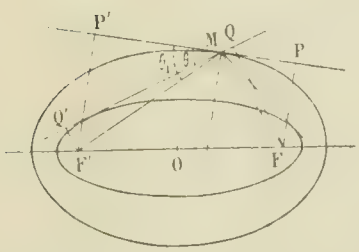
Il en résulte que M décrivant $(\sigma)$, $d$ est constant, et $\omega$ décrit une parabole égale à $(\sigma)$.

Nous avons ainsi démontré que le lieu total des points $\varphi$, relatifs au faisceau des plans (P), se compose de trois quadriques passant chacune par une focale de la surface (S), et ayant pour direction diamétrale du plan de cette courbe, la direction $\delta$.

Le lieu des points $\varphi$ dans un plan (P) est constitué par les trois coniques, sections par (P) des trois quadriques précédentes.

Note. — Nous avons utilisé dans le courant de la démonstration deux formules que nous allons démontrer.

1° Soient deux coniques homofocales dont les carrés des demi-axes sont $a^2$, $\varepsilon b^2$ et $A^2$, $\varepsilon B^2$.




Abaissons les perpendiculaires FP, F'P' et FQ, F'Q' sur la tangente en un point M de la première conique, et sur une des tangentes à la deuxième issues de M. Nous avons

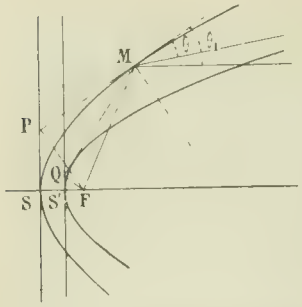
$$\varepsilon b^2 = FP.F'P' = FM.F'M\sin^2\theta_1,$$
$$\varepsilon B^2 = FQ.F'Q' = MF\sin(\theta_1 + \theta).F'M\sin(\theta_1 - \theta)$$
$$= FM.F'M(\sin^2\theta_1\cos^2\theta - \cos^2\theta_1\sin^2\theta),$$

d'où $\varepsilon(b^2 - B^2) = FM.F'M\sin^2\theta.$,

On a d'ailleurs

$$FM.F'M = \frac{1}{2}[(FM \pm F'M)^2 - (\overline{FM}^2 + \overline{F'M}^2)]$$
$$= \frac{1}{2}[4a^2 - (2c^2 + 2a'^2)] = a^2 + \varepsilon b^2 - a^2 = \varepsilon b'^2,$$

$a'^2$ désignant le carré du demi-diamètre OM, et $\varepsilon b'^2$ celui du demi-diamètre conjugué.




2° Soient deux paraboles homofocales dont les paramètres sont $p$, P. Nous avons

$$\frac{p}{2} = \mathrm{FS} = \mathrm{FP}\sin\theta_1 = \mathrm{FM}\sin^2\theta_1,$$

$$\frac{\mathrm{P}}{2} = \mathrm{FS'} = \mathrm{FQ}\sin(\theta_1+\theta) = \mathrm{FM}\sin(\theta_1+\theta)\sin(\theta_1-\theta),$$

d'où

$$\frac{p-\mathrm{P}}{2} = \mathrm{FM}\sin^2\theta.$$

Maintenant, $q$ étant le paramètre au diamètre issu de M de la première parabole, on a

$$q = \frac{p}{\sin^2\theta_1} = 2\mathrm{FM}.$$

On en déduit immédiatement la formule annoncée.

VASNIER.

## PHYSIQUE

**1150.** — *L'indice de réfraction de l'eau pour le rouge est* 1,33, *pour le violet* 1,34. *L'indice de réfraction de l'air est en moyenne* 1,000293. *En supposant que le pouvoir dispersif de l'air soit les* $\frac{11}{20}$ *de celui de l'eau, calculer approximativement la différence des vitesses de la lumière rouge et de la lumière violette dans l'air.*

Le pouvoir dispersif de l'eau est égal à

$$\frac{1{,}34-1{,}33}{0{,}33} = \frac{1}{33}.$$

Celui de l'air est donc égal à $\frac{11}{20}\times\frac{1}{33} = \frac{1}{60}$.

D'autre part, si $n_v$ et $n_r$ désignent les indices absolus de l'air pour la lumière violette et pour la lumière rouge, le pouvoir dispersif de l'air a pour expression $\frac{n_v - n_r}{0{,}000293}$.

Or si $\mathrm{U}_v$ et $\mathrm{U}_r$ désignent les vitesses du violet et du rouge dans l'air, et U la vitesse commune à ces deux radiations dans le vide, on a

$$n_v = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{U}_v} \qquad \text{et} \qquad n_r = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{U}_r},$$

d'où, en égalant les deux expressions du pouvoir dispersif,

$$\frac{1}{60} = \frac{\mathrm{U}(\mathrm{U}_r-\mathrm{U}_v)}{\mathrm{U}_v.\mathrm{U}_r.0{,}000293} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}_r-\mathrm{U}_v = \frac{0{,}000293}{60}\,\frac{\mathrm{U}_v.\mathrm{U}_r}{\mathrm{U}}.$$

On peut prendre pour valeurs numériques

$$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{U}_v} = 1{,}000293 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}_r = 300\,000^{\mathrm{km}}.$$

Donc

$$\mathrm{U}_r-\mathrm{U}_v = \frac{0{,}000293\times 300\,000}{60\times 1{,}000293} = 1^{\mathrm{km}},46.$$

J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

## CONCOURS DE 1903 (*suite*)

### AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

*Mathématiques élémentaires* (*).

On donne deux droites fixes D et D′ non situées dans un même plan, un point fixe A sur D et un point fixe A′ sur D′. Soient (S) une sphère dont le centre est situé sur D et qui passe par A, (S′) une sphère dont le centre est situé sur D′ et qui passe par A′.

1° Montrer qu'il existe deux sphères (S) tangentes à une sphère (S′) supposée donnée.

2° Trouver les lieux géométriques des points de contact des sphères (S) et (S′), lorsqu'elles varient tout en restant tangentes.

3° Soit M le point de contact d'une sphère (S) avec une sphère (S′). Sur la ligne des centres de ces deux sphères on porte, à partir du point M, une longueur constante $MM' = a$. Trouver le lieu du point M′ lorsque les deux sphères varient.

4° Sur les droites D et D′ on porte, à partir de A et A′, respectivement deux longueurs égales AP et A′P′. Trouver le lieu du centre de la sphère Σ tangente à D en P et à D′ en P′ lorsque P et P′ décrivent respectivement D et D′.

(*3 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

*Mathématiques spéciales.*

**1246**. — On considère une droite fixe A et deux droites fixes B et B′ qui rencontrent A mais qui ne sont pas situées dans un même plan.

On sait que si on considère une surface du second ordre S qui passe par les trois droites A, B et B′, son centre C est situé dans le plan P parallèle aux deux droites B et B′ et équidistant de ces deux droites.

1° Lorsque le centre C décrit une droite dans le plan P, la surface S passe par une quatrième droite fixe s'appuyant sur B et B′.

2° Lorsque le point C décrit, dans le plan P, une courbe (Γ) de classe $m$, la surface S enveloppe une surface réglée Σ d'ordre $2m$ et, par chacune des trois droites A, B et B′, il passe $m$ nappes de cette surface Σ.

Montrer que la surface Σ peut-être considérée comme engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur les deux droites B et B′ et en restant tangente à un cylindre de classe $m$ dont les génératrices sont parallèles à A. Trouver l'équation de ce cylindre.

3° Dans le cas particulier où la courbe (Γ) est une conique, la surface Σ est du quatrième ordre et admet la droite A comme droite double.

Tout plan passant par A coupe alors cette surface, en dehors de A, suivant une conique ; trouver le lieu du centre de cette conique.

Que deviennent les résultats précédents, lorsque la conique (Γ) est tangente soit au plan déterminé par les droites A et B, soit au plan déterminé par A et B′, soit à ces deux plans à la fois ?

Nota. — Les candidats devront traiter le problème par la *Géométrie analytique* ; il leur sera tenu compte des remarques géométriques.

(*4 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

*Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.*

On considère, avec les notations de Weierstrass, la fonction

$$s = \frac{C\sigma^2 u}{\sigma(u-a)\sigma(u-b)\sigma(u+a+b)}$$

où C est une constante, et où $a$ et $b$ sont les affixes de deux points situés dans le parallélogramme des périodes

$$o, \qquad 2\omega, \qquad 2\omega', \qquad 2\omega + 2\omega'$$

ou sur les côtés de ce parallélogramme issus du point d'affixe $o$.

(*) Des solutions étudiées de la question de Mathématiques élémentaires sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

1° Décomposer cette fonction en éléments simples, et examiner les différents cas qui peuvent se présenter suivant les valeurs de $a$ et $b$, en laissant de côté les déterminations de $a$ et $b$ pour lesquelles le dénominateur de $x$ s'annulerait en même temps que $u$.

2° Exprimer, dans chacun de ces cas, la fonction $x$ en fonction rationnelle de $pu$ et de $p'u$.

3° On suppose que $\omega$ et $\frac{\omega'}{i}$ sont des quantités réelles et positives, et l'on considère en particulier la fonction

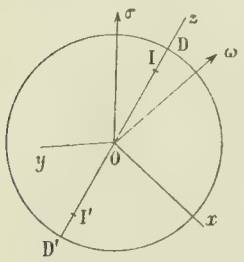
$$x = \frac{\sigma\omega \,.\, \sigma\omega' \,.\, \sigma(\omega + \omega')\sigma^2 u}{\sigma(u - \omega)\sigma(u - \omega')\sigma(u + \omega + \omega')};$$

on désigne de plus par $y$ la dérivée de cette fonction par rapport à $u$. Trouver la relation algébrique qui existe entre $x$ et $y$, construire la courbe représentée par cette équation, et indiquer dans quels intervalles varie $u$ lorsque le point $x$, $y$ décrit les différentes branches de cette courbe. Quels sont les points multiples de cette courbe ?

*(5 juillet, de 7 h. à 2 h.)*

*Mécanique rationnelle.*

Une sphère solide homogène de masse $m$ et de rayon $a$ est mobile autour de son centre O supposé fixe. Dans la sphère est creusé un canal rectiligne, de section infiniment petite, suivant un diamètre DD'; deux insectes ayant chacun la même masse $m$ que la sphère se trouvent dans ce canal en deux points I et I' symétriques par rapport au centre O. A l'instant initial, $t = 0$, la sphère est animée d'une rotation $\omega_0$ autour d'un axe instantané donné et, à partir de cet instant, les insectes marchent dans le canal, suivant une loi donnée, en prenant appui sur ses parois et restant toujours symétriques par rapport au centre O. Trouver le mouvement du système, en réduisant les insectes à des points matériels.




On prendra comme axes liés à la sphère, un axe $Oz$ dirigé suivant le diamètre DD' et deux autres diamètres $Ox$ et $Oy$ formant avec $Oz$ un trièdre trirectangle; on appellera $p$, $q$, $r$ les composantes de la rotation instantanée $\omega$ de la sphère suivant les axes $Oxyz$; enfin, on désignera par $z$ et $-z$ les cotes des deux insectes, en supposant que $z$ est une fonction donnée du temps $z = f(t)$.

On traitera, en particulier, les questions suivantes :

1° Soit $O\sigma$ le moment résultant des quantités de mouvement de tous les points du système par rapport au point O; étudier le mouvement du point $\sigma$ dans l'espace absolu et par rapport aux axes $Oxyz$.

2° Montrer que $p$, $q$, $r$ peuvent être exprimés en fonction de $t$ par des quadratures.

3° Exprimer ensuite en fonction de $t$ les angles d'Euler $\theta$, $\varphi$, $\psi$, en choisissant convenablement les axes fixes.

4° Etudier, en particulier, le cas où l'axe de la rotation instantanée initiale de la sphère est dans le plan $xOy$.

5° Achever les calculs en supposant la rotation initiale quelconque, mais en imaginant que la loi du mouvement des insectes soit :

$$z = ae^{kt},$$

où $k$ est une constante positive.

Quel est, dans cette hypothèse, le mouvement limite vers lequel tend le mouvement du système ?

*(6 juillet, de 7 h. à 2 h.)*

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1247.** — On considère dans l'espace, une parabole et un point fixe M.

1° Équation de la surface S, lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les plans tangents à la parabole; discuter ses sections par des plans parallèles au plan P de la parabole.

2° La surface S est coupée par un plan variable passant par M et perpendiculaire au plan P suivant un cercle et une droite. Lieu du centre du cercle.

3° La surface S a deux points singuliers; définir géométriquement les cônes des tangentes et les sections planes passant par l'un ou l'autre de ces points.

4° Trouver les droites et les coniques tracées sur la surface S. T. L.

**1248.** — Le cercle passant par les projections d'un point P d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit, passe par le centre de la courbe.

R. Bouvaist.

# DEUXIÈME PARTIE

## ALGÈBRE

**1182.** — *Développer* $\frac{L(1+x)}{1+x}$ *par la formule de Maclaurin.*

La fonction $\frac{L(1+x)}{1+x}$ est bien définie, finie et continue pour toutes les valeurs de $x$ supérieures à $-1$ ; on peut donc lui appliquer la formule limitée de Maclaurin pour toutes les valeurs de $x$ plus grandes que $-1$, et prendre à chaque fois autant de termes que l'on voudra dans le développement.

Soit alors $u = L(1+x)$, la fonction proposée $y$ peut s'écrire $y = u\frac{du}{dx}$, et, en lui appliquant la formule de Leibniz, qui donne la dérivée d'un produit, nous aurons de suite l'expression de $y^n$,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + \frac{n}{1}\frac{du}{dx}\frac{d^n u}{dx^n} + \ldots;$$

le premier terme du second membre a pour valeur $\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}L(1+x)$, il est transcendant, et, par suite, différent de ceux qui suivent et qui sont tous algébriques. Nous avons d'ailleurs immédiatement

$$\frac{du}{dx} = (1+x)^{-1},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -1.(1+x)^{-2},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 1.2.(1+x)^{-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^pu}{dx^p} = (-1)^{p-1}(p-1)!(1+x)^{-p}$$

donc le 1er terme du développement de $\frac{d^n y}{dx^n}$ est

$$(-1)^n\, n!\,\frac{L(1+x)}{(1+x)^{n+1}},$$

le terme général,

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}\,\frac{d^pu}{dx^p}\,\frac{d^{n+1-p}u}{dx^{n+1-p}},$$

est

$$(-1)^{n-1}\frac{n!}{p}(1+x)^{-n-1};$$

donc finalement nous pouvons écrire

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\left[L(1+x) - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right].$$

Les $n$ premiers termes de la série de Maclaurin sont alors

$$x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3\ldots+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n.$$

Pour voir si cette série est convergente, nous formerons le rapport d'un terme au précédent $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, et nous aurons en valeur absolue,

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|=\left[1+\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}\right]|x|;$$

la limite de ce rapport est visiblement égale à $|x|$ : la série est donc convergente si $|x|<1$, divergente si $|x|>1$, de nature inconnue à priori si $|x|=1$ ; mais dans ce dernier cas, la valeur absolue du terme général, $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, grandit indéfiniment puisque la série harmonique est divergente, donc la série actuelle n'est pas convergente.

Nous n'avons donc à étudier que les valeurs de $x$ comprises entre $-1$ et $+1$ et nous devons rechercher si, pour ces valeurs, le terme complémentaire $R_n$ tend ou ne tend pas vers 0. Prenons la forme de Cauchy

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x),$$

$\theta$ étant compris entre 0 et 1 ; nous aurons ici

$$R_n=(-1)^{n+1}(n+1)\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+2}}\left[L(1+\theta x)-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots-\frac{1}{n+1}\right],$$

ce qui peut s'écrire

$$R_n=\frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^2}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\left[(n+1)x^{n+1}L(1+\theta x)-(n+1)x^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)\right].$$

Le premier facteur reste fini : sa valeur absolue est comprise entre $\frac{1}{(1-x')^2}$ et $\frac{1}{(1+x')^2}$, $x'$ étant la valeur absolue de $x$ ; le second facteur est moindre que 1, car $1-\theta$ et $1+\theta x$ sont d'abord évidemment positifs et de plus $1-\theta$ est plus petit que $1+\theta x$, puisque $\theta(x+1)>0$ ; quant aux deux termes compris entre crochets, ils tendent vers 0 tous les deux, car

$$(n+1)x^{n+1} \qquad \text{et} \qquad (n+1)x^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$$

sont les termes généraux de deux séries convergentes pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $-1$ et $+1$.

Nous avons donc, pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $-1$ et $+1$,

$$\frac{L(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\cdots\pm\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\mp\cdots.$$

Ce résultat peut d'ailleurs s'obtenir immédiatement par la multiplication des deux séries convergentes

$$L(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots.$$

J. LOUIN, lycée de Toulouse

Solutions satisfaisantes : MM. Guinand, agent-voyer à Ecouen ; R. Bouvaist ; Barré, lieutenant à Arras.

**1183.** — *Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant la longueur de la bissectrice de l'angle droit et le volume engendré par le triangle en tournant autour de l'hypoténuse.*

Soit ABC le triangle rectangle cherché ; désignons par $x$ et $y$ les deux côtés AC et AB de l'angle droit, par $\alpha$ la bissectrice de l'angle droit et par $h$ la hauteur abaissée du point A sur l'hypoténuse.

En appliquant le théorème de la bissectrice au triangle rectangle et tenant compte de $\overline{BC}^2 = x^2 + y^2$, nous avons $\alpha = \dfrac{xy\sqrt{2}}{x+y}$.

D'autre part, le volume engendré par le triangle rectangle en tournant autour de l'hypoténuse BC a pour expression $\dfrac{1}{3}\pi . h^2 . BC$ ; nous pouvons donc poser $h^2.BC = a^3$, $a$ étant une constante.

Mais $h.BC = xy$, et $BC = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
donc nous avons

$$\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = a^3,$$

ou

$$x^4y^4 = a^6(x^2+y^2),$$

et, comme $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$,

$$x^4y^4 = a^6[(x+y)^2 - 2xy] ;$$

d'ailleurs

$$x+y = \frac{xy\sqrt{2}}{\alpha};$$

donc, en définitive, $xy$ est donné par l'équation

$$x^4y^4 = a^6\left(\frac{2x^2y^2}{\alpha^2} - 2xy\right).$$

Supprimons la solution $xy = 0$ qui ne correspond évidemment à aucun triangle répondant à la question, nous aurons pour déterminer $xy$ une équation du troisième degré

$$\alpha^2 (xy)^3 - 2a^6(xy) + 2\alpha^2 a^6 = 0.$$

Cette équation présente deux variations, elle a donc 0 ou deux racines positives ; elle a toujours une racine négative qui est inacceptable. Pour qu'elle ait deux racines positives, il faut que le discriminant soit négatif, c'est-à-dire que l'on ait

$$-4\left(\frac{2a^6}{\alpha^2}\right)^3 + 27 . 4 . a^{12} < 0,$$

ou

$$27\alpha^6 < 8a^6,$$

ou

$$a > \alpha\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Mais cela est insuffisant : il faut encore que la valeur de $x+y$ soit positive et que $x$ et $y$ soient positifs. Or, si nous désignons $xy$ par A, nous avons $x+y = \dfrac{A\sqrt{2}}{\alpha}$, quantité positive avec A, et $x$, $y$ sont racines de l'équation

$$X^2 - \frac{A\sqrt{2}}{\alpha}X + A = 0 ;$$

la condition de réalité est donc

$$\frac{2A^2}{\alpha^2} - 4A > 0, \qquad \text{ou} \qquad A > 2\alpha^2.$$

Il reste à comparer les racines positives de l'équation cubique au nombre $2\alpha^2$ ; pour cela il faut remplacer $xy$ par $2\alpha^2$ dans cette équation et étudier le signe du résultat. Le nombre ainsi obtenu est

du signe de

$$4\alpha^6 - a^6 ;$$

or 4 est plus grand que $\frac{27}{8}$, il y a donc deux cas à distinguer suivant que $a$ est compris entre $\alpha\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\alpha\sqrt[6]{4}$, ou que $a$ est plus grand que $\alpha\sqrt[6]{4}$.

Dans le second cas, $2\alpha^2$ est compris entre les racines de l'équation cubique, la plus grande est acceptable et l'autre ne l'est pas

Dans le premier cas, $2\alpha^2$ est extérieur à l'intervalle limité par les deux racines positives de l'équation cubique ; mais il est facile de voir, en formant l'équation aux inverses et en cherchant les racines positives de sa dérivée, que le nombre $\frac{2}{3\alpha^2}$ est compris entre les inverses $\frac{1}{A'}$ et $\frac{1}{A''}$ des deux racines dont il est question ; comme $\frac{1}{2\alpha^2}$ est plus petit que ce nombre, il est moindre que $\frac{1}{A'}$ et $\frac{1}{A''}$ ; donc $2\alpha^2$ est plus grand que A′ et A″ et aucune d'elles n'est acceptable. Le problème n'a pas de solution.

Il n'y a donc de solution que si $a$ est supérieur à $\alpha\sqrt[6]{4}$, et il n'y en a qu'une.

E. N. BARISIEN.

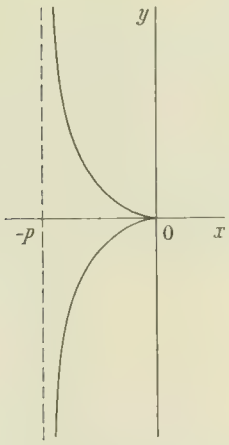
Bonne solution : M. Vial, à Châlons.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1181.** — *Soit* M *un point variable d'une parabole,* O *le sommet et* F *le foyer de la parabole. La perpendiculaire menée en* O *à* OM *rencontre la tangente et la normale en* M *aux points* T *et* N ; *la perpendiculaire menée en* F *à* FM *rencontre la tangente et la normale en* M *aux points* T′ *et* N′. *Construire les quatre courbes, lieux des points* T, N, T′, N′.

Prenons pour axes de coordonnées les axes habituels : l'axe et la tangente au sommet de la parabole et désignons comme habituellement par $y^2 - 2px = 0$ l'équation de cette ligne. Appelons $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point M ; la tangente et la normale auront respectivement pour équations

$$px - \beta y + p\alpha = 0,$$
$$\beta(x - \alpha) + p(y - \beta) = 0 ;$$




quant au rayon perpendiculaire à OM, il a pour équation $\alpha x + \beta y = 0$. Nous aurons donc le lieu de T ou de N en prenant l'équation de la tangente ou celle de la normale, la joignant à l'équation $\alpha x + \beta y = 0$ et à la relation $\beta^2 - 2p\alpha = 0$, puis éliminant $\alpha$, $\beta$ entre les trois équations.

*Lieu de* T. — Nous avons d'abord

$$\frac{\beta}{x} = \frac{\alpha}{-y} = \frac{px}{xy + py} ;$$

puis, comme $\beta^2 = 2p\alpha$,

$$p^2x^4 + 2p^2xy(xy + py) = 0.$$

Supprimons le facteur $p^2x$, il reste le lieu cherché

$$(1) \qquad x^3 + 2xy^2 + 2py^2 = 0.$$

C'est une cubique symétrique par rapport à $Ox$, ayant un point de rebroussement en O et une asymptote parallèle à $Oy$, la droite $x = -p$.

Cette courbe a la forme d'une cissoïde droite.

La solution $x = 0$, que nous avons supprimée, est une solution étrangère qui n'a aucun sens géométrique.

*Lieu de* N. — Ici encore nous avons

$$\frac{\beta}{x} = \frac{\alpha}{-y} = \lambda;$$

portant $\alpha$ et $\beta$ dans $\beta^2 = 2p\alpha$, nous obtenons de suite $\lambda$

$$\lambda x^2 = -2py, \qquad \lambda = -\frac{2py}{x^2}.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer maintenant $\alpha$ et $\beta$ par leurs valeurs dans l'équation de la normale pour avoir le lieu du point N ; nous trouvons ainsi, après suppression des facteurs $x$ et $y$, l'équation

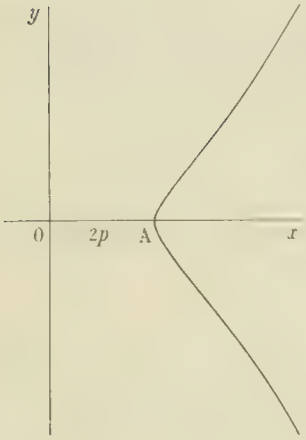
$$(2) \qquad x^2 = 2p(x^2 + 2y^2),$$

qui représente le lieu de N.

En résolvant cette équation par rapport à $y^2$, on a

$$y^2 = \frac{x^2(x - 2p)}{4p}.$$

Sous cette forme nous voyons que $y$ n'est réel que si $x$ est plus grand que $2p$ ; pour $x = 2p$, $y = 0$ ; puis $x$ augmentant, $y$ augmente ; pour $x = \infty$, $y$ est infini. La courbe est visiblement symétrique par rapport à $Ox$ et admet deux branches paraboliques dans la direction $Oy$. Elle est dès lors aisée à tracer.




La solution $x = 0$ que nous avons supprimée, est une solution étrangère introduite par le calcul. La solution $y = 0$, au contraire, est une solution exceptionnelle qui correspond au cas où le point M vient en O : alors la normale et la perpendiculaire au rayon OM coïncident toutes deux avec $Ox$, dont tous les points sont ainsi des points du lieu.

Pour trouver le lieu des autres points T′ et N′, nous pourrions procéder de la même manière, en remplaçant simplement l'équation $\alpha x + \beta y = 0$ du rayon perpendiculaire à OM par

$$\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)\left(x - \frac{p}{2}\right) + \beta y = 0,$$

équation du rayon perpendiculaire à FM en F. Mais il vaut mieux procéder comme le fait un de nos correspondants, M. P. Canet, et se servir des coordonnées polaires.

Si on porte l'origine au point F, l'équation de la parabole devient

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\omega},$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 - \cos\omega}{p};$$

d'ailleurs on sait que la tangente au point $(\alpha, r)$ a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\cos(\omega - \alpha) + \left(\frac{1}{r}\right)'\sin(\omega - \alpha),$$

et si on y fait $\omega = \alpha + \frac{\pi}{2}$, on trouve $\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{r}\right)' = \frac{\sin\alpha}{p}$ ; comme $\alpha = \omega - \frac{\pi}{2}$, $\rho = -\frac{p}{\cos\omega}$.

Telle est l'équation du lieu de T', c'est l'équation d'une droite perpendiculaire à $Ox$, c'est l'équation de la directrice.

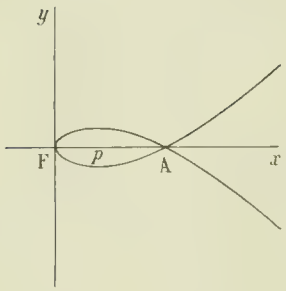
Il est d'ailleurs évident géométriquement que le lieu du point T' est la directrice, car le point T' est le pôle de FM et cette droite tourne autour du foyer.

L'équation de la normale est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\cos(\omega - \alpha) + \frac{1}{r'}\sin(\omega - \alpha);$$

pour $$\omega = \alpha + \frac{\pi}{2}, \qquad \text{on a} \qquad \rho = r',$$

ou $$\rho = -\frac{p\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}.$$




Mais $\alpha = \omega - \frac{\pi}{2}$, donc $\rho = +\frac{p\cos\omega}{(1-\sin\omega)^2}$; telle est l'équation du lieu de N'.

L'équation cartésienne est

$$x^3 - 2p(x^2 + 2y^2) + p^2x = 0$$

ou enfin $$y^2 = \frac{x(x-p)^2}{4p}.$$

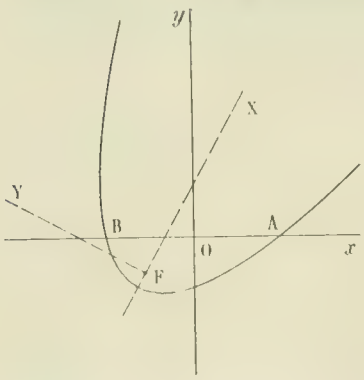
Sous cette forme la construction de la courbe est évidente : sommet à l'origine F avec F$y$ pour tangente, point double sur $Ox$ au point A d'abscisse $x = p$, symétrie par rapport à $Ox$, branches paraboliques dans la direction $Oy$, etc. . Les variations de $y$ sont d'ailleurs faciles à voir.

P. CANET et R. BOUVAIST.

Bonnes solutions : MM. J. Haag ; M. Treillou ; Eugènie Grecescu, à Bucarest ; Vial, à Châlons ; A. Vial, à Saint-Etienne ; Marchal.

---

**1196**. — *Lieu des foyers des paraboles de grandeur constante qui passent par deux points donnés. Construire la courbe.*




Prenons pour axe des $x$ la droite joignant les deux points donnés et pour axe des $y$ la perpendiculaire au milieu du segment déterminé par les deux points. Désignons par $a$ et $-a$ les abscisses de ces deux points et par $p$ le paramètre constant des paraboles considérées. Considérons l'une de ces paraboles, soient F son foyer, FX son axe et FY la perpendiculaire à l'axe menée par le foyer. L'équation de la parabole par rapport aux axes FX et FY est

$$(1) \qquad Y^2 - 2pX - p^2 = 0.$$

Désignons par $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du point F par rapport au premier système et par $\varphi$ l'angle de $Ox$ avec FX, les formules de transformation de coordonnées

sont

$$x = \alpha + X\cos\varphi - Y\sin\varphi,$$

$$y = \beta + X\sin\varphi + Y\cos\varphi;$$

on en tire

$$X = (x - \alpha)\cos\varphi + (y - \beta)\sin\varphi,$$

$$Y = -(x - \alpha)\sin\varphi + (y - \beta)\cos\varphi,$$

et en portant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient

$$(x - \alpha)\sin\varphi + (y - \beta)\cos\varphi)^2 - 2p((x - \alpha)\cos\varphi + (y - \beta)\sin\varphi) + p^2 = 0;$$

c'est l'équation de la parabole par rapport aux axes $Ox$, $Oy$. Ecrivons que cette courbe passe par les points A et B; pour cela remplaçons $y$ par zéro et écrivons que l'équation en $x$ obtenue a mêmes racines que l'équation $x^2 - a^2 = 0$. Nous avons ainsi les deux conditions

$$a^2\sin^2\varphi + (\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi)^2 - 2p(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi) - p^2 = 0,$$

$$\sin\varphi(\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi) + p\cos\varphi = 0.$$

On aurait l'équation du lieu en éliminant $\varphi$ entre ces deux équations. Mais ce calcul paraît fort pénible; il sera plus simple de chercher à calculer $\alpha$ et $\beta$ en fonction de $\varphi$. Auparavant, remplaçons dans la première équation $\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi$ par sa valeur $-p\operatorname{cotg}\varphi$ tirée de la seconde, nous obtiendrons deux équations linéaires pour déterminer $\alpha$ et $\beta$

$$\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi + p\operatorname{cotg}\varphi = 0,$$

$$2p(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi) + p^2\operatorname{cotg}^2\varphi - p^2 + a^2\sin^2\varphi = 0,$$

et en les résolvant par rapport à $\alpha$ et $\beta$ nous avons

$$\alpha = -\frac{(p^2 + a^2\sin^4\varphi)\cos\varphi}{2p\sin^2\varphi}, \qquad \beta = \frac{p^2 - a^2\sin^4\varphi}{2p\sin\varphi}.$$

Pour discuter la courbe définie par ces deux équations, il faudrait étudier les signes des dérivées de $\alpha$ et de $\beta$ par rapport à $\varphi$. Mais ces dérivées sont très compliquées et leur discussion serait difficile. Nous nous bornerons à étudier le signe et les valeurs remarquables de $\alpha$ et de $\beta$.

En changeant $\varphi$ en $\varphi + 2\pi$, $\alpha$ et $\beta$ ne changent pas, il suffit donc de faire varier $\varphi$ dans un intervalle d'étendue égale à $2\pi$. En changeant $\varphi$ en $\varphi + \pi$, $\alpha$ et $\beta$ changent de signe; la courbe est donc symétrique par rapport au point O. Il suffira alors de faire varier $\varphi$ dans un intervalle dont l'étendue soit égale à $\pi$, et d'achever par symétrie. Mais en changeant $\varphi$ en $-\varphi$, $\alpha$ ne change pas et $\beta$ change de signe. Cela nous montre que la courbe est symétrique par rapport aux deux axes et que nous en construirons un quart en faisant varier $\varphi$ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Cela posé, remarquons que $\alpha$ et $\beta$ sont infinis pour $\varphi = 0$; $\alpha$ s'annule pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$. D'autre part le numérateur de $\beta$, $p^2 - a^2\sin^4\varphi$ ne peut s'annuler que si $p \leqslant a$. Trois cas sont à distinguer.

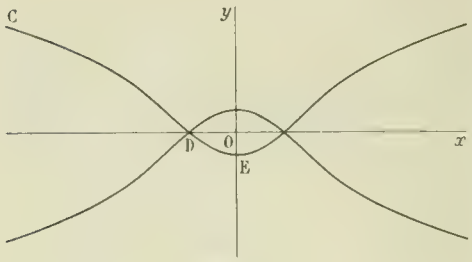



Fig. 1.

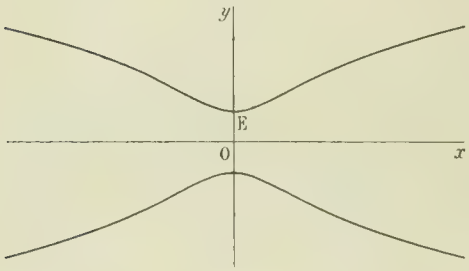



Fig. 2.

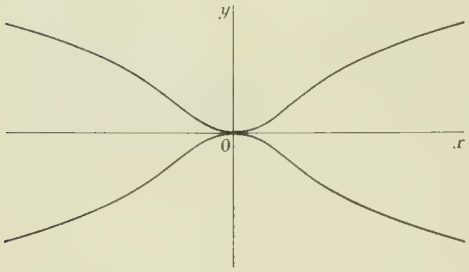



Fig. 3.

1° $p < a$. — $\beta$ s'annule pour une valeur de $\varphi$ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et définie par $\sin\varphi = \sqrt{\frac{p}{a}}$. Soit $\theta$ cette valeur. Quand $\varphi$ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\alpha$ est sans cesse négatif, il varie d'une manière continue de $-\infty$ à 0. $\beta$ part de $+\infty$, prend la valeur zéro pour $\varphi = \theta$, puis il change de signe et atteint la valeur négative $\frac{p^2 - a^2}{2p}$ pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi la branche de courbe CDE, et en achevant par symétrie par rapport aux deux axes on obtient la courbe représentée par la figure 1.

2° $p > a$. — $\beta$ est sans cesse positif et varie d'une manière continue de $+\infty$ à $\frac{p^2 - a^2}{2p}$ (fig. 2).

3° $p = a$. — $\beta$ s'annule pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (fig. 3).

Comme $\frac{\beta}{\alpha}$ a pour limite zéro pour $\varphi = 0$, les branches infinies sont paraboliques dans la direction $Ox$.

D'autre part on voit aisément que pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\beta}{d\varphi}$ est nul, et $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ n'est pas nul, donc les tangentes aux points de rencontre de la courbe et de $Oy$ sont parallèles à $Ox$.

J. HAAG, à Nancy.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1249.** — Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant la bissectrice de l'angle droit et la somme des surfaces engendrées par l'hypoténuse en tournant autour de chacun des côtés de l'angle droit.

**1250.** — Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse et la somme des volumes engendrés par le triangle en tournant autour des deux côtés de l'angle droit.

**1251.** — Soient AB une corde fixe d'un cercle donné et M un point variable sur la circonférence de ce cercle. Trouver et construire les courbes lieux des pieds des bissectrices intérieures et extérieures des angles A et B du triangle MAB.

E.-N. Barisien.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

14e Année. — N° 1. Octobre 1903.

## PREMIÈRE PARTIE

### THÉORÈMES SUR LES CUBIQUES PLANES

par M. J. **Richard**, professeur au lycée de Dijon.

Je vais démontrer d'une façon très élémentaire les deux théorèmes suivants concernant les cubiques planes, et dont le premier est bien connu.

Soient une cubique plane Γ, P et Q deux points de la courbe, $a_1, a_2, a_3, a_4$ les quatre points de contact des tangentes issues de P, $b_1, b_2, b_3, b_4$ les points de contact des tangentes issues de Q.

I. — *Les quatre tangentes issues de* P *ont même rapport anharmonique que les quatre tangentes issues de* Q.

II. — *Les quatre tangentes issues de* P *et les quatre droites joignant* P *aux points* $b_1, b_2, b_3, b_4$, *convenablement accouplées, forment quatre couples de droites en involution.*

Considérons comme se correspondant deux droites joignant aux points P et Q un même point M de la cubique. Une droite passant par P coupant la courbe en deux points M et M′ a deux correspondantes QM, QM′. Inversement, une droite passant par Q a aussi deux correspondantes passant par P. Soient λ et μ les coefficients angulaires de deux droites correspondantes, l'une passant par P, l'autre, par Q, il y aura entre λ et μ une relation biquadrique

$$(1) \qquad A\lambda^2\mu^2 + B\lambda^2\mu + C\lambda\mu^2 + D\lambda^2 + E\mu^2 + F\lambda\mu + G\lambda + H\mu + K = 0.$$

Les coefficients angulaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des tangentes issues de P sont racines de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ obtenue en écrivant que l'équation (1) a une racine double en μ. Les racines doubles correspondantes seront désignées par $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4$. Ce sont les coefficients angulaires des droites joignant Q aux quatre points de contact $a_1, a_2, a_3, a_4$.

De même en écrivant que l'équation (1) a une racine double en λ, on a une équation $\psi(\mu) = 0$. Ses racines $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ sont les coefficients angulaires des tangentes issues de Q, et les quatre racines doubles $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4$ seront les coefficients angulaires des droites joignant P aux points de contact $b_1, b_2, b_3, b_4$, de ces quatre tangentes.

Tout revient donc à démontrer :

1° Que le rapport anharmonique $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$ est égal au rapport anharmonique $(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)$.

2° Que les couples $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_3\lambda_4$ par exemple, et des couples convenablement choisis $\lambda'_1\lambda'_2$, $\lambda'_3\lambda'_4$ sont en involution.

Pour démontrer cela, nous allons montrer que l'étude des relations biquadratiques de la forme (1) se ramène à l'étude de deux coniques.

Considérons dans le même plan deux coniques C et C′ non tangentes entre elles. A chaque point M de C faisons correspondre les deux points M′ où les deux tangentes à C′ issues de M touchent C′.

Alors, à chaque point M′ de la conique C′ correspondront sur C les deux points où la tangente en M′ rencontre la courbe C.

Si l'on exprime les coordonnées d'un point de C en fonction d'un paramètre $\lambda$, celles de C′ en fonction d'un paramètre $\mu$, on aura entre $\lambda$ et $\mu$ une correspondance biquadratique.

Toute correspondance biquadratique peut être obtenue de cette façon. Supposons en effet l'équation (1) donnée, et prenons arbitrairement une conique C, les coordonnées d'un point de cette conique étant des fonctions données d'un paramètre $\lambda$.

Prenons sur C un point $\lambda_0$, soient $\mu_0$ l'une des valeurs de $\mu$ que l'équation (1) lui fait correspondre, $\lambda_1$ l'autre valeur de $\lambda$ qui correspond à la même valeur $\mu_0$ ; soient $\mu_1$, l'autre valeur de $\mu$ qui correspond à $\lambda_1$, et $\lambda_2$ l'autre valeur de $\lambda$ qui correspond à $\mu_1$. Soit $\mu_2$ l'autre valeur de $\mu$ qui correspond à $\lambda_2$, etc. Nous obtenons ainsi cinq droites $\lambda_0\lambda_1$, $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_2\lambda_3$, $\lambda_3\lambda_4$ et $\lambda_4\lambda_5$. Construisons une conique tangente à ces cinq droites, ce sera la conique C′. La conique C′ étant déterminée, sa représentation paramétrique ne l'est pas encore ; il faut se donner les valeurs du paramètre qui correspondent à trois points donnés. Prenons $\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$ pour les valeurs de ce paramètre correspondant aux points où les droites $\lambda_0\lambda_1$. $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_2\lambda_3$, touchent la courbe C′. Alors la représentation paramétrique de C′ est déterminée, et les deux coniques déterminent une relation biquadratique unique.

Je dis que cette relation n'est autre que la relation (1). En effet, soit $f(\lambda, \mu) = 0$ l'équation de la correspondance définie par nos deux coniques ; on aura
$f(\lambda_0, \mu_0) = 0$, $f(\lambda_1, \mu_0) = 0$, $f(\lambda_1, \mu_1) = 0$, $f(\lambda_2, \mu_1) = 0$, $f(\lambda_2, \mu_2) = 0$, $f(\lambda_3, \mu_2) = 0$; en outre les relations $f(\lambda_3, \mu) = 0$, $f(\lambda_4, \mu) = 0$ auront une même solution $\mu_3$, les relations $f(\lambda_4, \mu) = 0$, $f(\lambda_0, \mu) = 0$ auront une même solution $\mu_4$. Ces huit conditions déterminent les coefficients de la relation biquadratique.

Revenons aux théorèmes énoncés ci-dessus. Supposons que le point M de la conique C vienne coïncider avec un point commun à C et à C′. Les deux tangentes issues de M à C′ seront confondues. On en conclut que les valeurs de $\lambda$ ($\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$) telles que la relation (1) ait une racine double en $\mu$ correspondent aux quatre points où C coupe C′ ($\mu_1'$, $\mu_2'$, $\mu_3'$, $\mu_4'$ sont les quatre valeurs correspondantes de $\mu$).

De même, si M′ vient en un point de contact avec C′ de l'une des tangentes communes à C et à C′, les deux valeurs correspondantes de $\lambda$ deviennent égales. Ainsi les quatre points de contact de C′ avec les quatre tangentes communes à C et C′ ont pour paramètres les quatre valeurs de $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ pour lesquelles la relation (1) a une racine double en $\lambda$. Les valeurs correspondantes de $\lambda$ sont $\lambda_1'$, $\lambda_2'$, $\lambda_3'$, $\lambda_4'$.

Théorème I. — On a l'égalité des rapports anharmoniques

$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4).$$

Ceci revient à démontrer que le rapport anharmonique des quatre points communs à deux coniques considérées comme appartenant à la première est égal à celui des quatre tangentes communes considérées comme appartenant à la deuxième. Or ceci résulte tout de suite de la possibilité de transformer l'une des coniques dans l'autre par polaires réciproques.

Théorème II. — Les couples $\lambda_1'\lambda_2'$, $\lambda_3'\lambda_4'$ et les couples convenablement associés $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_3\lambda_4$ forment une involution.

Prenons la corde $\lambda_1'\lambda_2'$ par exemple, cette corde a pour pôle par rapport à C un ombilic des deux coniques, puisque les tangentes en ses extrémités sont des tangentes communes, cet ombilic est situé sur un des côtés du triangle autopolaire, l'ombilic opposé, pôle de $\lambda_3'\lambda_4'$, est situé sur le même côté. Donc les droites $\lambda_1'\lambda_2'$ et $\lambda_3'\lambda_4'$ passent par le pôle de ce côté, c'est-à-dire par un sommet S du triangle autopolaire. Ce point S est le point de rencontre de deux sécantes communes, $\lambda_1\lambda_2$ et $\lambda_3\lambda_4$ par exemple ; ainsi $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_3\lambda_4$, $\lambda_1'\lambda_2'$, $\lambda_3'\lambda_4'$ concourent, ce qui suffit pour démontrer la proposition énoncée.

# ALGÈBRE

**1184.** — *On considère $n$ quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ; puis, les $n$ quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que l'on en déduit par les relations*

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \qquad b_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}, \qquad \ldots, \qquad b_n = \frac{a_n + a_1}{2};$$

*de même, les $n$ quantités $c_1, c_2, \ldots, c_n$ que l'on en déduit par les relations*

$$c_1 = \frac{b_1 + b_2}{2}, \qquad c_2 = \frac{b_2 + b_3}{2}, \qquad \ldots, \qquad c_n = \frac{b_n + b_1}{2};$$

*et ainsi de suite.*

*Soit alors*

$$\begin{aligned}
u_1 &= (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \cdots + (a_n - a_1)^2,\\
u_2 &= (b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + \cdots + (b_n - b_1)^2,\\
u_3 &= (c_1 - c_2)^2 + (c_2 - c_3)^2 + \cdots + (c_n - c_1)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

*montrer que la série*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

*est convergente et a pour somme* $\frac{4}{n}\Sigma(a_i - a_j)^2$.

Pour donner à cette question tout son intérêt, nous supposerons que les $n$ nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, réels ou imaginaires, quelconques, sont les affixes de $n$ points d'un plan $A_1, A_2, \ldots, A_n$, formant un polygone simple, le polygone $A_1A_2\ldots A_nA_1$. Nous voyons alors que les $n$ nombres $b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$, $b_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}$, $\ldots$, $b_n = \frac{a_n + a_1}{2}$ sont les affixes des milieux des côtés du polygone ; soient $B_1$, $B_2, \ldots, B_n$, ces nouveaux points. De même les nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n$, tels que $c_k = \frac{b_k + b_{k+1}}{2}$ sont les affixes des milieux des côtés du nouveau polygone ; et ainsi de suite.

Dans le cas de deux points, tous les points B, C, ..., coïncident avec le milieu du segment limité par ces deux points, c'est-à-dire avec le centre des moyennes distances des deux points. Dans le cas de trois points, il est visible que les triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, ..., $L_1L_2L_3$, ... tendent vers le point de concours des médianes du triangle donné, c'est-à-dire vers le centre des moyennes distances. Dans le cas de quatre points, cette même propriété se vérifie aussi aisément par des considérations géométriques élémentaires.

Nous allons démontrer que, dans le cas général, tous les points $L_k$ que l'on forme par application répétée de ce même procédé tendent vers le centre des moyennes distances, G, des points A, quand le nombre des opérations augmente indéfiniment.

Pour cela, nous poursuivrons indéfiniment la notation $A_k$, en posant $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$, ... de même $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, .... Or nous avons d'abord $b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$, $b_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}$, $c_1 = \frac{b_1 + b_2}{2}$; d'où $c_1 = \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4} = \frac{a(1 + a)^2}{2^2}$, en regardant les indices des $a$ comme des exposants; nous aurons de même $c_2 = \frac{a^2(1 + a)^2}{2^2}$, .... Admettons qu'au bout de $p - 1$ opérations nous ayons ainsi $k_1 = \frac{a(1 + a)^{p-1}}{2^{p-1}}$, $k_2 = \frac{a^2(1 + a)^{p-1}}{2^{p-1}}$; nous aurons de suite $l_1 = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{a(1 + a)^p}{2^p}$;

de même $l_2 = \frac{a^2(1+a)^p}{2^p}$, .... Nous allons montrer que $l_1$ a pour limite $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$; pour cela nous développons $l_1$ et nous écrivons

$$l_1 = \frac{a_1 + C_p^1 a_2 + C_p^2 a_3 + \cdots + C_p^k a_{k+1} + \cdots}{2^p},$$

ou bien, à cause de $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, ....

$$l_1 = \frac{a_1(1 + C_p^n + C_p^{2n} + \cdots) + a_2(C_p^1 + C_p^{n+1} + C_p^{2n+1} + \cdots) + \cdots}{2^p}.$$

Restent maintenant à calculer $1 + C_p^n + C_p^{2n} + \cdots$, $C_p^1 + C_p^{n+1} + C_p^{2n+1} + \cdots$, .... Partons de

$$(1+x)^p = 1 + C_p^1 x + C_p^2 x^2 + \cdots + C_p^n x^n + \cdots$$

et remplaçons-y $x$ par une racine quelconque de l'équation binome $x^n = 1$, $x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$;

nous aurons
$$1 + x = 1 + \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

ou
$$1 + x = 2\cos\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right) = 2\cos\frac{k\pi}{n}\, e^{\frac{ik\pi}{n}},$$

et par suite,
$$(1+x)^p = 2^p \cos^p\frac{k\pi}{n}\, e^{\frac{ipk\pi}{n}}.$$

Sauf pour $k = 0$, le facteur de $2^p$ tend vers 0 quand $p$ grandit indéfiniment. Cela posé, remplaçons $x$ successivement par toutes les racines de l'équation binome $x^n = 1$ et ajoutons tous les résultats obtenus, nous aurons

$$n(1 + C_p^n + C_p^{2n} + \cdots) = \Sigma(1+x)^p,$$

par suite

$$n\frac{1 + C_p^n + C_p^{2n} + \cdots}{2^p} = \frac{\Sigma(1+x)^p}{2^p}.$$

L'un des termes du second membre, celui qui correspond à $k = 0$, est égal à 1; tous les autres tendent vers 0 quand $p$ augmente indéfiniment; on a donc

$$\lim_{p=\infty} \frac{1 + C_p^n + C_p^{2n} + \cdots}{2^p} = \frac{1}{n}.$$

Considérons maintenant $x^{n-1}(1+x)^p$ ou $\frac{(1+x)^p}{x}$; cette quantité est égale à

$$2^p \cos^p\frac{k\pi}{n}\, e^{i\left(\frac{pk\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n}\right)};$$

pour $k = 0$, elle est égale à $2^p$; pour les autres valeurs, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, le facteur $\cos^p\frac{k\pi}{n}$ tend vers 0, le facteur $e^{i\left(\frac{pk\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n}\right)}$ a pour module 1; donc le multiplicateur de $2^p$ tend vers 0 pour toutes les valeurs de $k$ autres que 0. D'ailleurs nous avons

$$n(C_p^1 + C_p^{n+1} + C_p^{2n+1} + \cdots) = \Sigma\frac{(1+x)^p}{x},$$

par suite

$$n\frac{C_p^1 + C_p^{n+1} + C_p^{2n+1} + \cdots}{2^p} = \frac{1}{2^p}\Sigma\frac{(1+x)^p}{x},$$

le second membre a pour limite 1 quand $p$ grandit indéfiniment; donc

$$\lim_{p=\infty} \frac{C_p^1 + C_p^{n+1} + C_p^{2n+1} + \cdots}{2^p} = \frac{1}{n}.$$

Même raisonnement pour les autres termes. Le nombre $l_1$ a donc pour limite

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n};$$

donc le point $L_1$ tend vers le point G, centre des moyennes distances de $A_1, A_2, \ldots, A_n$. La même méthode s'applique à $l_2, l_3, \ldots, l_n$; donc tous les points $L_k$ tendent vers le point G, centre des moyennes distances des $n$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Envisageons alors la série dont les divers termes sont $\Sigma\overline{A_1A_2}^2$, $\Sigma\overline{B_1B_2}^2$, ..., $\Sigma\overline{L_1L_2}^2$ ..., ou, pour préciser, dont le terme général, $u_p$, est égal à

$$\overline{L_1L_2}^2 + \overline{L_2L_3}^2 + \cdots + \overline{L_pL_1}^2;$$

nous allons montrer que cette série est convergente et calculer sa somme.

A cet effet, joignons un point quelconque du plan, O, aux divers points que nous avons introduits et appliquons le théorème de la médiane; nous aurons

$$\overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2 = 2\overline{OB_1}^2 + \frac{\overline{A_1A_2}^2}{2},$$

$$\overline{OA_2}^2 + \overline{OA_3}^2 = 2\overline{OB_2}^2 + \frac{\overline{A_2A_3}^2}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{OA_n}^2 + \overline{OA_1}^2 = 2\overline{OB_n}^2 + \frac{\overline{A_nA_1}^2}{2},$$

et, en ajoutant,

$$2S_0^2 = 2S_1^2 + \frac{\Sigma\overline{A_1A_2}^2}{2},$$

ou enfin

$$S_0^2 = S_1^2 + \frac{1}{4}\Sigma\overline{A_1A_2}^2,$$

$S_0^2$ et $S_1^2$ désignant les sommes $\Sigma\overline{OA_k}^2$, $\Sigma\overline{OB_k}^2$.

Nous avons ainsi successivement

$$S_0^2 = S_1^2 + \frac{1}{4}\Sigma\overline{A_1A_2}^2,$$

$$S_1^2 = S_2^2 + \frac{1}{4}\Sigma\overline{B_1B_2}^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_p^2 = S_{p+1}^2 + \frac{1}{4}\Sigma\overline{L_1L_2}^2,$$

puis, en ajoutant ces diverses égalités,

$$S_0^2 = S_{p+1}^2 + \frac{1}{4}(u_0 + u_1 + \cdots + u_p).$$

Or d'après ce que nous avons vu antérieurement, tous les points L tendent vers le point G, donc $S_{p+1}^2$ tend vers $n\overline{OG}^2$; par conséquent, nous avons

$$\lim_{p=\infty}(u_0 + u_1 + \cdots + u_p) = 4(S_0^2 - n\overline{OG}^2).$$

Cette formule montre que la série est convergente et a pour somme $4(S_0^2 - n\overline{OG}^2)$. Appelons $\Sigma$ la somme de cette série et plaçons le point O successivement en G, en $A_1$, en $A_2$, ..., en $A_n$, nous aurons successivement aussi

$$\Sigma = 4\Sigma\overline{GA_k}^2,$$

$$\Sigma = 4(\Sigma\overline{A_1A_k}^2 - n\overline{A_1G}^2), \qquad \Sigma = 4(\Sigma\overline{A_2A_k}^2 - n\overline{A_2G}^2), \qquad \ldots, \qquad \Sigma = 4(\Sigma\overline{A_nA_k}^2 - n\overline{A_nG}^2).$$

En ajoutant les $n$ dernières égalités, nous avons

$$n\Sigma = 8\Sigma\overline{A_iA_j}^2 - 4n\Sigma\overline{GA_k}^2;$$

mais

$$4\Sigma\overline{GA_k}^2 = \Sigma;$$

donc

$$2n\Sigma = 8\Sigma\overline{A_iA_j}^2,$$

et

$$\Sigma = \frac{4}{n}\Sigma\overline{A_iA_j}^2.$$

C'est le résultat annoncé.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1175.** — *Une droite est normale à un faisceau de surfaces homofocales. Démontrer que les plans tangents menés par cette droite à l'une de ces surfaces, forment un faisceau harmonique avec les plans tangents menés par la même droite à celle de ces surfaces qui lui est normale. Trouver le lieu des points de contact.*

Considérons un faisceau de surfaces homofocales ayant pour équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0,$$

et pour équation tangentielle

$$(a^2+\lambda)u^2 + (b^2+\lambda)v^2 + (c^2+\lambda)w^2 - r^2 = 0.$$

Il est évident qu'il y a une surface de ce faisceau et une seule qui est tangente à un plan donné ; on démontre sans peine aussi que le lieu des pôles d'un plan donné par rapport à ces surfaces est une droite perpendiculaire au plan ; le point de rencontre de cette droite avec le plan étant justement le point de contact du plan avec la surface du faisceau qui le touche. On démontre aussi, et cette propriété est classique, que par un point quelconque de l'espace il passe trois surfaces du faisceau, un ellipsoïde, un hyperboloïde à deux nappes et un hyperboloïde à une nappe, et que ces trois surfaces se coupent en ce point à angle droit, deux à deux.

Considérons alors une droite quelconque de l'espace définie par les équations de deux plans $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ ; tous les plans menés par cette droite ont pour équation

$$P_1 + \mu P_2 = 0,$$

et nous aurons ceux qui sont tangents à une surface du faisceau en exprimant que les coordonnées de ce plan satisfont à l'équation tangentielle; nous trouvons ainsi une équation du second degré en $\mu$ de la forme

$$T + \lambda T' = 0,$$

T et T′ étant deux trinomes du second degré en $\mu$. Il résulte de là que les couples de plans tangents aux diverses surfaces du faisceau forment une involution dont les deux couples $T = 0$, $T' = 0$ sont les couples de base ; or le second couple, $T' = 0$, est formé par le couple de plans tangents au cercle imaginaire de l'infini ; donc les deux plans doubles de l'involution sont rectangulaires. Mais, pour avoir un plan double de l'involution, il faut que les deux plans du couple soient confondus, c'est-à-dire que la droite par laquelle on mène ces plans tangents soit tangente à la surface correspondante. Il y a donc deux surfaces du faisceau tangentes à une droite quelconque de l'espace et les plans tangents correspondants sont rectangulaires ; ce sont ces plans qui divisent harmoniquement chaque couple.

Dans le cas où la droite envisagée, D, est normale à l'une des surfaces en A, les deux surfaces tangentes à la droite D sont les deux autres surfaces qui passent au point A, puisque les normales à cha-

cune d'elles sont perpendiculaires à la droite D en A. Ici les deux points de contact de la droite D avec les surfaces qu'elle touche sont confondus avec le point A et les plans tangents sont les deux plans rectangulaires menés par la droite D et par les deux autres normales.

L'énoncé est donc faux : les plans tangents menés par la droite à la surface qui lui est normale font partie de l'involution, mais ce ne sont pas les plans doubles, ce ne sont pas ceux qui forment un faisceau harmonique avec le couple général de l'involution.

Pour trouver le lieu des points de contact, considérons la droite D comme étant définie par deux plans $P_1$ et $P_2$, et soient $\Delta_1$, $\Delta_2$ les deux droites perpendiculaires à ces plans qui sont les lieux de leurs pôles ; soient aussi $M_1$ et $M_2$ les pôles de ces deux plans par rapport à une surface particulière du faisceau $\lambda$. Les deux points $M_1$ et $M_2$ décrivent deux séries semblables et, par suite, le lieu de $M_1M_2$ est un paraboloïde hyperbolique dont un des plans directeurs est perpendiculaire à D. Tel est le lieu des droites polaires de D par rapport aux surfaces du faisceau. La droite D rencontre ce paraboloïde en deux points qui sont les points de contact de la droite avec les deux surfaces du faisceau qu'elle touche. Ce paraboloïde contient aussi les droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$, c'est-à-dire les droites lieux des pôles des divers plans qui passent par la droite D. Par conséquent le lieu des points de contact de ces plans avec les surfaces du faisceau est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de la droite D sur le système des génératrices $\Delta$ ; c'est donc une cubique gauche placée sur le paraboloïde et qui se projette sur le plan directeur perpendiculaire à D suivant une cubique circulaire à point double.

Dans le cas où la droite D est normale à l'une des surfaces en A, les droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont dans le plan tangent en A et la droite $M_1M_2$ décrit ce plan ; c'est alors une droite perpendiculaire à sa polaire, elle fait partie du complexe des axes ; elle enveloppe donc dans un plan la conique du complexe, c'est-à-dire une parabole, et les droites $\Delta$ enveloppent la même parabole. Ici le paraboloïde se réduit à un plan et ses deux points de rencontre avec D coïncident avec le point A.

Le lieu des points de contact des plans passant par la droite D avec les surfaces du faisceau est la podaire de cette parabole par rapport au point A. C'est une strophoïde, car les deux tangentes issues du point A à la parabole sont rectangulaires, puisque ce sont les deux positions de la droite polaire de D qui rencontrent D, c'est-à-dire les tangentes aux deux autres surfaces qui passent en A et qui sont situées dans le plan perpendiculaire à D en A.

Restent à vérifier par le calcul les divers points qui font l'objet du problème actuel et qui sont moins connus que les propriétés classiques sur lesquelles nous nous sommes appuyés.

Soient toujours $P_1$ et $P_2$ les deux plans qui définissent la droite D. Un plan passant par cette droite a pour équation $P_1 + \mu P_2 = 0$ ; en exprimant qu'il est tangent à la surface $\lambda$, on a

$$(a^2 + \lambda)(u_1 + \mu u_2)^2 + \cdots - (r_1 + \mu r_2)^2 = 0.$$

Cette équation donne $\lambda$ en fonction de $\mu$, $\lambda = -\frac{T}{T'}$, T et T′ étant deux trinomes du second degré en $\mu$. D'autre part, le point de contact de ce plan avec la quadrique qui le touche a pour coordonnées

$$x = -(a^2 + \lambda)\frac{u_1 + \mu u_2}{r_1 + \mu r_2},$$

$$y = -(b^2 + \lambda)\frac{v_1 + \mu v_2}{r_1 + \mu r_2},$$

$$z = -(c^2 + \lambda)\frac{w_1 + \mu w_2}{r_1 + \mu r_2};$$

en y remplaçant $\lambda$ par sa valeur en fonction de $\mu$, on obtient bien les équations d'une cubique gauche.

Si maintenant on laisse de côté la condition $\lambda = -\frac{T}{T'}$, les valeurs de $x, y, z$ sont simplement

les coordonnées du pôle du plan $\mu$ par rapport à la quadrique $\lambda$ et on aura le lieu de ce pôle, c'est-à-dire le lieu de la droite polaire de D en éliminant $\lambda$ et $\mu$ entre trois équations ; or elles peuvent s'écrire

$$u_2\lambda\mu + u_1\lambda + (a^2u_2 + r_2x)\mu + a^2u_1 + r_1x = 0,$$
$$v_2\lambda\mu + v_1\lambda + (b^2v_2 + r_2y)\mu + b^2v_1 + r_1y = 0,$$
$$w_2\lambda\mu + w_1\lambda + (b^2w_2 + r_2z)\mu + c^2w_1 + r_1z = 0.$$

et elles donnent

$$\lambda\mu = \frac{-P}{S}, \qquad \lambda = \frac{-Q}{S}, \qquad \mu = \frac{-R}{S},$$

en posant

$$P = \begin{vmatrix} a^2u_1 + r_1x & u_1 & a^2u_2 + r_2x \\ b^2v_1 + r_1y & v_1 & b^2v_2 + r_2y \\ c^2w_1 + r_1z & w_1 & c^2w_2 + r_2z \end{vmatrix},$$

$$Q = \begin{vmatrix} u_2 & a^2u_1 + r_1x & a^2u_2 + r_2x \\ v_2 & b^2v_1 + r_1y & b^2v_2 + r_2y \\ w_2 & c^2w_1 + r_1z & c^2w_2 + r_2z \end{vmatrix},$$

$$R = \begin{vmatrix} u_2 & u_1 & a^2u_1 + r_1x \\ v_2 & v_1 & b^2v_1 + r_1y \\ w_2 & w_1 & c^2w_1 + r_1z \end{vmatrix}, \qquad S = \begin{vmatrix} u_2 & u_1 & a^2u_2 + r_2x \\ v_2 & v_1 & b^2v_2 + r_2y \\ w_2 & w_1 & c^2w_2 + r_2z \end{vmatrix}.$$

Les quatre quantités P, Q, R, S sont des fonctions linéaires de $x$, $y$, $z$, et le lieu cherché a pour équation

$$PS + QR = 0 ;$$

or les deux plans $R = 0$, $S = 0$ sont visiblement parallèles au plan perpendiculaire à la droite D ; donc cette surface est un paraboloïde qui a un plan directeur perpendiculaire à la droite D.

Pour que la droite D soit normale à l'une des surfaces du faisceau, il faut que le plan polaire de l'un de ses points soit perpendiculaire à la droite elle-même. Soit $(x, y, z)$ ce point, il faut que le plan

$$\frac{Xx}{a^2+\lambda} + \frac{Yy}{b^2+\lambda} + \frac{Zz}{c^2+\lambda} - 1 = 0$$

soit perpendiculaire à la droite dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $v_1w_2 - w_1v_2$, $w_1u_2 - u_1w_2$, $u_1v_2 - u_2v_1$ ; ceci nous donne

$$\frac{\theta x}{a^2+\lambda} = v_1w_2 - w_1v_2, \qquad \frac{\theta y}{b^2+\lambda} = w_1u_2 - u_1w_2, \qquad \frac{\theta z}{c^2+\lambda} = u_1v_2 - v_1u_2 ;$$

en portant ces valeurs de $x$, $y$, $z$ dans $P_1$ et $P_2$, les termes en $\lambda$ disparaissent et il vient

$$\Sigma a^2u_1(v_1w_2 - w_1v_2) + \frac{r_1}{\theta} = 0,$$

$$\Sigma a^2u_2(v_1w_2 - w_1v_2) + \frac{r_2}{\theta} = 0,$$

et il n'y a plus qu'à éliminer $\theta$ La condition pour que la droite soit normale à l'une des quadriques du faisceau est donc

$$0 = \frac{1}{r_1}\Sigma a^2u_1(v_1w_2 - w_1v_2) - \frac{1}{r_2}\Sigma a^2u_2(v_1w_2 - w_1v_2).$$

Sous cette condition, il est visible que les deux plans R et S coïncident ; le paraboloïde se réduit donc à deux plans : le plan $R = 0$, perpendiculaire à la droite D, et le plan $Pr_2 + Qr_1 = 0$ dont l'équation peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} a^2u_1 + r_1x & a^2u_2 + r_2x & u_1r_2 - u_2r_1 \\ b^2v_1 + r_1y & b^2v_2 + r_2y & v_1r_2 - v_2r_1 \\ c^2w_1 + r_1z & c^2w_2 + r_2z & w_1r_2 - w_2r_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Il faudrait montrer maintenant que ce plan ne convient pas ou fournit une solution exceptionnelle ; nous ne suivrons pas plus loin ces calculs.

Mais on peut éviter toutes ces difficultés en recommençant dans ce cas particulier l'élimination de $\lambda\mu$, $\lambda$ et $\mu$ entre les trois équations qui donnent le pôle du plan variable $P_1 + \mu P_2 = 0$. Multiplions la première par $v_1w_2 - w_1v_2$, la seconde par $w_1u_2 - u_1w_2$, la troisième par $u_1v_2 - v_1u_2$ et ajoutons ; les coefficients de $\lambda\mu$ et de $\lambda$ disparaissent identiquement ; celui de $\mu$ devient

$$\Sigma a^2u_2(v_1w_2 - w_1v_2) + r_2\Sigma(v_1w_2 - w_1v_2)x,$$

et enfin le terme constant devient

$$\Sigma a^2u_1(v_1w_2 + w_1v_2) + r_1\Sigma(v_1w_2 - w_1v_2)x.$$

Ces deux coefficients sont identiques, aux facteurs $r_2$ et $r_1$ près ; donc le résultat de l'élimination est simplement le plan

$$\Sigma(v_1w_2 - w_1v_2)x - \frac{1}{r_2}\Sigma a^2u_2(v_1w_2 - w_1v_2) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\Sigma(v_1w_2 - w_1v_2)x + \frac{1}{r_1}\Sigma a^2u_1(v_1w_2 - w_1v_2) = 0.$$

C'est justement le plan R ou S, perpendiculaire à la droite D ; cette méthode ne donne pas le second plan $Pr_2 + Qr_1 = 0$, ce qui montre bien que ce plan ne fait pas partie du vrai lieu.

Bonne solution de M. Bouvaist qui fait remarquer bien justement qu'il n'y a qu'une surface du faisceau pour laquelle les deux plans tangents seraient conjugués harmoniques par rapport à ceux qui contiennent les génératrices de la surface normale à la droite D au point où cette normale tombe sur la surface envisagée.

---

**1185.** — *Étant données une quadrique* S *et deux droites* $D_1$, $D_2$ *quelconques, on considère les deux droites* $\delta$, $\delta'$ *s'appuyant sur* $D_1$, $D_2$ *et sur leurs conjugués* $\Delta_1$, $\Delta_2$ *par rapport à* S.

1° *Trouver le lieu des droites* $\delta$, $\delta'$ *lorsque,* $D_1$ *étant fixe,* $D_2$ *reste dans un plan* P *et tourne autour d'un point fixe* H *de ce plan. Ce lieu est une surface* $\Sigma$ *dont on indiquera les droites remarquables et les systèmes de droites s'appuyant sur* $D_1$, $\Delta_1$. *Pour quelles positions du point* H *dans le plan* P *la surface* $\Sigma$ *se décompose-t-elle ?*

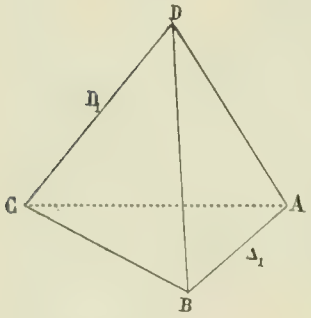
2° *On suppose les droites* $D_1$, $D_2$ *choisies de telle sorte que les quatre droites* $D_1$, $D_2$, $\Delta_1$, $\Delta_2$ *soient sur une même quadrique* Q. *Dans ces conditions, le lieu des conjuguées* $\Delta$ *par rapport aux quadriques* Q, *d'une droite donnée* D, *est une quadrique. Comment doit être située la droite* D *pour que cette quadrique se confonde avec la surface* S ?

Prenons pour tétraèdre de référence un tétraèdre conjugué à S et ayant pour arêtes opposées les droites $D_1$ et $\Delta_1$. Un des sommets du tétraèdre sur chacune de ces droites est arbitraire. Le choix de ces deux points sera fait plus loin en vue de simplifier les calculs.

| Plans | Equations | Droites | Equations |
|---|---|---|---|
| BCD | $x = 0$ | $D_1$ ou CD | $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ |
| ACD | $y = 0$ | | |
| ABD | $z = 0$ | $\Delta_1$ ou AB | $\begin{cases} z = 0 \\ t = 0. \end{cases}$ |
| ABC | $t = 0$ | | |

Nous écrirons l'équation de la quadrique S sous la forme canonique

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$




et celles de la droite $D_2$ :

$$D_2 \begin{cases} x = \lambda z + \mu t, \\ y = \lambda' z + \mu' t. \end{cases}$$

En remarquant que cette droite passe par les deux points $(\lambda, \lambda', 1, 0)$ et $(\mu, \mu', 0, 1)$, on peut écrire immédiatement les équations de sa conjuguée $\Delta_2$ :

$$\Delta_2 \begin{cases} \lambda x + \lambda' y + z = 0, \\ \mu x + \mu' y + t = 0. \end{cases}$$

Soient enfin

$$(1) \qquad \begin{cases} y = hx, \\ t = kz, \end{cases}$$

les équations d'une des droites $\delta$, $\delta'$.

Pour exprimer que cette droite rencontre $D_2$, il suffit de remplacer $y$, $t$ par leurs valeurs et d'écrire que les équations de $D_2$ ainsi transformées ont une solution commune en $x$ et $z$.

On obtient ainsi la condition

$$(2) \qquad hk\mu + h\lambda - k\mu' - \lambda' = 0.$$

Opérant de même pour $\Delta_2$, il vient ensuite

$$(3) \qquad hk\lambda' - h\mu' + k\lambda - \mu = 0.$$

1. Prenons pour sommets B, D du tétraèdre les points où les droites $\Delta_1$ et $D_1$ sont respectivement rencontrées par le plan P, et soient $x_1$, $y_1$, $z_1$, $t_1$ les coordonnées du point $\Pi$ de ce plan.

On aura alors dans les équations de $D_2$ :

$$(4) \qquad \lambda = \frac{x_1}{z_1} = \text{c}^{\text{te}}, \qquad \mu = 0, \qquad \text{et} \qquad y_1 = \lambda' z_1 + \mu' t_1.$$

Le lieu cherché s'obtient en éliminant $\lambda'$, $\mu'$, $h$, $k$ entre les équations (1), (2), (3), (4). Le calcul, très facile, donne, en posant $y_1 = h_1 x_1$, $t_1 = k_1 z_1$,

$$h_1 xy(z^2 + t^2) - k_1 zt(x^2 + y^2) + x^2 t^2 - y^2 z^2 = 0,$$

surface du quatrième ordre, ayant visiblement pour droites doubles les droites $D_1$, $\Delta_1$, et pour droites simples BD$(x = 0, \ z = 0)$ et AC$(y = 0, t = 0)$.

En mettant l'équation sous la forme

$$t(t - k_1 z)(x^2 + y^2) - y(y - h_1 x)(z^2 + t^2) = 0,$$

on obtient de nouvelles droites : les quatre droites, intersections des quatre plans $x^2 + y^2 = 0$, $z^2 + t^2 = 0$, génératrices de la quadrique S; la droite passant par $\Pi$ et s'appuyant sur $D_1$, $\Delta_1$ $(y = h_1 x$, $t = k_1 z)$; et les deux droites

$$\begin{cases} y - h_1 x = 0, \\ t = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} t - k_1 z = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Un premier système de droites de $\Sigma$ est constitué par les droites $\delta$, $\delta'$. Le plan passant par $D_1$ et une droite $\delta$, par exemple, coupe la surface suivant une autre droite $\delta_1$ rencontrant $\Delta_1$ au même point que $\delta$ (l'intersection est une courbe du quatrième ordre qui se décompose en $D_1$, droite double, $\delta$ et une autre droite $\delta_1$). D'où un deuxième système de droites $\delta_1$, $\delta_1'$.

On peut le voir par le calcul.

Pour qu'une droite $y - hx = 0$, $t - kz = 0$ soit sur $\Sigma$, il faut que

$$(5) \qquad h_1 h(1 + k^2) - k_1 k(1 + h^2) + k^2 - h^2 = 0.$$

Lorsqu'on se donne $h$, l'équation donne donc deux valeurs de $k$, d'où l'existence des deux systèmes $\delta$, $\delta_1$.

Si l'on exprime que l'équation (5) admet une racine double en $h$, on trouve

$$h_1^2(1+k^2)^2 + k(k-1)(1+k_1 k) = 0,$$

équation du quatrième degré en $k$.

Il existe donc quatre points de la droite $D_1$ tels que les droites $\delta$, $\delta_1$ qui y passent sont confondues. En ces points (appelés points de pincement) les deux plans tangents à la surface $\Sigma$ sont confondus. La droite $\Delta_1$ contient quatre points analogues.

Cherchons dans quel cas la surface $\Sigma$ se décompose. Lorsqu'il en est ainsi, le premier membre de (5) est décomposable en facteurs rationnels. Si donc l'on considère la relation (5) comme une équation du deuxième degré soit en $h$, soit en $k$, la quantité placée sous le radical doit être carré parfait. On trouve ainsi la condition

$$(h_1^2 - k_1^2)(h_1^2+1)(k_1^2+1) = 0.$$

Soit d'abord $k_1 = \varepsilon h_1$ $(\varepsilon = \pm 1)$. Le point $\Pi$, étant dans le plan P supposé fixe $x = \lambda z$, est à l'intersection de ce plan et de l'une des surfaces $xt - \varepsilon yz = 0$, c'est-à-dire sur l'une des droites

$$\begin{cases} x - \lambda z = 0, \\ y - \varepsilon\lambda t = 0. \end{cases}$$

La surface $\Sigma$ se décompose en les deux quadriques

$$(xt - \varepsilon yz)\, h_1(yt - \varepsilon xz) + xt - \varepsilon yz = 0.$$

Si $h_1^2 + 1 = 0$, $\Pi$ est sur l'une des droites d'intersection du plan P et des plans $x^2 + y^2 = 0$, et $\Sigma$ se décompose en un plan et une surface cubique :

$$(y - \varepsilon i x)\, yz^2 - \varepsilon i x t^2 + k_1 z t(y + \varepsilon i x) = 0,$$

(en posant $h_1 = \varepsilon i$).

La condition $k_1^2 + 1 = 0$ donne une décomposition analogue.

**2.** Pour que les droites $D_1$, $\Delta_1$, $D_2$, $\Delta_2$ soient sur une même surface du deuxième ordre, il faut et il suffit que les équations de condition (2) et (3) se réduisent à une seule. On doit donc avoir

$$\frac{\mu}{\lambda'} = \frac{\lambda}{-\mu'} = \frac{-\mu'}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\mu}.$$

Il est visible que ces rapports doivent être égaux à $+1$ ou à $-1$, d'où l'existence de deux systèmes de droites $D_2$, correspondant aux relations

$$\lambda' = \varepsilon\mu, \qquad \mu' = -\varepsilon\lambda.$$

Les droites de chaque système

$$\begin{cases} x = \lambda z + \mu t, \\ y = \varepsilon(\mu z - \lambda t), \end{cases}$$

dépendant de deux paramètres $\lambda$, $\mu$, forment une congruence linéaire. Elles rencontrent donc deux droites fixes.

Des équations précédentes, on tire

$$x^2 + y^2 = (\lambda^2 + \mu^2)(z^2 - t^2),$$

ce qui montre que ces droites sont les intersections des plans $x^2 + y^2 = 0$ avec les plans $z^2 + t^2 = 0$.

On vérifie facilement que les deux droites fixes relatives au système $\varepsilon$ ont pour équations

$$y = \varepsilon' i x, \qquad z = \varepsilon\varepsilon' i t \qquad (\varepsilon' = \pm 1).$$

On forme d'ailleurs aisément l'équation de la surface Q. Il suffit pour cela de remplacer dans l'unique équation de condition

$$(h + \varepsilon k)\lambda + (hk - \varepsilon)\mu = 0,$$

$h$ et $k$ respectivement par $\frac{y}{x}$, $\frac{t}{z}$, la quadrique Q étant le lieu des droites $\delta$, $\delta'$.

$$\lambda(yz + \varepsilon xt) + \mu(yt - \varepsilon xz) = 0.$$

Soient alors

$$D \begin{cases} x = \alpha z + \beta t, \\ y = \alpha' z + \beta' t, \end{cases}$$

les équations d'une droite D.

Sa conjuguée $\Delta$ par rapport à Q, intersection des plans polaires des points $(\alpha, \alpha', 1, 0)$ et $(\beta, \beta', 0, 1)$, a pour équations

$$\begin{cases} \lambda(\varepsilon\alpha t + \alpha' z + y) - \mu(\varepsilon\alpha z - \alpha' t + \varepsilon x) = 0, \\ \lambda(\varepsilon\beta t + \beta' z + \varepsilon x) - \mu(\varepsilon\beta z - \beta' t - y) = 0. \end{cases}$$

L'élimination de $\lambda$, $\mu$ donne l'équation du lieu cherché, qui s'écrit après quelques réductions,

$$x^2 + y^2 + \varepsilon(\alpha\beta' - \alpha'\beta)(z^2 + t^2) + (\alpha' - \varepsilon\beta)(yz - \varepsilon xt) + (\beta' + \varepsilon\alpha)(yt + \varepsilon xz) = 0.$$

Cette quadrique se confond avec S lorsque l'on a

$$\alpha' - \varepsilon\beta = 0, \qquad \beta' + \varepsilon\alpha = 0, \qquad \alpha\beta' - \alpha'\beta = \varepsilon,$$

d'où les équations de la droite D :

$$\begin{cases} x = \alpha z + \beta t, \\ y = \varepsilon(\beta z - \alpha t), \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \alpha^2 + \beta^2 + 1 = 0.$$

On constate très facilement que ce sont les équations des deux systèmes de génératrices de la surface S. En ajoutant membre à membre les équations de la droite élevées au carré, et tenant compte de la relation $\alpha^2 + \beta^2 = -1$, on a en effet

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0.$$

La condition cherchée est donc que D soit située sur la quadrique S.

VASNIER.

## PHYSIQUE

**1155.** — *On a étudié avec précision, à Paris, l'influence de la température sur la pression maxima de la vapeur d'eau : par exemple, dans le voisinage de* 100°, *une variation de température de* 1° *produit une variation de pression de* $27^{mm}\frac{1}{4}$ *de mercure. Cela posé, on détermine, en divers lieux du globe, le point d'ébullition de l'eau à* $\frac{1}{500}$ *de degré près et on lit en même temps le baromètre à* $\frac{1}{20}$ *de millimètre. Comment pourra-t-on en déduire les variations de* $g$ *et quel sera le degré de précision de cette mesure? Quelle sera la variation de température ou de lecture barométrique qui correspondra à un déplacement de* 1° *en latitude dans le voisinage du* 45° *parallèle? On sait que la variation de* $g$ *avec la latitude est représentée par la formule* $g = g_{45}(1 - 0{,}00259 \cos 2\varphi)$.

Soit $t°$ la température d'ébullition observée en un lieu où l'accélération de la pesanteur est $g$, la hauteur barométrique réduite à 0° étant, au même moment, égale à $h^{mm}$. Si l'on se trouvait à la latitude de 45°, la hauteur barométrique correspondant à la même température d'ébullition serait $760 + (t - 100)27{,}25$. Comme la force élastique maxima de la vapeur d'eau à $t°$, cette force élastique étant évaluée en dynes par exemple, est évidemment indépendante du lieu où l'on se trouve, on a

$$[760 + (t - 100)27{,}25]g_{45} = hg, \qquad \text{d'où} \qquad g = \frac{760 + (t - 100)27{,}25}{h} g_{45}.$$

Cherchons maintenant le degré de précision que comporte cette mesure.

L'erreur absolue maxima commise sur le numérateur de la fraction du second membre est $\varepsilon = \frac{27,25}{500}$; l'erreur relative correspondante est environ $\frac{\varepsilon}{760}$. De même l'erreur maxima commise sur le dénominateur est $\varepsilon' = \frac{1}{20}$ et, comme $h$ est toujours voisin de 760, l'erreur relative est environ $\frac{\varepsilon'}{760}$. L'erreur relative commise sur la fraction est donc au plus $\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{760}$. La fraction étant toujours voisine de 1, on peut confondre cette erreur relative avec l'erreur absolue, de sorte que l'approximation avec laquelle on mesure $g$ est égale à $\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{760} g_{45}$. En remplaçant $\varepsilon, \varepsilon'$ et $g_{45}$ par leurs valeurs numériques, on trouve

$$0^{cm},13.$$

Supposons maintenant qu'on passe de la latitude 45° à la latitude 46°. L'intensité de la pesanteur devient $g = g_{45}(1 - 0,00259 \cos 92°) = g_{45}(1 - 0,00259 \sin 2°)$, ou, en prenant $\sin 2° = \frac{2\pi}{180}$,

$$g = g_{45}(1 + 0,00009).$$

Ceci étant, supposons d'abord que la hauteur barométrique soit la même dans les deux lieux. Alors la température d'ébullition de l'eau est $t$ à 45°, $t'$ à 46° et nous avons, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$hg_{45} = (760 + (t - 100)27,25)g_{45},$$
$$hg = (760 + (t' - 100)27,25)g_{45}.$$

En retranchant la première égalité de la seconde on a

$$(g - g_{45})h = (t' - t)27,25 g_{45}, \qquad \text{d'où} \qquad t' - t = \frac{0,00009h}{27,25}.$$

En supposant $h = 760$ on trouve

$$t' - t = 0°,0025.$$

Cette variation de température, étant supérieure à $\frac{1}{500}$ de degré, sera appréciable dans les conditions de l'énoncé.

Supposons maintenant que la température d'ébullition étant la même dans les deux lieux, la hauteur barométrique soit $h$ à 45° et $h'$ à 46°. La pression réelle étant la même dans les deux cas, on a

$$h'g = hg_{45}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{h - h'}{h'} = \frac{g - g_{45}}{g_{45}}.$$

En faisant $h' = 760$, on trouve

$$h - h' = 760 \times 0,00009 = 0^{mm},068.$$

Cette variation sera encore appréciable dans les conditions de l'énoncé.

Remarquons enfin que l'approximation de la mesure de $g$ étant $0^{cm},13$ et la variation correspondant à 1° de latitude étant seulement $0,00009 \times 981 = 0^{cm},09$ environ, la précision de la méthode correspond à une variation de latitude d'à peu près un degré et demi.

J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

---

## QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

### ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1903).

#### I. — Algèbre.

**3274.** — Déterminer $p$ de façon que le polynome $x^3 + px + a^3 + b^3$ soit divisible par $x + a + b$. Cette valeur étant donnée à $p$, résoudre l'équation $x^3 + px + a^3 + b^3 = 0$.

**3275.** — Simplifier l'expression $\dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^4}}$.

**3276.** — Calculer la somme des coefficients du binome, puis les sommes de deux en deux, de trois en trois, ..., etc.

**3277.** — Étudier les séries qui ont pour termes généraux :

$$\frac{2n^2+1}{n!},\quad \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},\quad \sin^2\frac{a}{n},\quad \operatorname{tg}\frac{a}{n},\quad \frac{1}{n^a(\mathrm{L}n)^b},\quad \frac{1}{n(\mathrm{L}n)^p}.$$

**3278.** — Etudier la série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots.$$

**3279** — Calculer à $\dfrac{1}{1000}$ près les valeurs des séries

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^n} + \ldots.$$

**3280.** — Calculer à $\dfrac{1}{10^7}$ près la valeur de la série qui a pour terme général $\dfrac{1}{(n^n)!}$.

**3281** — Etudier les séries

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots,$$

$$\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots.$$

**3282.** — Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\mathrm{L}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},\quad \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},\quad \arcsin\left(a\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-a^2}\right),\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{a+x}{1-ax},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2},\quad \arcsin 2x\sqrt{1-x^2},\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{3x-x^3}{1-3x^2},\quad \mathrm{L}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$\arccos[x^3 - 3x(1-x^2)],\quad \mathrm{L}(\cos x + i\sin x),\quad x^{\sin x},\quad x^{\arcsin \mathrm{L}x},$$

$$(\arcsin x)\,\mathrm{L}\frac{1}{x},\quad \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{arc\,tg} x}.$$

**3283.** — Étudier les variations des fonctions :

$$x^5 - 3x^2 + 5,\quad x^4 - 3x^2 + 2x + 6,\quad x\mathrm{L}x,\quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad (1+x)^{\frac{1}{x}},\quad a^x - x,\quad \frac{a^x}{x},$$

$$x^x,\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x},\quad x^2e^{\frac{1}{x}},\quad xe^{\frac{1+x}{1-x}},\quad xe^{\frac{ax+b}{cx+d}},\quad xe^{\operatorname{tg} x},\quad \frac{x^m}{\mathrm{L}x},$$

$$\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin^5 x},\quad x\mathrm{L}(ax^2+bx+c).$$

**3284.** — Etant donnés $n$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et une droite $\Delta$, on joint les $n$ points donnés à un point M variable de la droite et on demande d'étudier les variations de la quantité $\overline{MA_1}^2 + \overline{MA_2}^2 + \cdots + \overline{MA_n}^2$.

**3285.** — $x$ étant l'infiniment petit principal, trouver les parties principales des infiniment petits suivants :

$$a^x - 1,\quad \sqrt{1+x} - 1,\quad \operatorname{tg} x,\quad 1 + \mathrm{L}(1+x) - \cos x + \frac{x}{2} - \sin x,\quad \sqrt{x} - \sqrt{\sin x},$$

$$x\sin(\sin x) - \sin^2 x,\quad x - \frac{4}{15}\sin x + \frac{1}{15}\operatorname{tg} x - \frac{8}{5}\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad (1+x)^{\frac{1}{x}} - e,$$

$$\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{\sin x - \operatorname{tg}^2 x}},\quad 1 - \cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x,\quad 2\sin x - x - \operatorname{tg} x.$$

**3286.** — $x - 1$ étant l'infiniment petit principal, trouver la partie principale de $\sqrt[3]{7+x} - 2$.

**3287.** — $x - \dfrac{\pi}{2}$ étant l'infiniment petit principal, trouver la partie principale de $\sqrt{1 + 2\cos x} - 1$.

**3288.** — Dans un triangle ABC, rectangle en A, l'angle C est l'infiniment petit principal. Trouver les parties principales des infiniment petits AB, BC — AC, AB — AH. (AH désigne la hauteur issue du sommet A.)

**3289.** — Développer en séries les fonctions : $\operatorname{arc\,tg} x$, $e^x \sin x$.

**3290.** — Développer en série $\cos(x+a)$. En déduire les développements en séries de $\cos x$ et de $\sin x$.

**3291.** — Appliquer la formule de Maclaurin pour calculer $\cos mx$ ($m$, entier et positif) en fonction de $\cos x$.

**3292.** — Limite pour $x = 0$ des fonctions $\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, $\dfrac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}$.

**3293.** — Limite pour $m$ infini des fonctions

$$\left(\frac{pa^{\frac{1}{m}} + qb^{\frac{1}{m}}}{p+q}\right)^m,\quad \left(\cos\frac{a}{m} + x\sin\frac{a}{m}\right)^m.$$

**3294.** — Limite de $(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$ pour $x = \dfrac{\pi}{4}$.

**3295.** — Dérivée d'ordre $n$ de $(x-a)^n(x-b)^n$. En déduire la somme des carrés des coefficients du binome. Démontrer que la dérivée obtenue est un polynome qui a toutes ses racines réelles.

**3296.** — Dérivée d'ordre $n$ de $e^{ax}.\cos bx$. Montrer qu'on peut la mettre sous la forme $\sqrt{a^2+b^2}.\,e^{ax}\cos(bx+n\omega)$, $\omega$ désignant un angle dont la tangente est égale à $\dfrac{b}{a}$.

**3297.** — Dérivées successives de $e^{\frac{1}{x}}$.

**3298.** — Trouver la dérivée d'une fonction implicite $y$ de la variable $x$ définie par l'une des équations suivantes :

$$e^x - e^y(x-y)^2 = 0, \qquad e^x - e^y\sqrt{x-y} = k, \qquad x^y - y^x = 0.$$

**3299.** — Etant données deux fonctions implicites $y$ et $z$ de la variable $x$ définies par les équations suivantes :

$$x^2+y^2+z^2 = 1, \qquad xyz = 1,$$

calculer les dérivées de $y$ et de $z$ par rapport à $x$.

**3300.** — Même question si les fonctions $y$ et $z$ sont définies par les équations $x^2+x^2 = 1$, $x+y+z = 1$.

**3301** — Étant donnée la fonction $u = \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$, calculer $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

**3302.** — Calculer les différentielles totales des fonctions :

$$x\sqrt{x^2+y^2}, \qquad xy\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

**3303.** — Une expression quelconque de la forme $f(x,y)dx+\varphi(x,y)dy$ est-elle une différentielle totale ?

**3304.** — Discuter les équations :

| | | |
|---|---|---|
| $x^6+4x^3-5 = 0$, | $x^3+x-1 = 0$, | $x^4-3x^2+5 = 0$, |
| $x^5-3x-22 = 0$, | $x^4+2x^3+3x^2+2x-1 = 0$, | $x^{12}+x^6+1 = 0$, |
| $x^4+\lambda x^3+\mu x^2-1 = 0$, | $x^2+px^4+q = 0$, | $x^{2n}+1 = 0$, |
| $x^{2m+1}+px^2+qx+r = 0$, | $x^2+p+\dfrac{q}{x} = 0$, | $x^5+px^4+qx+r = 0$, |
| $(x+a)^m+(x+aj)^m+(x+aj^2)^m = 0$. | | $(1+ix)^m-(1-ix)^m = 0$, |
| $\operatorname{arc\,tg} x-\mathrm{L}x-1 = 0$, | $e^x = x^2$, | $\sin 2x-2\cos x+1 = 0$, |
| $x-\sqrt{2}\sin x = 0$, | $x+\cos x = 0$, | $\sin 2x-\cos x-x\sqrt{2}+2 = 0$, |
| $\mathrm{L}(2x+1)-x^2+2x-1 = 0$, | $mx-\sin x-a = 0$, | $\mathrm{L}(x+1)+x^2-2x-1 = 0$, |
| $x\mathrm{L}(x+1)-2x+3 = 0$, | $(x-1)\mathrm{L}(x+1)+2x+3 = 0$, | $\cos x+\mathrm{L}\sin x-1 = 0$, |
| $\mathrm{L}\cos x-\sin x+3 = 0$, | $\sin x-2\mathrm{L}\cos x+1 = 0$, | $\mathrm{L}\cos x-2\sin x+3 = 0$. |

**3305.** — Etant donnée l'équation

$$\frac{\mathrm{A}}{x-a}+\frac{\mathrm{B}}{x-b}+\dots+\frac{\mathrm{L}}{x-l} = 0,$$

où A, B, ..., L sont des nombres positifs, et $a, b, \dots, l$ des nombres différents, démontrer que cette équation a toutes ses racines réelles.

**3306.** — Calculer $\Sigma\dfrac{a}{b}$ pour l'équation $x^3-3x^2+2x-1 = 0$.

**3307.** — Calculer $\Sigma\dfrac{a^2}{b}$ pour une équation du $n^e$ degré.

**3308.** — Calculer $\Sigma\dfrac{1}{1+a^2}$ pour l'équation $x^3-3x+1 = 0$.

**3309.** — Etant donnée une équation binome $x^m-1 = 0$ ayant pour racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, calculer : 1° $\Sigma f(\alpha_1)$, $f(x)$ étant un polynome quelconque; 2° $\Sigma\varphi(\alpha_1)\varphi\left(\dfrac{1}{\alpha_1}\right)$, $\varphi(x)$ étant un polynome de degré inférieur à $m$.

**3310.** — Former l'équation admettant pour racines les carrés des racines de l'équation

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0.$$

**3311.** — $a, b, c, \dots$ étant les racines d'une équation algébrique $f(x) = 0$, calculer l'équation qui a pour racines $a+\dfrac{1}{a}$, $b+\dfrac{1}{b}$, $c+\dfrac{1}{c}$, ...

**3312.** — Soit l'équation $x^3-5x^2+6x-1 = 0$ ; chercher l'équation transformée en $y = (x-2)^2$. Expliquer le résultat.

**3313** — Résultant des deux équations $ax^2+bx+c = 0$, $x^2+px+q = 0$.

**3314.** — Etant donnée une équation algébrique $f(x) = 0$ ayant pour racines $a, b, c, \dots$ et un polynome $\varphi(x)$, démontrer que $\Sigma\varphi(a)$ est égal au coefficient de $\dfrac{1}{x}$ dans l'expression $\dfrac{f'(x)}{f(x)}.\varphi(x)$.

**3315.** — Résoudre l'équation $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$ sachant que l'on a $a+d = b+e = c$.

**3316.** — Combien reste-t-il de coefficients arbitraires dans une équation du quatrième degré, sachant qu'elle a une racine double ?

**3317.** — Ecrire qu'une équation du cinquième degré a une racine triple et une racine double. Combien de conditions ?

**3318.** — Résoudre l'équation $x^4-3x^2+2x+\alpha = 0$, sachant que cette équation a une racine double ?

**3319.** — Déterminer $a$ de façon que l'équation $x^4-4x^2+4ax-1 = 0$ ait une racine double.

**3320.** — Condition pour que l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ait une racine double.

**3321.** — Nombre maximum de racines réelles de l'équation $x^5 + px^3 + qx + r = 0$.

**3322.** — Déterminer une fonction $f(x)$ telle que l'on ait $f(x)f(y) = f(x+y)$, quelles que soient les valeurs de $x$ et de $y$.

**3323.** — Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{2x-1}{x(x-1)^2}, \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)}, \quad \frac{1}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}, \quad \frac{1}{x^2(x^2+1)},$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^2}, \quad \frac{x^2}{(x+1)^3(x-1)^2}, \quad \frac{x^3+x}{x^5-1}, \quad \frac{1}{x^n-1}.$$

**3324.** — Soit $f(x)$ un polynome de degré $m$ ayant pour racines $a, b, \ldots, l$ et $g(x)$ un polynome de degré égal ou inférieur à $m-2$. Démontrer l'égalité

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \ldots + \frac{g(l)}{f'(l)} = 0.$$

**3325.** — Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1}, \quad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx, \quad \int \frac{dx}{x^3+1}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-1}, \quad \int \frac{dx}{(x^2-1)^2},$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+1}\,dx, \quad \int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2}, \quad \int \frac{(2-3x)\,dx}{(3-2x)(5x-4)}, \quad \int \frac{x\,dx}{x^2+11x+30}, \quad \int \frac{(x^2-2x)\,dx}{(x-1)^2x(x+1)},$$

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)}, \quad \int \frac{x\,dx}{a^3-x^3}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^3}, \quad \int \frac{dx}{3x^2+2x+5},$$

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+2}, \quad \int \frac{dx}{x^3-1}, \quad \int \frac{dx}{x^4-1}, \quad \int \frac{(3+x)\,dx}{(5-x)^2}, \quad \int \frac{dx}{x^4-1},$$

$$\int \frac{2+3x}{(4-x)^3}\,dx, \quad \int \frac{(4+3x)\,dx}{x(x+1)(x^2+1)}, \quad \int \frac{dx}{x^6-1}, \quad \int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}\,dx.$$

**3326.** — Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}, \quad \int x\sqrt{x^2+2x-1}\,dx, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}, \quad \int \frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx,$$

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx, \quad \int (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2+px+q}\,dx, \quad \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

**3327.** — Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \mathrm{L}x\,dx, \quad \int e^x \cos x\,dx, \quad \int \cos ax \,.\, \cos bx\,dx, \quad \int_0^{\infty} x^m e^{-x}\,dx.$$

**3328.** — Trouver au moyen d'une intégration l'aire du cercle comprise entre deux cordes parallèles.

**3329.** — Calculer le volume commun à deux cylindres de révolution égaux et dont les axes se rencontrent à angle droit.

**3330.** — Etant données deux fonctions $u$ et $v$ de deux variables indépendantes $x$ et $y$, $u = f(x, y)$, $v = \varphi(x, y)$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une relation entre $u$ et $v$ est que l'on ait

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}.$$

## II. — Trigonométrie.

**3331.** — Démontrer que tout polynome en $\cos x$ et $\sin x$ peut se mettre sous la forme d'une fonction linéaire des cosinus et des sinus des multiples de $x$. Application.

**3332.** — Mettre $(1 + \sin x)(1 + \cos x)$ sous forme du carré d'une fonction linéaire de $\cos x$ et $\sin x$. Interprétation géométrique.

**3333.** — Calculer l'angle $y = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$.

**3334.** — Rendre calculable $\cos^2 p - \sin^2 q$.

**3335.** — Rendre calculable $\cos a + \cos b + \cos c$, sachant que $a + b + c = \frac{\pi}{2}$.

**3336.** — Rendre calculable $\sin A + \sin B + \sin C$, sachant que $A + B + C = \pi$.

**3337.** — Etant donné $2\cos x = y + \frac{1}{y}$, calculer $\cos mx$ en fonction de $y$.

**3338.** — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{m} = x$ en fonction de $\operatorname{tg} a = b$. On obtient une équation de la forme $\frac{f(x)}{F(x)} = b$, $f(x)$ et $F(x)$ désignant des polynomes. Démontrer que les racines des équations $f(x) = 0$, $F(x) = 0$ sont réelles et se séparent mutuellement.

**3339.** — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{5}$ connaissant $\cos a$. Cas particulier où $\cos a = 1$. Montrer analytiquement que dans ce cas l'équation a ses racines réelles. La résoudre et donner la valeur de $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}$.

**3340.** — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ connaissant $\cos\frac{a}{3}$.

**3341.** — Calculer $\sin\frac{a}{3}$ connaissant $\cos 2a$.

**3342.** — Déterminer $\cos\frac{a}{4}$ connaissant $\sin a$. Pour $\sin a = 1$ le premier membre de l'équation qui donne $\cos\frac{a}{4}$ est carré parfait. Donner la valeur de $\cos\frac{5\pi}{8}$.

**3343.** — Décomposer $x^m - 1$ en facteurs réels du premier et du second degré.

**3344.** — Calculer $\sqrt[5]{i}$.

**3345.** — Résoudre l'équation $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} 2x = \frac{\pi}{2}$.

**3346.** — Résoudre le système $x + y + z = k\pi$, $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = (2\sqrt{3} - 3)\operatorname{tg} z$.

**3347.** — Résoudre un triangle connaissant : 1° le périmètre et les angles ; 2° les trois hauteurs.

**3348.** — R désignant le rayon du cercle circonscrit à un triangle, $r$ et $r_a$ ceux des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A, démontrer la formule

$$\cos A = \frac{2R + r - r_a}{2R}.$$

**3349.** — Etant donnés un point O dans un plan P et deux points A et B en dehors, on projette A et B en $a$ et $b$ sur le plan. Connaissant les angles AOB, A$Oa$, B$Ob$, calculer l'angle $aOb$.

## III. Géométrie analytique à deux dimensions.

**3350.** — Construire les coniques :

$y = x \pm \sqrt{x} + x - 1$, $y = x^2 - 3x + 2$ (foyers), $x - 2xy + xy = 0$, $y = x + 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ (foyers), $y = x - \frac{1}{x}$ (sommets), $y = 2x + 3 + \frac{7}{x - 2}$ (rayon de courbure), $xy + y + x - 1 = 0$, $(y - x - 2)(x + y + 6) = 2$ (foyers), $y = \frac{x^2}{x - 1}$, $x + y + \sqrt{y} = 1$.

**3351.** — Construire les courbes ayant pour équations en coordonnées rectilignes :

$y = \sqrt{2ax} + \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = x + \frac{1}{x^2 - 1}$, $x = \frac{1}{y} + \sqrt{y - 2}$, $y = x\sqrt{\frac{x + 3a}{x - a}}$, $y^2 = x^2 - x$ (points d'inflexion), $y^2 = \frac{x}{4x^2 + 1}$, $y = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = \frac{x^2(a - x)^2}{(x + a)(x^2 + a^2)}$, $y = \sqrt{\frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 2)}}$,

$y = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x - 4}$, $y = x \pm \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2}$, $y = x^2\frac{a - x}{a + x}$ (aire de la boucle),

$y = x - 1 \pm \sqrt{\frac{x^3}{x + 1}}$, $y = \sqrt{ax} + \sqrt{bx}$ (rayon de courbure à l'origine), $x + y = a$ (points d'inflexion),

$(x^2 + y^2)^2 - x^2 = 0$, $x^2y^2 - k^2 = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$,

$x^4 + y^4 - ax^2 = 0$ (tangente parallèle à l'asymptote, tangente par un point de $Oy$), $y^4 - x^4 - x^2 + y = 0$,

$2x^3y^2 + x^2y + 1 = 0$ (points d'inflexion), $(2x - y)^2(x + y) + x - y = 0$, $(x^2 - y^2)^2 - 2(x - y)(x^2 + y^2) + y^2 = 0$,

$(x^4 - 5x^2 + 4)y^2 - 4xy + x^2 = 0$, $x^5 - y^5 - x^4 + y = 0$, $x(y - x)^2 - a(y^2 + a^2) = 0$,

$x^4 + y^4 - 5a^2xy = 0$, $x^4 + y^4 - 5y = 0$, $3x^4y + 4x^3 - 2y^2 = 0$,

$x^4y^2 + x^4 + y^4 = 0$, $x^3y + x^4 + y^2 = 0$, $5x^2y^2 - y^4 - 2x = 0$,

$x^4 + y^4 - 3ax^2y^2 = 0$ (aire de la boucle), $2x^4 - y^4 + (x - y)^2 = 0$, $x^3 + y^3 + x^2y^2 = 0$,

$(x + y)^2y + x(x + y) + 1 = 0$, $(x^2 + y^2)^2 - x^2(ax + by) = 0$ (tangentes parallèles aux axes),

$y = x\sin\frac{1}{x}$, $y = \frac{\sin x}{x}$ (rayon de courbure), $y = \frac{\sin x}{x - \pi}$, $y = x\cos ax$, $y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}$,

$\operatorname{arc\,sin} x = 2\operatorname{arc\,sin} y$, $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (rayon de courbure), $y = 2^{\frac{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}{x - 1}}$,

$y = 2^{\frac{x^2 + 2x - 1}{x + 2}}$ (tangentes menées par l'origine), $y = L\frac{x^2 - 2x - 5}{x + 1}$ (points de rencontre avec $Ox$).

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t^3}, \\ y = \dfrac{t^2}{(1-t)^3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2+1}, \\ y = \dfrac{1-t^2}{t^2+1}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t^3}{t^2-5t+4}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t^3}{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t-2}{1-t^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t+1}{t^3-1}, \\ y = \dfrac{t^2}{t^4-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t-1}, \\ y = \dfrac{t+1}{t(t^2-5t+4)}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t^3}, \\ y = \dfrac{1+t^2}{1-t^3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2+t}{1-t}, \\ y = \dfrac{2+t}{1-t}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{1-t^2}, \\ y = \dfrac{1+t}{(1-t)^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{L}t-t-1}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{1+t}{1+t^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}, \\ y = \dfrac{1+t}{1-4t^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = \dfrac{t}{1-t^2}, \\ x+y = \dfrac{t^3-8}{3t^2-3t-2}. \end{cases}$$

**3352.** — Construire les courbes qui ont pour équations en coordonnées polaires :

$\rho = 1 + \cos 3\omega$, $\rho = a\sqrt{\cos 2\omega}$ (tangentes issues d'un point), $\rho = \dfrac{\omega+1}{\omega^2-4}$, $\rho = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\omega}{\sin\omega}}$,

$\rho = \dfrac{1+\omega^2}{\omega}$, $\rho = \cos\omega$, $\rho = a\cos\dfrac{\omega}{3}$, $\rho = \dfrac{\cos^2\omega+1}{\cos\omega}$, $\rho^2 = \dfrac{1}{\cos^2\omega+\sin 2\omega}$,

$\rho = \operatorname{tg} 2\omega$, $\rho = a\cos 2\omega$ (aire de la courbe), $\rho = \dfrac{\sqrt{\cos\omega+\sin 2\omega}}{\sin\dfrac{\omega}{2}}$, $\rho = \dfrac{\sin\omega}{\omega}$,

$\rho = \dfrac{\sqrt{\cos 2\omega - 2\sin\omega}}{\cos\dfrac{\omega}{2}}$, $\rho = \dfrac{\cos\omega}{\omega}$, $\rho = \dfrac{\sqrt{1-2\sin\omega}}{\cos\dfrac{\omega}{2}}$, $\rho = \cos\omega + \cos 2\omega$, $\rho = \dfrac{\omega}{\sin\omega}$,

$\rho = \operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2}$, $\rho = \dfrac{1}{\cos 2\omega}$, $\rho = \dfrac{\operatorname{tg} 2\omega}{\operatorname{tg}\omega}$, $\rho = \dfrac{\sqrt{1-2\cos^2\omega}}{\sin\dfrac{\omega}{2}}$, (tangentes parallèles à l'axe polaire),

$\rho = \dfrac{1+\sin\omega}{1-2\cos\omega}$, $\rho = \dfrac{1+\cos\omega}{1-\sin\omega}$, $\rho = \dfrac{\cos 2\omega}{1-2\sin\omega}$, $\rho = \dfrac{1+2\cos\omega}{1-2\sin\omega}$, $\rho = \dfrac{1+\operatorname{tg}\omega}{\cos\dfrac{\omega}{2}}$,

$\rho = \dfrac{\cos\omega}{\omega+\dfrac{\pi}{4}}$, $\rho = \dfrac{\sin\dfrac{\omega}{2}}{\sqrt{1-2\cos^2\omega}}$, $\rho = \operatorname{tg}\dfrac{2}{3}\omega$, $\rho = \dfrac{\sin\omega}{\omega^2-\alpha^2}$, $\rho = \dfrac{\sin\omega+\cos 3\omega}{\operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2}}$,

$\rho = \dfrac{\cos\omega}{\omega-\alpha}$, $\rho = \dfrac{\sin\omega}{1-\cos\omega}$, $\rho = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2}}{\sqrt{1+2\cos\omega}}$, $\rho = \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2}}}{1-2\sin\omega}$, $\rho = \operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg} 2\omega$.

$\rho = 2a\dfrac{\sin^2\omega}{\cos\omega}$ (aire comprise entre l'asymptote et la courbe), $\rho = \dfrac{\operatorname{tg}\omega}{1-2\cos\omega}$, $\dfrac{m}{\rho} = \omega$.

**3353.** — Que représente l'équation $2x^2 - 5xy + y^2 = 0$ ? Trouver l'ensemble des bissectrices.

**3354.** — On donne un triangle dont le côté BC est fixe et dont l'angle A est constant. Lieu des points de contact avec AB et AC du cercle inscrit. Expliquer géométriquement le résultat.

**3355.** — Etant donnés deux axes obliques $Ox$ et $Oy$, par un point P du plan on abaisse PA et PB perpendiculaires sur les axes. Trouver le lieu géométrique du quatrième sommet du parallélogramme construit sur PA et PB, quand le point P décrit une droite.

**3356.** — En s'appuyant sur les formules de transformation de coordonnées, démontrer que l'expression

$$\sin\theta \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

est un invariant ; $(x, y)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ sont les coordonnées de trois points, et $\theta$ l'angle des axes.

**3357.** — On donne trois segments sur une même droite. Déterminer un point S tel que de ce point on voie les trois segments sous un même angle.

**3358.** — On donne un cercle de centre O et un rayon fixe OB. On mène la tangente en un point quelconque M du cercle ; cette tangente rencontre OB en un point A. Lieu du point de rencontre de la droite MB et de la perpendiculaire à OB menée par A.

**3359.** — On donne un cercle et deux diamètres rectangulaires AA′ et BB′. Par un point M du cercle on abaisse MH perpendiculaire sur AA′, et sur MH à partir du point M on prend un point P tel que MP = arc MB. Déterminer le lieu du

point P. Déterminer les tangentes aux points où le lieu rencontre les tangentes au cercle aux points A et A'. Rayon de courbure au point B.

**3360.** — On donne une courbe de degré $m$ et un point A. Par ce point on mène une sécante quelconque rencontrant la courbe aux points $M_1, M_2, \ldots, M_n$. On prend sur la sécante un point P tel que l'on ait $\frac{n}{\overline{AP}} = \frac{1}{\overline{AM}} + \frac{1}{\overline{AM_2}} + \ldots + \frac{1}{\overline{AM_n}}$. Lieu du point P quand la sécante tourne autour du point A.

**3361.** — Podaire d'un point par rapport à une courbe. Tangente à la podaire.

**3362.** — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe $x = a(u - \sin u)$, $y = a(1 - \cos u)$.

**3363.** — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe $x^3 - y^2 = 0$.

**3364.** — Une droite AB de longueur constante a ses extrémités qui se déplacent sur un cercle et une droite située dans un même plan. Lieu d'un point de cette droite.

**3365.** — En un point de la courbe $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ on mène la tangente, et par l'origine on abaisse une perpendiculaire sur cette tangente. Lieu du pied de cette perpendiculaire.

**3366.** — Etant donnés deux points infiniment voisins d'une courbe, M et M', démontrer que la distance du point M' à la tangente en M est infiniment petite d'ordre supérieur à la distance MM'.

**3367.** — Enveloppe de la droite $x \sin \varphi - y \cos \varphi = a \cos 2\varphi$, $\varphi$ désignant un paramètre variable.

**3368.** — Enveloppe de la droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, $a$ et $b$ vérifiant la relation $a^2 + b^2 = k^2$.

**3369.** — Par un point mener des tangentes à la courbe $y^7 = a^3x^4$. Discuter.

**3370.** — Construire la courbe $y = 2 \sin x - x$. On considère les points de rencontre de cette courbe avec une droite passant par l'origine. Démontrer que les tangentes aux points de rencontre sont tangentes à une courbe algébrique de quatrième classe.

**3371.** — Définir la courbe diamétrale d'une courbe donnée par rapport à une direction donnée. Cas où la direction est asymptotique.

**3372.** — Trouver l'équation de la courbe symétrique de la courbe $y^3 + x - y = 0$ par rapport à la droite $x + y = 0$.

**3373** — Mener par un point du plan les tangentes à la courbe $x^5 - a^3y^2 = 0$. Discuter.

**3374.** — Trouver les diamètres conjugués des directions des axes de coordonnées pour la courbe

$$(x^2 - x)y^2 - 2x^2y + x^2 - 1 = 0.$$

**3375.** — On donne deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$ et on considère une sécante qui coupe les axes aux points A et B. Enveloppe du cercle circonscrit au triangle OAB quand ce triangle a un périmètre constant.

**3376.** — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe $y^2 = x^2 - x^3$.

**3377.** — Un cercle C roule sur une droite D. D'un point fixe P de la droite D on mène la seconde tangente au cercle. Lieu du point de contact.

**3378.** — Construire la courbe $y^2 = \frac{x^3}{a}$, et calculer l'aire comprise entre l'axe de $x$, la branche supérieure et une ordonnée AM. Cette aire est les $\frac{2}{5}$ de l'aire du triangle OAM.

**3379.** — On donne un cercle et un point P. On joint P à un point M variable sur le cercle, et par le point M on mène une droite $\Delta$ perpendiculaire à MP. Enveloppe de la droite $\Delta$.

**3380.** — Construire la courbe $y = x \sin x$ quand $x$ varie de 0 à $2\pi$. Aire limitée par cette courbe et $Ox$.

**3381.** — Etant données deux droites parallèles D et D' et un point O sur D', par le point O on mène une sécante rencontrant D en A. On abaisse AB perpendiculaire sur D' et on prend le symétrique M du point B par rapport à OA. Lieu du point M.

**3382.** — On considère une courbe C rapportée à deux axes rectangulaires et un point M quelconque de cette courbe. La tangente en M rencontre $Ox$ et $Oy$ en A et B ; la perpendiculaire en M à OM rencontre les axes en A' et B'. Déterminer la courbe de manière que les points A, B, A', B' soient sur un cercle.

**3383.** — Lieu du pôle d'une droite par rapport aux cercles tangents à deux droites.

**3384.** — Ayant construit la courbe $x = \frac{t}{1 - t^3}$, $y = \frac{t^2}{1 - t^3}$, trouver l'aire de la boucle.

**3385.** — Construire la courbe $x = \frac{t}{1 - t^3}$, $y = \frac{1 + t^2}{1 - t^3}$ Calculer l'aire comprise entre l'axe des $y$ et l'arc de courbe situé dans le deuxième angle des axes.

**3386.** — Etant donnée une courbe du quatrième degré, trouver le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée. Cas de décomposition du lieu. Intersection du lieu et de la courbe donnée.

**3387.** — On donne un cercle fixe (C) ; un deuxième cercle égal au cercle (C) tourne autour d'un point fixe P. Soient A et B les points de rencontre des deux cercles. Lieu du point de concours des hauteurs du triangle PAB.

**3388.** — Trouver une courbe plane dont le rayon de courbure soit constant.

**3389.** — Dans un cercle on considère un rayon fixe OA et un rayon mobile OM. Lieu de l'orthocentre du triangle OAM quand M parcourt la circonférence.

**3390.** — Sur la tangente à une courbe à partir du point de contact on porte une longueur constante. Démontrer que la normale au point du lieu obtenu passe par le centre de courbure de la courbe primitive.

**3391** — Discuter la réalité des tangentes menées d'un point à la courbe $x^2y^2 = a^4$.

**3392.** — Construire la courbe $\frac{m}{\rho} = \frac{\omega - \alpha}{\omega - \beta}$. On coupe la courbe par la droite $\omega = \omega_1$, trouver l'équation générale des tangentes aux points de rencontre. Montrer que ces droites sont tangentes à une courbe algébrique

**3393.** — Trouver l'aire comprise dans la boucle formée par les deux courbes $y = x^3$, $x = y^3$.

**3394.** — Lieu du point de concours des normales à une ellipse aux extrémités de deux diamètres conjugués.

**3395**. — Equation de l'ensemble des tangentes à une conique $f(x, y) = 0$ aux points de rencontre avec une droite $ux + vy + w = 0$.

**3396**. — Equation générale des cercles bitangents à une parabole. Lieu des points de contact des tangentes à ces cercles parallèles à une direction donnée.

**3397**. — Equation générale des paraboles passant par deux points de $Ox$ et tangentes à $Oy$.

**3398**. — Une parabole de grandeur constante tourne autour de son foyer ; lieu des pieds des normales abaissées d'un point donné sur cette courbe.

**3399**. — Lieu des foyers des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés.

**3400**. — On considère une ellipse et deux cordes rectangulaires passant par un foyer ; trouver une relation entre les longueurs de ces cordes.

**3401**. — Discuter la réalité des paraboles passant par l'intersection de deux coniques $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$.

**3402**. — Equation générale des coniques ayant un foyer donné et passant par deux points. Montrer qu'il y a deux familles de coniques. Lieu des centres.

**3403**. — Podaire d'un point par rapport à une parabole.

**3404**. — Lieu des centres des hyperboles équilatères passant par trois points.

**3405**. — Lieu des centres des hyperboles équilatères tangentes à trois droites.

**3406**. — Lieu des milieux des cordes normales à une hyperbole.

**3407**. — Deux ellipses concentriques et ayant mêmes axes en direction se coupent en quatre points réels. Calculer l'aire commune à ces deux courbes.

**3408**. — Etant donnée l'équation d'une ellipse ayant pour centre l'origine, $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$, trouver l'équation de l'ensemble des diamètres conjugués égaux.

**3409**. — On considère les coniques $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\omega}$, où $e$ est constant et $p$ variable. On mène d'un point fixe de l'axe polaire des tangentes à ces coniques ; lieu des points de contact.

**3410**. — On donne l'ellipse $x^2 + 2y^2 - 4x = 0$, trouver l'ellipse homothétique par rapport au point $x = 1$, $y = 2$, le rapport d'homothétie étant égal à 2.

**3411**. — Une conique a un foyer fixe et passe par deux points fixes ; lieu du second foyer.

**3412**. — On considère des paraboles ayant même foyer et même axe ; on leur mène des tangentes par un point du plan. Lieu des points de contact. (Traiter la question en coordonnées polaires.)

**3413**. — Etant donnée une conique $f(x,y) = 0$ rapportée à des axes obliques, trouver le lieu des sommets des angles droits circonscrits. Les coefficients de l'équation obtenue sont fonctions linéaires des mineurs du discriminant de $f(x, y)$ ; quelle en est la conséquence géométrique ?

**3414**. — Lieu des foyers des coniques tangentes à trois droites et passant par un point.

**3415**. — On donne une parabole et une droite D. Une tangente quelconque à la parabole coupe la droite D au point A et par le point A on mène une perpendiculaire à la tangente. Enveloppe de cette perpendiculaire.

**3416**. — Enveloppe des directrices des paraboles qui ont un sommet donné et qui sont tangentes à une droite.

**3417**. — Lieu des sommets des hyperboles équilatères passant par les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse.

**3418**. — Diamètres conjugués communs à deux coniques concentriques.

**3419**. — Lieu des foyers des paraboles ayant un sommet donné et passant par un point.

**3420**. — Lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à une conique.

**3421**. — Déterminer les axes de la courbe $5(3y - 4x - 2)^2 - (4y - 3x + 4)^3 = 0$.

**3422**. — La tangente en un point M d'une ellipse rencontre les tangentes aux extrémités A et A' du grand axe en des points D et D'. Equation du cercle qui a pour diamètre DD'. Points de rencontre de ce cercle et de AA'. Soient N et T les points où le petit axe rencontre la normale et la tangente en M. Equation du cercle circonscrit au triangle MNT. Trouver son axe radical avec le premier cercle.

**3423**. — Lieu des foyers des ellipses dont on donne une directrice et un des diamètres conjugués égaux. Solution géométrique. Montrer que les ellipses de la famille sont homothétiques.

**3424**. — Lieu des foyers des hyperboles dont on donne une directrice et une asymptote.

**3425**. — Construire une conique connaissant trois points et le pôle d'une droite donnée.

**3426**. — Etant donnée la conique $f(x, y) = 0$ et la droite $ux + vy + w = 0$, écrire que cette droite est : 1° directrice, 2° l'un des diamètres conjugués égaux, 3° axe.

**3427**. — D'un point A pris sur l'axe focal de la conique $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\omega}$, on mène des tangentes à cette conique. Lieu des points de contact quand $e$ varie. Construire le lieu.

**3428**. — Evaluer l'aire comprise entre la parabole et sa développée.

**3429**. — Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée menée à des coniques homofocales.

**3430**. — Par un point A d'une ellipse on mène des cordes AB et AC parallèles à deux directions fixes. Trouver quand A décrit l'ellipse le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur BC.

**3431**. — Les côtés d'un angle droit de sommet P rencontrent une ellipse en quatre points. Trouver, quand l'angle droit tourne autour de son sommet P, le lieu des points de rencontre des axes des paraboles passant par les quatre points.

**3432**. — Par un des points de rencontre de deux coniques on mène une sécante coupant les coniques en deux autres points A et B. Trouver le lieu du milieu de AB et l'enveloppe du cercle décrit sur AB comme diamètre.

**3433**. — Le triangle qui a pour sommets les pieds des normales issues d'un point à une parabole a son centre de gravité sur l'axe de la courbe.

**3434**. — Lieu des sommets et des foyers des ellipses de grandeur constante tangentes à deux droites rectangulaires.

**3435**. — Lieu des projections d'un foyer d'une ellipse sur les tangentes (solution analytique et géométrique).

**3436**. — On considère un angle droit BAC circonscrit à une ellipse donnée. Lieu du centre de gravité du triangle ABC.

**3437**. — Etant données deux coniques, existe-t-il un système de diamètres conjugués de la première parallèle à un système de diamètres conjugués de la seconde ? Pourrait-on déduire de là les axes d'une conique ?

**3438.** — Par le foyer F d'une parabole on mène une sécante qui rencontre la courbe aux points A et B. Relations existant entre les coordonnées des points A et B. Coordonnées du point M d'intersection des tangentes en A et B. Calculer l'angle BMA. On mène les normales en A et B ; lieu de leur point de rencontre.

**3439.** — Par un point P on mène une sécante rencontrant une conique en deux points A et B. Trouver l'enveloppe du cercle de diamètre AB.

**3440.** — On donne deux ellipses concentriques dont les axes ont mêmes directions. Lieu des centres des cercles qui touchent ces deux ellipses.

**3441.** — Lieu des points de concours des tangentes communes à une ellipse et à un cercle de rayon constant tangent à l'ellipse.

**3442.** — Lieu des points de concours des tangentes communes à une ellipse et à un cercle de centre fixe et de rayon variable.

**3443.** — On donne deux droites fixes $Ox$ et $\Delta$. On prend un point M variable sur $\Delta$, et sur la bissectrice de l'angle $x$OM on porte une longueur $OP = \sqrt{OM}$. Lieu du point P.

**3444.** — La tangente au point M d'une parabole rencontre l'axe en un point T. On prend le point P symétrique de T par rapport à M. Trouver le lieu du point P. Calculer l'aire comprise entre les deux paraboles et deux perpendiculaires à l'axe de la première.

**3445.** — On donne une parabole. Sur cette parabole on prend un point M que l'on joint au sommet A de la courbe. On mène une droite MB formant avec MA et l'axe de la parabole un triangle isocèle de base MA. Trouver l'enveloppe de MB quand M décrit la parabole.

**3446.** — Lieu des sommets des paraboles ayant un foyer donné et passant par un point donné. Construire le lieu en coordonnées polaires.

**3447.** — Par le foyer F d'une ellipse on mène des rayons vecteurs faisant entre eux des angles égaux à $\frac{2\pi}{n}$. Démontrer que la somme des inverses de ces rayons est constante.

**3448.** — Si on fait tourner un angle droit autour de son sommet situé sur une conique, la droite joignant les points où les côtés de l'angle rencontrent la conique passe par un point fixe.

**3449.** — On mène deux normales à une parabole faisant avec l'axe des angles $\alpha$ et $\beta$. Lieu de leur point de rencontre sachant que $\beta = 2\alpha$.

**3450.** — Lieu du foyer d'une parabole de grandeur constante tangente à une ellipse et ayant son axe parallèle au petit axe de l'ellipse.

**3451.** — Longueur d'un arc de parabole dont l'origine est au sommet.

**3452.** — Rayon de courbure en un point d'une conique donnée par l'équation générale.

**3453.** — Trouver les axes de la conique $2x^2 - xy + 3y^2 + x = 0$.

**3454.** — Parabole considérée comme limite de l'ellipse.

**3455.** — Lieu des pôles d'une droite fixe par rapport à une ellipse de grandeur constante qui est tangente en un point donné à une droite donnée.

**3456.** — D'un foyer F d'une ellipse on abaisse la perpendiculaire FP sur une normale, et on prend sur FP une longueur PM égale au demi-grand axe. Lieu du point M.

**3457.** — Lieu des symétriques du centre d'une ellipse par rapport aux tangentes.

**3458.** — Lieu des points de concours des tangentes communes à une ellipse et à un cercle ayant pour diamètre une corde de l'ellipse qui se déplace parallèlement à elle-même.

**3459.** — Construire une parabole connaissant deux tangentes et leurs points de contact.

**3460.** — Une droite de longueur contasnte s'appuie sur une ellipse et sur une droite. Lieu d'un point de la droite mobile.

**3461.** — Aire comprise entre les deux courbes $y^2 - 2px = 0$, $ay^2 = x^3$.

**3462.** — Lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à une parabole.

**3463.** — Une parabole de grandeur constante tourne autour de son foyer. On lui mène des tangentes parallèles à une direction donnée. Lieu des points de contact. Traiter la question en coordonnées polaires.

**3464.** — Lieu des points d'intersection des tangentes communes à une ellipse fixe et à une parabole de grandeur constante ayant son foyer au centre de l'ellipse.

**3465.** — Lieu des projections du centre d'une ellipse sur les normales à la courbe.

**3466.** — Lieu des points de rencontre des normales à une ellipse aux extrémités d'une corde qui se déplace parallèlement à elle-même.

**3467.** — Podaire de la parabole par rapport à son sommet.

**3468.** — Parabole considérée comme limite d'une hyperbole.

**3469.** — Lieu des sommets des hyperboles dont on connaît un foyer et une asymptote. Construire une de ces hyperboles connaissant son centre.

**3470.** — Lieu des points de rencontre des sécantes communes à une ellipse fixe et à un cercle variable dont le centre est fixe.

**3471.** — Lieu des centres des coniques tangentes à trois droites et passant par un point.

**3472.** — Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point à une ellipse de grandeur constante qui tourne autour d'un de ses sommets.

**3473.** — On donne une hyperbole; calculer la longueur d'une corde passant par le foyer, en fonction de l'angle qu'elle fait avec l'axe focal. Cas où les extrémités de la corde sont sur des branches différentes de la courbe.

**3474.** — Etant donnée la conique $2x^2 - 12xy + 14y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$, l'origine est-elle à l'intérieur ou à l'extérieur de cette conique ?

**3475.** — Equation générale des coniques admettant $y = 2x$ comme directrice et tangentes à $Ox$ en un point donné. Lieu des foyers.

**3476.** — Construire les coniques

$$\frac{x^2+x}{y^2+y}=a, \qquad \frac{x^2+y}{y^2+x}=b.$$

Trouver les points communs à ces deux courbes.

**3477.** — On donne un cercle fixe O, un second cercle C mobile mais de rayon donné, et tel que l'axe radical des deux cercles passe par un point fixe. Enveloppe du cercle C.

**3478.** — Etudier la courbe représentée par les deux équations

$$x\sin\varphi+y\cos\varphi=\frac{p}{\sin 2\varphi}, \qquad x\cos\varphi+y\sin\varphi=0.$$

**3479.** — Lieu du point de rencontre des normales à une ellipse aux points où la courbe est rencontrée par une sécante parallèle à une direction fixe.

**3480.** — D'un point A d'une ellipse on mène les trois normales à la courbe autres que celle qui a son pied en A. Trouver le lieu du centre du cercle passant par les pieds de ces trois normales quand le point A décrit l'ellipse.

**3481.** — Lieu des points de concours des tangentes communes à une hyperbole équilatère et à un cercle de centre fixe et de rayon variable.

**3482.** — Construire la courbe $x^2+y^2=1$, les axes de coordonnées faisant l'angle de 60°. Déterminer les axes en grandeur et en position.

**3483.** — Lieu du centre d'une ellipse d'aire constante tangente à trois droites.

**3484.** — Lieu des centres des cercles tangents à une ellipse et à l'un de ses axes.

**3485.** — On donne une ellipse et deux diamètres conjugués variables. Lieu des centres des cercles tangents à l'ellipse et aux deux diamètres.

## IV. Géométrie analytique à trois dimensions.

**3486.** — On donne trois demi-droites OA, OB, OC ayant respectivement pour cosinus directeurs $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Calculer le cosinus de l'angle des demi-plans OAB et OAC. En déduire la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

**3487.** — Étant donnés les trois plans $P=0$, $Q=0$, $R=0$, l'équation $\alpha P+\beta Q+\gamma R+\delta=0$ peut-elle représenter un plan quelconque de l'espace ?

**3488.** — Symétrique d'un point par rapport à un plan ou par rapport à une droite.

**3489.** — On donne une droite passant par l'origine et ayant pour cosinus directeurs $a, b, c$, et un point $M(x, y, z)$. On fait tourner le point M autour de la droite d'un angle $\theta$. Coordonnées du point après la rotation.

**3490.** — Trouver les bissectrices de l'angle des deux droites $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ et $\frac{x}{\alpha'}=\frac{y}{\beta'}=\frac{z}{\gamma'}$.

**3491.** — Distance du point $(x_0, y_0, z_0)$ à la droite $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$.

**3492.** — On considère la droite $x=az+p$, $y=bz+q$, où $a, b, p, q$ sont fonctions d'un paramètre $t$. Trouver la valeur principale de la plus courte distance des deux droites correspondant aux valeurs $t$ et $t+h$, $h$ étant l'infiniment petit principal. Cette valeur principale est de la forme $Ah$. Si A est nul, la distance est du troisième ordre.

**3493.** — On fait tourner $Ox$ d'un certain angle autour d'une droite passant par l'origine; déterminer les cosinus directeurs de la nouvelle position de $Ox$.

**3494.** — Étudier la courbe définie par les équations $x=\frac{1}{t}$, $y=\frac{t}{t+1}$, $z=\frac{t+1}{t-1}$. Trouver les asymptotes. Équation générale des quadriques contenant cette courbe.

**3495.** — On considère les plans qui coupent un cône suivant deux droites rectangulaires. Lieu des perpendiculaires menées à ces plans par le sommet.

**3496.** — Mener par un point un plan coupant un cône du deuxième degré suivant deux droites rectangulaires.

**3497.** — On fait tourner une ellipse autour de son grand axe. Lieu des normales communes à cette ellipse et à une droite.

**3498.** — Équation de la surface engendrée par une droite s'appuyant sur $Oz$, rencontrant une droite du plan des $xy$ et faisant avec $Oz$ un angle donné.

**3499.** — Lieu des normales communes aux deux cercles $x^2+y^2-R^2=0$, $z=0$ et $x^2+z^2-R^2=0$, $y=0$, quand R varie.

**3500.** — Étant donnés un cercle et une droite passant par son centre, trouver le lieu des normales qu'on peut mener au cercle par les divers points de la droite.

**3501.** — Équations de l'hélice. Tangente. Plan osculateur. Rayon de courbure.

**3502.** — On donne une ellipse et une droite non située dans son plan. Trouver le lieu engendré par les normales à l'ellipse qui rencontrent la droite.

**3503.** — Un cercle tourne autour d'un axe situé dans son plan. D'un point donné on lui mène des normales. Lieu des pieds de ces normales. Lieu des normales.

**3504.** — Lieu des points de l'espace tels que le rapport de leurs distances à un point fixe et à une droite fixe soit constant.

**3505.** — Étudier la courbe $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$. Tangente, plan normal. Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les plans normaux.

**3506.** — Si deux surfaces se touchent en un point, leur intersection présente un point double en ce point.

**3507.** — Dans une courbe quelconque le rapport de l'arc à la corde tend vers un quand l'arc tend vers zéro.

**3508.** — On fait tourner une hélice autour d'une génératrice du cylindre sur lequel elle est tracée. Équation de la surface engendrée. Courbe de contact du cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée.

**3509.** — Lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à des plans fixes soit constante.

**3510.** — Lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux droites de l'espace soit constante.

**3511.** — Trouver la surface engendrée par une circonférence de rayon donné qui se déplace en s'appuyant sur $Oz$ et en rencontrant en deux points (dont l'un est fixe) une droite donnée du plan des $xy$.

**3512.** — Déterminer la nature des quadriques définies par les équations :

$yz + zx + xy - 1 = 0$,

$(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 + 2x + 2y + 2z - 1 = 0$,

$x^2 + y^2 + z^2 - 4yz - 4zx - 4xy - 1 = 0$,

$(x - z)^2 + (x - y)^2 - 2y - 2z + 1 = 0$,

$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 1 = 0$,

$(x + y + z)^2 + (x + y)^2 + x^2 = 1$,

$ayz + bzx + cxy = 1$,

$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 1$,

$(a + a' + a'' = 0,\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1)$,

$z = 2x + 3y - 1 \pm \sqrt{-x^2 + 2xy + ay^2 + 2bx + 2cy}$,

$yz + zx - x - y - z = 0$,

$(x - y)^2 + 2x + y + z = 0$ (paramètre de la section droite),

$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos\alpha - 2zx \cos\beta - 2xy \cos\gamma - 1 = 0$ ($\alpha, \beta, \gamma$ étant les angles d'un triangle),

$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4y = 0$, (plans cycliques et sommet),

$(cy - bz)^2 + (az - cx)^2 + bx - ay)^2 - 1 = 0$,

$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) - 1 = 0$ (sections circulaires),

$x^2 - z^2 - 2mxy - 1$ (sections circulaires),

$PQ + \lambda RS = 0$ (P, Q, R, S, fonctions linéaires de $x, y, z$).

**3513.** — Condition pour que les surfaces

$$(Ax + By)(Bx - Ay - Cz) + z^2 = 0$$

soient de révolution. Ces conditions étant remplies, lieu des axes de ces surfaces.

**3514.** — Trouver sur une génératrice donnée d'un paraboloïde hyperbolique un point tel que le plan tangent en ce point coupe la surface suivant deux génératrices rectangulaires.

**3515.** — Déterminer le foyer de la parabole définie par les équations $z = mx$, $\dfrac{y^2}{p} + \dfrac{z^2}{q} = 2x$.

**3516.** — Lieu des projections d'un point sur les plans tangents à la surface $xy - kz = 0$. Voir géométriquement que le lieu a un point double au point donné. Reconnaître s'il y a des cercles sur la surface.

**3517.** — Lieu des pieds des normales à un ellipsoïde qui sont tangentes à une sphère concentrique. Quel est le rayon maximum de cette sphère pour que les normales qui lui sont tangentes soient réelles ?

**3518.** — Par un point donné, on mène des normales à la courbe intersection d'un ellipsoïde et d'une sphère concentrique de rayon variable. Lieu des pieds de ces normales.

**3519.** — Lieu des normales à une quadrique qui rencontrent une droite fixe.

**3520.** — Lieu des centres des hyperboloïdes de révolution passant par deux droites. Ce lieu est-il une courbe ou une surface ?

**3521.** — Le volume du parallélépipède construit sur trois génératrices de même système d'un hyperboloïde à une nappe est constant.

**3522.** — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe.

**3523.** — Trouver le volume d'un ellipsoïde.

**3524.** — Lieu engendré par une droite mobile rencontrant les trois droites $A(y = 0,\ z = h)$, $B(x = 0,\ z = k)$, $C\left(\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}\right)$. Discuter la nature de la surface.

**3525.** — Équation du cylindre circonscrit à un paraboloïde hyperbolique.

**3526.** — Sphères bitangentes à un paraboloïde elliptique. Lieu des centres. Combien y a-t-il de ces sphères passant par deux points ?

**3527.** — Que peut-on dire des surfaces représentées par l'équation $S + \lambda PQ = 0$, $S$ étant le premier membre de l'équation d'une quadrique, $P$ et $Q$ les premiers membres des équations de deux plans et $\lambda$ un paramètre variable ? Paraboloïdes du faisceau.

Même question pour les surfaces $S + \lambda P^2 = 0$.

**3528.** — Montrer que toute surface de révolution du deuxième degré peut se mettre sous la forme $\Sigma + \lambda P^2 = 0$, $\Sigma$ étant le premier membre de l'équation d'une sphère et $P$ le premier membre de l'équation d'un plan.

**3529.** — Conditions pour que deux cônes ayant leurs sommets à l'origine soient égaux.

**3530.** — Étant donnés un ellipsoïde $f(x, y, z) = 0$ et un point $P$, trouver l'équation du cône des normales issues du point $P$ à la surface. Pourrait-on déduire de là l'équation de l'ensemble des plans principaux ?

**3531.** — D'un point $P$ on mène une sécante variable $PAB$ à une quadrique. Lieu des points divisant $AB$ en trois parties égales.

**3532.** — Lieu des sommets des paraboloïdes passant par deux droites.

**3533.** — Lieu des pieds des normales menées d'un point donné aux sections d'un ellipsoïde par des plans parallèles à une direction de plan donnée.

**3534.** — Lieu des sommets des coniques sections d'une quadrique par des plans passant par une droite fixe. Cas où la droite est normale.

**3535.** — Par un point $M(a, b, c)$ d'une quadrique $f(x, y, z) = 0$ on mène une parallèle à $Oz$ qui rencontre la quadrique en un deuxième point $M'$. Calculer la longueur $MM'$.

**3536.** — Normales à un paraboloïde par un point. Les cinq points d'incidence ne peuvent être sur une même sphère.

**3537.** — Lieu des sommets des paraboloïdes équilatères passant par une hyperbole donnée.

**3538.** — Lieu des sommets des quadriques $ayz + bzx + cxy = 1$, sachant que l'on a $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $abc = k$.

**3539.** — Équation générale des ellipsoïdes égaux à l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ et ayant pour centre un point donné.

**3540.** — Équation du cône asymptote de la quadrique $f(x, y, z) = 0$.

**3541.** — Lieu des droites issues d'un point et rencontrant un ellipsoïde sous un angle constant.

**3542.** — Une génératrice $G$ d'un hyperboloïde à une nappe rencontre l'ellipse de gorge en un point $M$. On mène la tangente à cette ellipse au point $M'$ diamétralement opposé au point $M$. Lieu de la perpendiculaire commune à cette tangente et à la génératrice $G$.

**3543.** — Lieu des centres des sphères de rayon donné bitangentes à un ellipsoïde. Cas où le rayon est nul.

**3544.** — Lieu de l'intersection de deux plans rectangulaires passant chacun par une droite fixe. Montrer géométriquement que les sections par des plans perpendiculaires à chacune des droites sont des cercles.

**3545.** — A combien de conditions équivaut la donnée d'une conique d'une quadrique ? Même question si l'on donne une conique tracée sur une surface du troisième degré.

**3546.** — Lieu des points de la quadrique $xy = z$ par où passent deux génératrices faisant entre elles un angle de 60°.

**3547.** — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les génératrices de la surface

$$yz - x - y - z = 0.$$

**3548.** — Equation de l'ellipsoïde symétrique de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ par rapport à la droite $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$.

**3549.** — Étant donnée une quadrique $f(x, y, z) = 0$ et une direction de plans $ux + vy + wz = 0$, calculer les distances des deux plans tangents à la quadrique parallèles à la direction donnée.

**3550.** — On considère un ellipsoïde et un cylindre de révolution dont l'axe passe par le centre de l'ellipsoïde. Trouver le lieu des pieds des normales menées par un point fixe aux sections de l'ellipsoïde par des plans tangents au cylindre.

**3551.** — Lieu des points tels que leurs plans polaires par rapport à un ellipsoïde coupent cette surface suivant des ellipses d'aire constante.

**3552.** — On considère une quadrique et un point fixe A. Par ce point on mène une sécante rencontrant la quadrique aux points M et M'. Lieu du milieu de MM'.

**3553.** — Lieu du symétrique d'un point fixe par rapport aux plans tangents à un ellipsoïde.

**3554.** — Lieux des sommets et des axes des paraboloïdes de révolution passant par une ellipse.

**3555.** — Lieu des sommets des quadriques qui admettent le plan des $xy$ pour plan principal, qui sont tangentes à $Ox$ et ont un axe de longueur donnée correspondant au plan principal donné. On donne en outre une direction de sections cycliques.

**3556.** — Lieu des centres des quadriques passant par un cercle et une droite qui rencontre le cercle. Prévoir géométriquement le résultat trouvé. Déterminer l'une des surfaces connaissant en outre le diamètre conjugué du plan du cercle.

**3557.** — Lieu des projections d'un point sur les plans tangents à la surface $xy - kz = 0$. Montrer que le point donné est point singulier. Etudier la surface dans le voisinage de ce point. Droites de la surface.

**3558.** — Diamètres conjugués égaux dans l'ellipsoïde.

**3559.** — Equation du cône circonscrit à une quadrique le long de la section par le plan $ux + vy + wz + r = 0$.

**3560.** — Peut-on se donner dans une quadrique deux systèmes de diamètres conjugués ?

**3561.** — Equation d'un cône de révolution autour d'un axe donné, connaissant le sommet et un point. Chercher les racines de l'équation en S, et le plan principal correspondant à la racine simple.

**3562.** — Équation du cône de sommet donné ayant pour base la parabole $y^2 - 2px = 0$, $z = 0$. Lieu du sommet pour que ce cône soit capable d'un trièdre trirectangle inscrit.

**3563.** — On considère une quadrique passant par l'origine et un plan quelconque P ; former l'équation du cône ayant pour sommet l'origine et pour base la section de la quadrique par le plan. A quelles conditions est soumis ce cône ? Si on coupe tous ces cônes par un plan fixe, les coniques sections passent par deux points fixes.

**3564.** — Lieu des points d'où l'on peut mener à un ellipsoïde trois plans tangents parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'un autre ellipsoïde.

**3565.** — Cônes passant par l'intersection de deux quadriques. Si les deux quadriques ont une génératrice commune, l'équation en $\lambda$ a deux racines doubles. La réciproque est-elle vraie ? La démontrer.

**3566.** — Lieu du pôle du plan des $xy$ par rapport aux quadriques qui passent par deux droites et qui coupent le plan des $xy$ suivant une conique bitangente à une ellipse donnée.

**3567.** — Equation de la quadrique définie par les trois droites $\frac{x - x_i}{a} = \frac{y - y_i}{b_i} = \frac{z - z_i}{c_i}$, $(i = 1, 2, 3)$.

**3568.** — Conditions pour que les quatre droites $\frac{x - x_i}{a_i} = \frac{y - y_i}{b_i} = \frac{z - z_i}{c_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ soient sur une quadrique.

**3569.** — On donne dans le plan des $xy$ une circonférence passant par l'origine, et on considère les quadriques passant par cette circonférence, par un point A de $Oz$ et ayant à l'origine un plan tangent donné. Lieu des centres.

**3570.** — On assujettit une quadrique de révolution à contenir deux droites rectangulaires qui ne se rencontrent pas et leur perpendiculaire commune. Déterminer cette surface. Combien y a-t-il de solutions ? Trouver l'axe d'une de ces surfaces.

**3571.** — Trouver l'équation d'une quadrique de révolution connaissant une génératrice, un sommet et un point.

**3572.** — Déterminer un cône de révolution connaissant une conique et un plan tangent.

**3573.** — Equation générale des quadriques admettant l'origine pour sommet et pour plans cycliques les plans des $xy$ et des $xz$. Combien de paramètres renfermera l'équation ? Quelles sont les surfaces que peut représenter l'équation donnée ?

**3574.** — Une quadrique est-elle déterminée par un cône de directions asymptotiques et deux génératrices ? A quelle condition sont assujetties ces génératrices ?

**3575.** — Déterminer une quadrique connaissant un cercle, une génératrice et deux points. Discussion.

**3576.** — Déterminer la quadrique passant par une parabole donnée et par deux droites non situées dans un même plan et qui rencontrent chacune la parabole. Dans quel cas la surface est-elle un paraboloïde ?

**3577.** — Equation générale des quadriques admettant l'origine pour sommet, le plan des $yz$ pour plan principal et le plan des $zx$ comme plan cyclique.

**3578.** — Déterminer un cylindre de révolution connaissant un plan tangent, le point de contact et deux points. Solution géométrique.

**3579.** — Déterminer une quadrique de révolution connaissant un point de l'axe, une génératrice et deux points de la surface.

**3580.** — Construire un paraboloïde de révolution connaissant une section plane et un point.

**3581.** — Déterminer un paraboloïde connaissant l'axe, une génératrice et un point.

**3582.** — Déterminer un cylindre hyperbolique équilatère connaissant un plan asymptote et trois points.

**3583.** — Déterminer un cylindre parabolique connaissant un plan tangent et le point de contact, un plan diamétral et un point de la surface.

**3584.** — Équation générale des quadriques passant par l'origine, contenant $Oz$, tangentes au plan $zOx$ au point O et au plan $zOy$ au point à l'infini de $Oz$. Dire à priori combien l'équation renferme de paramètres.

**3585.** — Équation générale des quadriques ayant $Ox$ pour axe et $Oy$ et $Oz$ pour diamètres conjugués de plans cycliques.

**3586.** — Combien donne-t-on de conditions en assujettissant une quadrique à passer par un cercle donné ? Si l'on donne en outre le diamètre conjugué du plan du cercle et deux points que faut-il pour que la surface soit un paraboloïde ?

**3587.** — Équation générale des quadriques tangentes au plan des $xy$ à l'origine, et admettant le plan $zOx$ comme plan cyclique.

**3588.** — Déterminer un paraboloïde connaissant le sommet et un cercle de la surface.

**3589.** — Équation générale des quadriques tangentes en O au plan des $xy$, au point à l'infini sur $Oy$ au plan des $yz$ et au point à l'infini sur $Ox$ au plan des $zx$.

**3590.** — Déterminer un cône de révolution connaissant une génératrice, un point de l'axe et un point de la surface.

**3591.** — Déterminer un cône de révolution connaissant un plan tangent et le point de contact et trois points.

**3592.** — Déterminer un paraboloïde ayant pour ombilic un point donné, pour direction des diamètres une direction donnée, et sachant en outre que l'axe de la surface passe par un point donné et que la surface passe par un point donné.

**3593.** — Équation générale des quadriques admettant deux points donnés pour ombilics non diamétralement opposés.

**3594.** — Déterminer une quadrique passant par un cercle donné et par deux droites rencontrant le cercle et ne se rencontrant pas.

**3595.** — Un cône de révolution est-il déterminé si on donne une parabole tracée sur ce cône et le point où l'axe du cône rencontre le plan de la parabole ?

**3596.** — Équation générale des quadriques admettant $Oz$ comme diamètre conjugué d'une série de plans cycliques.

**3597.** — Déterminer un cylindre de révolution connaissant un plan tangent, un point quelconque et un point de l'axe.

**3598.** — Déterminer un hyperboloïde de révolution connaissant deux génératrices de même système et un point.

**3599.** — Déterminer un paraboloïde connaissant le sommet, un plan directeur et une génératrice non parallèle au plan directeur.

**3600.** — Équation générale des quadriques du révolution ayant pour axe la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ et pour sommet l'origine. Combien reste-t-il de paramètres ?

**3601.** — Équation générale des quadriques ayant pour sommet l'origine et pour plans cycliques les plans des $xz$ et des $yz$. Cas où la surface est un cylindre.

**3602.** — On donne dans un paraboloïde l'axe, le plan de Monge et une génératrice. Déterminer le paraboloïde.

**3603.** — Équation générale des hyperboloïdes admettant $Ox$ pour diamètre conjugué d'un plan cyclique et $Oz$ pour génératrice du cône asymptote. Combien l'équation doit-elle renfermer de paramètres ?

**3604.** — Déterminer un cylindre parabolique connaissant un plan tangent, le point de contact et trois points.

**3605.** — Déterminer un cylindre hyberbolique connaissant un plan asymptote et quatre points.

**3606.** — Que représente l'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2y + 2z + h^2 = 0$ ? Combien faut-il de points pour déterminer cette surface ? Combien de solutions ? Construction géométrique.

**3607.** — Déterminer un hyperboloïde de révolution connaissant une génératrice, un point de l'axe et deux points de la surface.

**3608.** — Déterminer un paraboloïde connaissant le sommet, un plan cyclique et trois points.

**3609.** — Déterminer une quadrique passant par un quadrilatère gauche et tangente à un plan.

**3610.** — On donne un cône circonscrit à une quadrique. Combien cela fait-il de conditions ? Qu'arrive-t-il lorsqu'on se donne deux cônes circonscrits ?

**3611.** — Dans une quadrique on donne un plan principal et deux génératrices de même système. Trouver le plan tangent en un point d'une des génératrices.

**3612.** — Combien de conditions faut-il donner pour déterminer un cylindre hyperbolique équilatère ? On donne un plan tangent et son point de contact, un point de l'axe et un point de la surface, déterminer le cylindre.

**3613.** — Équation de la quadrique passant par une parabole et par deux droites non situées dans un même plan et rencontrant la parabole.

**3614.** — Lorsqu'on veut déterminer une quadrique, peut-on se donner deux systèmes de trois directions conjuguées ?

**3615.** — Déterminer un paraboloïde connaissant un cercle et trois points. Solutions analytique et géométrique.

**3616.** — Déterminer un cône de révolution connaissant un plan tangent, un point de l'axe et sachant que le cône est équilatère.

**3617.** — Combien donne-t-on de conditions en donnant un diamètre d'une quadrique ? En donnant deux diamètres ? Trois diamètres ?

**3618.** — Construire un cylindre parabolique connaissant six points dont quatre sont situés dans un même plan.

**3619.** — On donne un axe, une génératrice et le plan tangent en un point de cette génératrice. La quadrique est-elle déterminée ? On donne en outre l'autre génératrice située dans le plan tangent. Équation de la surface.

**3620.** — Équation générale des surfaces de révolution admettant $Oz$ comme axe de symétrie.

**3621.** — Déterminer un cône de révolution connaissant un plan tangent et le point de contact, un point de l'axe et un point de la surface.

**3622.** — Déterminer un cylindre hyperbolique équilatère connaissant un point de l'axe, un plan tangent et deux points.

**3623.** — On donne dans une quadrique un sommet et un axe ne passant pas par le sommet et autant de points qu'il en faut pour déterminer complètement la surface. Trouver l'équation de la quadrique.

**3624.** — Déterminer un paraboloïde connaissant une génératrice, le plan de Monge et deux points.

**3625.** — Combien donne-t-on de conditions en donnant un plan tangent d'une surface développable ?

**3626.** — Déterminer un cône de révolution connaissant un plan tangent, un point de l'axe et deux points.

**3627.** — Déterminer une quadrique connaissant un cercle, le diamètre conjugué du plan de ce cercle et deux points.

**3628.** — Equation générale des quadriques admettant $Ox$ comme diamètre conjugué de plan cyclique et $Oz$ comme génératrice du cône asymptote.

**3629.** — Déterminer un cône de révolution connaissant une génératrice, un point de l'axe et un point.

**3630.** — Equation générale des quadriques passant par $Oz$ et par la droite $z = 0$, $ux + vy = 1$.

**3631.** — Déterminer une quadrique connaissant un cercle de la surface, une génératrice rencontrant le cercle et deux points.

**3632.** — On donne dans un paraboloïde un cercle, le diamètre conjugué du plan de ce cercle et un point. Déterminer la surface.

**3633.** — Déterminer une quadrique connaissant un axe, un sommet situé sur cet axe, une génératrice et un point de la surface. Quelle surface obtiendra-t-on ?

**3634.** — Combien faut-il de points pour déterminer un cône *quelconque* dont on donne une directrice plane? Trouver le sommet d'un cône connaissant une directrice plane, puis deux plans tangents et un point, ou un plan tangent et deux points.

**3635.** — Déterminer un paraboloïde connaissant un ombilic, l'axe et un point.

**3636.** — Etant donnée la quadrique $f(x, y, z) = 0$, écrire que le plan $ux + vy + wz + r = 0$ est plan principal.

**3637.** — Ecrire que la quadrique $f(x, y, z) = 0$, admet pour diamètre conjugué de plan cyclique la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$.

**3638.** — Ecrire que l'origine est ombilic de la quadrique $f(x, y, z) = 0$.

**3639.** — Ecrire que la quadrique $f(x, y, z) = 0$ est de révolution autour de la droite $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$.

**3640.** — Ecrire que l'origine est sommet de la quadrique $f(x, y, z) = 0$.

**3641.** — Exprimer qu'une quadrique est de révolution et admet un plan donné pour plan d'équateur.

**3642.** — Intersection de deux quadriques ayant une génératrice commune sachant qu'un point donné a même plan polaire par rapport à ces deux surfaces.

**3643.** — Comment se coupent deux paraboloïdes ayant un plan directeur commun et une génératrice commune, parallèle ou non au plan directeur. *A priori* combien de paramètres doit contenir l'équation de chaque paraboloïde?

**3644.** — Comment se coupent deux paraboloïdes ayant un plan directeur commun et tel qu'un point donné ait même plan polaire par rapport aux deux surfaces ?

**3645.** — Intersection de deux quadriques bitangentes. Solution géométrique et analytique.

**3646.** — Intersection de deux quadriques inscrites dans un même cône.

**3647.** — Comment se coupent deux quadriques tangentes et telles qu'un point donné ait même plan polaire par rapport aux deux surfaces ?

**3648.** — Comment se coupent deux quadriques qui se touchent en trois points ? Cas où les trois points sont situés sur une même génératrice.

**3649.** — Comment se coupent deux paraboloïdes ayant un plan directeur commun et tangents en un point.

**3650.** — Comment se coupent deux paraboloïdes ayant une génératrice commune et même direction d'axe.

**3651.** — Intersection de deux quadriques qui ont une génératrice commune et qui se touchent en un point en dehors.

**3652.** — Etudier les quadriques passant par l'intersection des deux quadriques

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0, \qquad x^2 + y^2 - ax - by = 0.$$

**3653.** — Comment se coupent deux quadriques qui ont une génératrice commune, qui ont un point commun en dehors et telles que deux droites données soient conjuguées par rapport à ces deux surfaces?

(*A suivre.*)

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1252.** — On considère les paraboloïdes S qui admettent une parabole principale donnée P.

1° Lieu des ombilics qui ne sont pas dans le plan de la parabole P.

2° Surface engendrée par les hyperboles des paraboloïdes S contenues dans leurs plans de Monge. Définir géométriquement cette surface par les sections planes parallèles à l'axe de la parabole P et perpendiculaires à son plan.

3° Il y a un paraboloïde S tangent à un plan Q. Lieu du point de contact quand le plan Q reste parallèle à un plan donné ou à une direction donnée.

4° Mêmes questions si le plan Q passe par une droite fixe ou par un point fixe. Étudier les cas de décomposition de la surface trouvée dans le dernier cas.

T. L.

**1253.** — Démontrer que trois cercles passant par le point de rebroussement d'une cissoïde droite et coupant

orthogonalement cette courbe en trois points en ligne droite ont même axe radical, et que les droites joignant le point de rebroussement aux centres de ces cercles coupent la cissoïde en trois points en ligne droite.

R. Bouvaist.

**1254**. — Par le sommet d'une strophoïde droite et par un point quelconque pris sur la courbe, on peut mener deux cercles tangents à la strophoïde ; le cercle passant par le sommet et les contacts enveloppe une cissoïde droite.

R. Bouvaist.

# DEUXIÈME PARTIE

## ALGÈBRE

**1170**. — *Quelles sont les conditions que doivent remplir les coefficients de l'équation*

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

*pour que ses quatre racines soient de la forme*

$$a,\ b,\ \frac{b}{a},\ \frac{a}{b}.$$

Pour traiter la question, nous allons décomposer le polynome du quatrième degré en un produit de deux trinomes : celui qui admet les deux racines $a$ et $b$ sera de la forme $x^2 + \lambda x + \mu$ ; l'autre, celui qui admet pour racines $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$, sera de la forme $x^2 + \lambda' x + 1$. Mais nous savons que $-\lambda'$ est égal à $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, c'est-à-dire à $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ ; nous avons donc $-\lambda' = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab}$ ou $-\lambda' = \frac{\lambda^2 - 2\mu}{\mu}$ ; par conséquent nous devons avoir l'identité

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s \equiv (x^2 + \lambda x + \mu)\left(x^2 - \frac{\lambda^2 - 2\mu}{\mu}x + 1\right),$$

ce qui nous donne successivement

$$\lambda - \frac{\lambda^2 - 2\mu}{\mu} = p,$$

$$1 + \mu - \lambda\frac{\lambda^2 - 2\mu}{\mu} = q,$$

$$\lambda - (\lambda^2 - 2\mu) = r,$$

et

$$\mu = s.$$

De ce que $\mu = s$, nous déduisons de suite que la première et la troisième donnent $\lambda$ et $\lambda^2 - 2s$ ; elles deviennent en effet

$$\lambda s - (\lambda^2 - 2s) = ps,$$

$$\lambda - (\lambda^2 - 2s) = r,$$

et le calcul annoncé est immédiat :

$$\lambda = \frac{ps - r}{s - 1}, \qquad \lambda^2 - 2s = s\frac{p - r}{s - 1}.$$

Nous aurons donc une première relation en remplaçant $\lambda$ et $\lambda^2 - 2s$ par leurs valeurs dans la deuxième relation ; puis une seconde, en remplaçant $\lambda$ par sa valeur dans $\lambda^2 - 2s$. Ce calcul nous donne

$$s(1 + s - q) - s\frac{(ps - r)(p - r)}{(s - 1)^2} = 0,$$

et

$$s(s - 1)(2s + p - r - 2) - (ps - r)^2 = 0.$$

Telles sont les deux relations demandées. La première se décompose en deux : elle donne d'abord $s = 0$, puis

$$(s-1)^2(s+1-q)-(p-r)(ps-r)=0.$$

Pour $s = 0$, la seconde se réduit à $r = 0$ et l'équation donnée devient

$$x^2(x^2+px+q)=0;$$

on peut regarder le trinome $x^2$ comme admettant les deux racines $a$ et $b$ et l'autre comme admettant les racines $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ qui sont alors indéterminées. En laissant de côté ce cas exceptionnel, nous voyons que les deux conditions véritables sont

$$(1)\quad \begin{cases} (s-1)^2(s+1-q)-(p-r)(ps-r)=0, \\ s(s-1)(2s+p-r-2)-(ps-r)^2=0. \end{cases}$$

Si ces conditions sont remplies, les équations précédentes donnent $\lambda$, $\mu$ et $\lambda^2-2\mu$; par suite, nous connaissons les trinomes du second degré qui admettent les racines $a$, $b$ et $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$; donc nous pouvons résoudre l'équation proposée à l'aide de deux équations du second degré.

P. CANET, lycée de Nancy.

Bonnes solutions : MM. Parrod ; Pégorier ; J. Haag ; Nicolesco, à Bucarest.

---

**1187.** — *Une fonction $y$ de la variable $x$ a pour dérivée*

$$y' = \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}$$

*et se réduit à 0 pour $x = 0$. Déterminer cette fonction et étudier ses variations quand $x$ reçoit toutes les valeurs pour lesquelles la fonction $y$ est définie. — Courbe figurative.*

La fonction $y' = \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}$ peut s'écrire

$$y' = \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

La première partie est la dérivée de $-2\sqrt{4-x^2}$, la seconde, la dérivée de $-\arcsin\frac{x}{2}$. On a donc

$$y = -2\sqrt{4-x^2} - \arcsin\frac{x}{2} + C^{te};$$

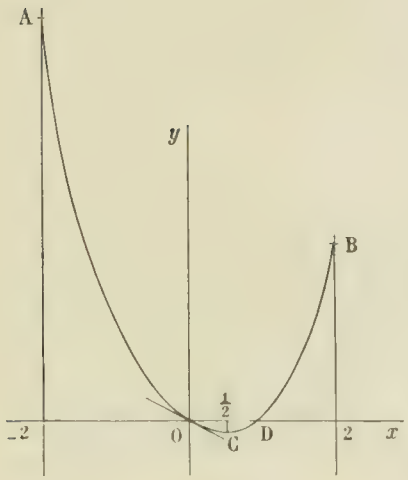
mais pour $x = 0$, $y$ est nul, C a donc la valeur 4 et l'on a finalement

$$y = 4 - 2\sqrt{4-x^2} - \arcsin\frac{x}{2}.$$

Pour étudier cette fonction, nous remarquons que le radical n'est défini qu'entre $-2$ et $+2$; de même $\arcsin\frac{x}{2}$ n'est défini qu'entre $-2$ et $+2$; par conséquent nous ferons varier $x$ uniquement de $-2$ à $+2$. Dans cet intervalle, la dérivée $y'$ s'annule pour $x = \frac{1}{2}$; elle est négative de $-2$ à $\frac{1}{2}$, positive de $\frac{1}{2}$ à $+2$; par suite, la fonction est d'abord décroissante, puis croissante, et passe par un minimum pour $x = \frac{1}{2}$.

Pour $x = -2$, la fonction prend la valeur $4+\frac{\pi}{2}$; pour $x = 0$, elle est nulle; pour $x = \frac{1}{2}$, elle prend la valeur négative $4-\sqrt{15}-\arcsin\frac{1}{4}$, qui est très petite en valeur absolue;

et enfin, pour $x = 2$, elle prend la valeur $4 - \frac{\pi}{2}$. La dérivée est infinie pour $x = \mp 2$, égale à $-\frac{1}{2}$ pour $x = 0$, et nulle pour $x = \frac{1}{2}$; les tangentes à la courbe en ses points principaux sont donc faciles à tracer. Il en est de même de la courbe représentative.




Cette courbe montre que $y$ est nul pour une valeur de $x$ comprise entre $\frac{1}{2}$ et 2.

Tout ce que nous venons de dire a été dit dans le cas où le radical est pris avec le signe $+$.

Si nous prenons le radical avec le signe $-$, la fonction $y$ est donnée par

$$y = 2\sqrt{4 - x^2} + \arcsin\frac{x}{2} + C^{te};$$

déterminons la constante de façon que pour $x = -2$, la fonction $y$ ait la même valeur que la précédente, $4 + \frac{\pi}{2}$; nous aurons ainsi

$$4 + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + C,$$

d'où

$$C = 4 + \pi;$$

la fonction $y$ ainsi choisie est

$$y = 4 + \pi + 2\sqrt{4 - x^2} + \arcsin\frac{x}{2}.$$

Elle est croissante de $-2$ à $\frac{1}{2}$, maximum pour $x = \frac{1}{2}$, et décroissante de $\frac{1}{2}$ à 2. Pour $x = -2$, elle est égale à $4 + \frac{\pi}{2}$, la courbe part du point A tangentiellement à une parallèle à $Oy$; pour $x = 0$, elle est égale à $8 + \pi$; pour $x = \frac{1}{2}$, à $4 + \sqrt{15} + \pi \arcsin\frac{1}{4}$, c'est la valeur maxima; enfin, pour $x = 2$, elle est égale à $4 + \pi + \frac{\pi}{2}$.

La courbe figurative continue la première au point A, mais elle ne la rejoint pas au point B; la courbe totale n'est pas fermée.

Si on détermine la constante de façon que la nouvelle fonction soit nulle pour $x = 0$, on trouve

$$y = 2\sqrt{4 - x^2} + \arcsin\frac{x}{2} - 4;$$

c'est la première valeur changée de signe. Donc la courbe figurative de la nouvelle fonction est symétrique de la première par rapport à $Ox$.

BOURNIQUE, lycée Saint-Louis.

Bonnes solutions : MM. Maréchet ; Javelot ; J. Haag ; Guinand, agent-voyer à Ecouen ; P. Tribier.

---

**1188.** — *Une fonction $y$ de la variable $x$ est définie par l'équation*

$$e^x - e^y(x - y)^2 = 0.$$

*Calculer sa dérivée $y'$ et expliquer le résultat.*

Désignons par $f(x, y)$ le premier membre de l'équation donnée, la dérivée $y'$ est donnée par la

formule connue

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Or on a

$$f'_x = e^x - 2e^y(x-y), \qquad f'_y = -e^y(x-y)^2 + 2e^y(x-y),$$

ou, en remplaçant $e^y(x-y)^2$ par $e^x$,

$$f'_y = -e^x + 2e^y(x-y).$$

On en déduit

$$y' = -\frac{e^x - 2e^y(x-y)}{-e^x + 2e^y(x-y)} = 1.$$

Ce résultat pouvait se prévoir. En effet l'équation proposée peut s'écrire

$$e^{x-y} - (x-y)^2 = 0;$$

elle est de la forme $\varphi(x-y) = 0$. Or, pour que cette équation soit vérifiée, il faut et il suffit que $x-y$ soit égal à l'une des racines de la fonction $\varphi(u)$. Par suite l'équation $\varphi(x-y) = 0$ est équivalente à un certain nombre d'équations de la forme $x - y = a$, ou $y = x - a$, $a$ désignant une constante. On voit alors aussitôt que la dérivée de $y$ par rapport à $x$ est égale à 1.

R. BOUVAIST.

Solutions analogues par MM. J. Haag; J. Maréchet, lycée de Saint-Etienne; P. Tribier; J. G. Nicolesco, à Bucarest.

---

**1190.** — *On donne une droite* $\Delta$ *dans le plan d'un triangle* ABC. *Un point* M *est mobile sur la droite* $\Delta$. *Étudier comment varie la somme*

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$$

*des carrés des distances du point* M *aux trois sommets du triangle. Cas particulier où la droite* $\Delta$ *passe par le centre de gravité du triangle* ABC.

Prenons comme axe des $x$ la droite $\Delta$ et comme axe des $y$ une droite quelconque perpendiculaire à $\Delta$; désignons par $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ les coordonnées des points A, B, C et par $x$ l'abscisse du point variable M qui décrit la droite $\Delta$. La fonction à étudier

$$u = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$$

peut alors s'écrire

$$u = (x-x_1)^2 + y_1^2 + (x-x_2)^2 + y_2^2 + (x-x_3)^2 + y_3^2,$$

ou

$$u = 3x^2 - 2x\Sigma x_1 + \Sigma(x_1^2 + y_1^2).$$

C'est un trinome du second degré dont on peut indiquer immédiatement les variations

| $x$ | $-\infty$ | croît | $\frac{\Sigma x_1}{3}$ | croît | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $+\infty$ | décroît | *min.* | croît | $+\infty$ |

La valeur du minimum est $\dfrac{3\Sigma(x_1^2 + y_1^2) - (\Sigma x_1)^2}{3}$.

Remarquons que $\dfrac{\Sigma x_1}{3}$ est l'abscisse du centre de gravité G du triangle. Il en résulte que la fonction $u$ est minimum quand le point M coïncide avec la projection P du point G sur la droite $\Delta$. De plus, à des positions du point M symétriques par rapport à P correspondent des valeurs égales pour la fonction.

Dans le cas particulier où la droite $\Delta$ passe par le point G, les résultats précédents subsistent; seulement le point P coïncide avec le point G, et la fonction $u$ est minimum quand le point M est au point G.

Tous ces résultats découlent immédiatement de la formule bien connue

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3\overline{MG}^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$

où $a$, $b$, $c$ désignent les longueurs des côtés BC, CA, AB du triangle, et M un point quelconque du plan. R. BOUVAIST.

Bonnes solutions par MM. J. Haag ; R. Javelot, à Givet ; E. N. Barisien ; I. G. Nicolesco, à Bucarest.

## CHIMIE

**1137.** — *On demande de préparer les corps suivants en prenant pour chaque expérience une molécule-gramme de mispickel ou arsénio-sulfure de fer natif, de formule* AsSFe :

1° *L'arsenic ;*

2° *L'arséniure d'hydrogène gazeux ;*

3° *Le trisulfure d'arsenic (autrement que par la combinaison directe de l'arsenic et du soufre) ;*

4° *L'anhydride arsénique.*

*Indiquer la marche des expériences, écrire les équations et calculer les poids des composés obtenus, sauf pour l'arséniure d'hydrogène dont on déterminera le volume sans faire de corrections.*

(*École Centrale, 1902, 1re session.*)

1° Le mispickel, calciné dans une cornue en présence de rognures de fer, se dédouble en sulfure de fer et arsenic :

$$AsSFe = As + FeS.$$

La vapeur d'arsenic se condense dans un récipient relié à la cornue. As représente 75gr.

2° L'arsenic, provenant de l'opération précédente et fondu dans un creuset avec du zinc, donne un alliage que l'on traite par l'acide sulfurique étendu dans un flacon bitubulé :

$$As^2Zn^3 + 3SO^4H^2 = 3SO^4Zn + 2AsH^3.$$

Le symbole $AsH^3$ représente 78gr et un volume moléculaire, c'est-à-dire $22^{lit}\frac{1}{4}$.

Autrement : le mispickel, grillé dans un moufle, donne des vapeurs d'anhydride arsénieux que l'on condense dans une chambre froide. Cet anhydride, placé ensuite dans un appareil à hydrogène, se convertit en hydrogène arsénié :

$$As^4O^6 + 12H^2 = 6H^2O + 4AsH^3.$$

3° L'anhydride provenant du grillage précédent est mis en dissolution chlorhydrique puis soumis à l'action d'un courant d'acide sulfhydrique. Il se forme un précipité d'orpiment :

$$As^4O^6 + 6H^2S = 6H^2O + 2As^2S^3.$$

Le molécule-gramme de mispickel fournit ainsi une demi-molécule de sulfure, soit 123gr.

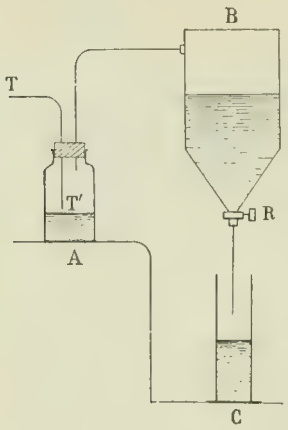
4° L'arsenic ou l'anhydride arsénieux, traités par l'eau régale, se transforment en acide arsénique ; celui-ci est déshydraté par l'action de la chaleur et transformé en anhydride $As^2O^5$ dont le poids est de 115gr par atome d'arsenic.

Solution incomplète de M. T. Lemoyne.

**1177.** — *Dans un flacon* A, *renfermant de l'eau distillée, on verse d'abord* 25cmc *d'une solution d'iode renfermant* 1gr,27 *de cet élément par litre, puis quelques gouttes d'empois d'amidon.*

*A l'aide d'un aspirateur à eau* B, *on fait ensuite passer, bulle à bulle, dans le flacon* A *le mélange gazeux provenant du grillage à l'air de pyrite de fer, jusqu'à ce que le liquide du flacon* A *soit décoloré.*

*A ce moment, on ferme le robinet* R *et on mesure le volume de l'eau qui a coulé de l'aspirateur dans l'éprouvette* C. *Ce volume est égal à* 250cmc. *On s'arrange d'ailleurs de telle sorte qu'au moment où*




*l'expérience commence, de même qu'à celui où elle prend fin, le gaz arrive exactement à l'extrémité* T' *du tube* TT'; *la distance de cette extrémité au niveau du liquide est suffisamment faible pour qu'on puisse, dans le calcul, négliger la différence de pression qui en résulte.*

*On a mesuré au moment de l'expérience :*

*La pression barométrique* : 730$^{mm}$. — *La température :* 15°.

*On demande :*

1° *Quelle est, en volume, la proportion de gaz sulfureux contenu dans le mélange gazeux.*

2° *Quel poids de pyrite de fer il faut griller pour obtenir* 10$^{mc}$ *de ce mélange gazeux, ce volume étant mesuré à la pression de* 730$^{mm}$ *et à la température de* 15°.

Renseignements numériques. — *Poids atomique du fer :* 56. — *Force élastique maxima de la vapeur d'eau à* 15° : 12$^{mm}$,7. — *On négligera la variation de densité de l'eau entre* 4° *et* 15°.

(*École des Mines de Saint-Étienne, 1902.*)

La solution d'iode renferme, par litre, 1270 milligrammes, soit 10 milli-atomes ou 5 milli-molécules; 25$^{cc}$ de cette solution renferment donc $\frac{25}{1000} \times 5 = \frac{1}{8}$ de milli-molécule d'iode.

Or la réaction qui se produit dans le flacon A est représentée par l'équation

$$SO^2 + I^2 + 2H^2O = SO^4H^2 + 2HI.$$

Donc l'acide sulfureux absorbé représente, comme l'iode, $\frac{1}{8}$ de milli-molécule. Ce gaz aurait, s'il était sec et dans les conditions normales, un volume égal à $\frac{1}{8}$ du volume moléculaire, soit $\frac{1}{8} \times 22^{cc},32$. A 15° et sous la pression 730, le volume serait $\frac{1}{8} \times 22,32 \times \frac{760}{730} \times \left(1 + \frac{15}{273}\right) = 3^{cc},064$.

Considérons maintenant le gaz recueilli dans l'aspirateur; il s'y est saturé de vapeur d'eau; s'il était sec, son volume serait 250$^{cc}$ à la pression $730 - 12,7 = 717,3$. Son volume à 15° et sous la pression 730 serait $250 \times \frac{717,3}{730} = 245,644$.

La proportion de gaz sulfureux en volume dans le mélange *supposé sec* est donc

$$\frac{3,064}{245,644 + 3,064} = \frac{1}{81} = 0,0123.$$

Le grillage d'une molécule de pyrite $FeS^2$ fournit deux molécules de gaz sulfureux. Pour obtenir les $245,644 + 3,064 = 248^{cc},7$ du mélange renfermant $\frac{1}{8}$ de milli-molécule de gaz sulfureux, il faut griller seulement $\frac{1}{16} FeS^2 = 7^{mgr},5$. Pour obtenir 10$^{mc}$, il faudra griller $\frac{10\,000\,000}{248,7} \times 7^{mgr},5 = 301^{gr},6$.

Assez bonnes solutions de MM. Vial et P. Canet.

## QUESTION PROPOSÉE

**1255.** — On considère un cercle C et un point A fixes. On prend sur le cercle C deux couples de points diamétralement opposés PP', QQ'. Enveloppe des droites PQ lorsque les couples de droites AP, AP'; AQ, AQ' ont les mêmes bissectrices.

E.-N. Barisien.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

14e Année. N° 2 Novembre 1903.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR L'EXPRESSION $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$,

par M. **G. Fontené.**

Cette note a été suggérée par des questions posées aux examens oraux de l'École Polytechnique.

**1.** Problème. — *Reconnaître si l'expression* $\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}$, *où l'on suppose* $B>0$, A *et* B *commensurables, est réductible à la forme* $a+\sqrt{b}$, *avec* $b>0$, $a$ *et* $b$ *commensurables.*

Si l'on a, de la manière indiquée,

$$(1)\qquad \sqrt[3]{A+\sqrt{B}} = a+\sqrt{b},$$

ou

$$A+\sqrt{B} = (a+\sqrt{b})^3,$$

on a aussi

$$A-\sqrt{B} = (a-\sqrt{b})^3,$$

et par suite

$$(2)\qquad \sqrt[3]{A-\sqrt{B}} = a-\sqrt{b};$$

formons un système équivalent.

1° On doit avoir, par multiplication,

$$(3)\qquad \sqrt[3]{A^2-B} = a^2-b,$$

d'où cette première condition : *la quantité* $A^2-B$ *doit être un cube parfait.*

2° On doit avoir aussi

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}} = 2a,$$

ou, en élevant au cube,

$$(4)\qquad (2a)^3-3\sqrt[3]{A^2-B}(2a)-2A = 0,$$

et il en résulte cette seconde condition : *l'équation* (4) *doit avoir une racine commensurable.* Si A et B sont entiers, $2a$ ne peut être qu'un entier positif ou négatif, diviseur de 2A. Quand la réduction demandée est possible, on obtient $a$ et $b$ par les équations (4) et (3).

**2.** Remarque. — Soit l'équation

$$(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\beta) = 0, \qquad 4\beta-\alpha^2>0.$$

L'ayant mise sous la forme

$$(5)\qquad x^3+(\beta-\alpha^2)x-\alpha\beta = 0,$$

on peut se proposer de retrouver, au moyen de la formule de Tartaglia, les expressions des racines telles que les donne l'équation primitive. Cette formule est ici

$$x = \omega\sqrt[3]{\frac{\alpha\beta}{2}+\sqrt{M}}+\omega^2\sqrt[3]{\frac{\alpha\beta}{2}-\sqrt{M}},$$

$$M = \left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta-\alpha^2}{3}\right)^3,$$

en désignant par $\omega$ l'une quelconque des trois racines cubiques de l'unité. Le fait que M est positif en même temps que la quantité $4\beta-\alpha^2$ conduit à développer M et à écrire

$$M = \frac{(\beta + 2\alpha^2)^2(4\beta - \alpha^2)}{4 \times 27};$$

les quantités sous les radicaux cubiques deviennent

$$\frac{\alpha\beta}{2} \pm \frac{\beta + 2\alpha^2}{6}\sqrt{\frac{4\beta - \alpha^2}{3}}.$$

Ces quantités doivent être les cubes d'irrationnelles de la forme $x \pm y\sqrt{\frac{4\beta - \alpha^2}{3}}$; on est amené à faire la transformation

$$\frac{4\beta - \alpha^2}{3} = \gamma^2, \qquad \text{ou} \qquad \beta = \frac{\alpha^2 + 3\gamma^2}{4},$$

qui donne

$$\left(\frac{\alpha \pm \gamma}{2}\right)^3;$$

on a donc

$$(6) \qquad x = \frac{1}{2}\left[\omega\left(\alpha + \sqrt{\frac{4\beta - \alpha^2}{3}}\right) + \omega^2\left(\alpha - \sqrt{\frac{4\beta - \alpha^2}{3}}\right)\right].$$

Pour $\omega = 1$, on obtient $\alpha$; etc.

---

## THÉORÈME RELATIF AUX CUBIQUES PLANES

par M. **Labrousse**, professeur au lycée de Toulouse.

Quelque temps après avoir reçu la note de M. J. Richard sur les cubiques planes (voir le n° d'Octobre 1903), nous recevions de M. Labrousse une démonstration simple du théorème dont il est question dans cette note. La note de M. Labrousse devait faire suite à celle de M. Richard : une erreur dans la composition du n° d'Octobre nous en a seule empêchés.

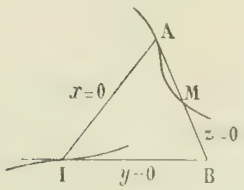
Voici la note de M. Labrousse :

Il existe de nombreuses démonstrations de la propriété suivante : *Le rapport anharmonique des quatre tangentes que l'on peut mener à une cubique par un point de cette courbe reste constant quand le point décrit la cubique.*

La démonstration basée sur l'emploi des fonctions elliptiques est immédiate, mais n'est pas élémentaire ; on ne peut considérer comme rigoureuse celle de Salmon (*Géométrie analytique. — Courbes planes*, page 206).

Mentionnons aussi la démonstration indiquée dans le *Traité des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (Appell et Goursat, page 293).

Voici une autre démonstration assez expéditive :




Soit I un point d'inflexion de la cubique $\Gamma$, M un point quelconque. Il suffit de montrer que le rapport anharmonique des quatre tangentes est le même pour les deux points M et I. Soit MA l'une des tangentes issues de M, A étant le point de contact. Prenons pour triangle de référence le triangle ayant pour côtés IA, la tangente IB en I à $\Gamma$ et MA. On voit facilement que l'équation de $\Gamma$ sera de la forme

$$x^2(ax + by) + yz(\alpha x + \beta y) + yz^2 = 0,$$

$ax + by = 0$ étant l'équation de IM.

On peut disposer du rapport de deux paramètres de référence au troisième de manière à rendre $\alpha$ et $\beta$ égaux à l'unité.

On peut donc prendre pour équation de $\Gamma$

$$x^2(x+by)+yz(\alpha x+y)+yz^2=0.$$

Cela posé, soit une droite D issue de I. Elle a une équation de la forme $y=\lambda x$; en dehors du point I elle coupe $\Gamma$ en deux autres points P et Q. Le faisceau AP, AQ a pour équation

(1) $$x^2(1+b\lambda)+\lambda xz(\alpha+\lambda)+\lambda z^2=0$$

La droite D sera tangente à $\Gamma$ si le premier membre de (1) est carré parfait, c'est-à-dire si on a

(2) $$\lambda^2(\alpha+\lambda)^2-4\lambda(1+b\lambda)=0.$$

L'équation (2) a pour racines les $\lambda$ des quatre tangentes issues de I et le rapport anharmonique de ces quatre tangentes est celui des racines de (2).

Considérons maintenant une droite $\Delta$ issue de M; son équation est de la forme

$$z=\mu x+by.$$

En dehors du point M elle coupe $\Gamma$ en P′ et Q′ qui vérifient successivement

$$x^2\frac{z}{\mu}+yz(\alpha x+y)+yz^2=0,$$

$$\frac{x^2}{\mu}+y(\alpha x+y)+yz=0,$$

(3) $$x^2+(\mu\alpha+\mu)xy+\mu(1+b\mu)y^2=0.$$

L'équation (3) est celle du faisceau IP′, IQ′.

La droite $\Delta$ sera tangente si le premier membre de (3) est carré parfait, c'est-à-dire si

(4) $$\mu^2(\alpha+\mu)^2-4\mu(1+b\mu)=0.$$

L'équation (4) a pour racines les $\mu$ des quatre tangentes issues de M et le rapport anharmonique de ces quatre tangentes est celui des racines de (4).

Les équations (2) et (4) étant identiques, la proposition, est établie.

## NOTE

Nous avons reçu d'un de nos correspondants une solution nouvelle de la question 1173, assez intéressante pour que nous revenions sur cette question. Nous nous empressons de publier cette solution.

(Voir n° de Septembre 1903).

*Le lieu des foyers des sections faites par un plan donné* P *dans les cônes de révolution* C *circonscrits à une quadrique donnée* S *se compose de trois coniques qui restent sur trois quadriques lorsque le plan* P *se déplace parallèlement à lui-même.*

Appliquons le théorème de Dandelin. Soit $\Sigma$ une sphère inscrite dans le cône C et tangente au plan P en F. Le point F est un foyer cherché.

La sphère $\Sigma$ et la quadrique donnée S sont bitangentes; de plus $\Sigma$ est une quelconque des sphères bitangentes à la quadrique S et tangentes au plan P car si on se la donne *a priori*, on pourra en déduire deux cônes circonscrits à la fois à S et à $\Sigma$ et qui seront par suite de révolution.

On est donc ramené au problème suivant :

*Étant donnés une quadrique* S *et un plan* P : 1° *Lieu des points de contact avec le plan* P *des sphères bitangentes à la quadrique* S *et tangentes au plan* P ; 2° *Surface engendrée par la courbe trouvée quand le plan* P *se déplace parallèlement à lui-même.*

Sous cette forme, la question est simple analytiquement ; nous allons montrer qu'elle l'est aussi géométriquement.

On sait que les sphères bitangentes à une quadrique se décomposent en trois familles. Les sphères d'une famille ont leurs centres dans un plan principal et coupent la quadrique suivant deux cercles dont les plans sont perpendiculaires au plan principal considéré. Nous considérerons l'une de ces familles.

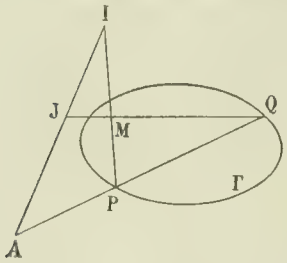
1° Le problème à traiter dans le plan P s'énonce ainsi :

*Soit* Γ *la section de la quadrique* S *par le plan* P. *Lieu des centres des cercles de rayon nul qui ont avec la conique* Γ *un système de sécantes communes de directions données.*

Il est un cas particulier du suivant :

*On a une conique* Γ *et trois points en ligne droite* I, J, A. *On mène par* A *une corde variable* PQ ; *on joint* IP, JQ *qui se coupent en* M, *lieu de* M.

C'est une question connue qu'on peut ramener à une question de géométrie descriptive en considérant la figure comme une projection horizontale : I et J étant les sommets de deux cônes ayant la conique Γ pour base commune et tels que la trace de la droite IJ sur le plan de la base se projette en A.




Le lieu du point M est la projection de la seconde courbe plane commune aux deux cônes, c'est-à-dire une conique tangente aux tangentes qu'on peut mener à la conique Γ par les points I et J.

Revenons à notre cas particulier. Dans le plan P le lieu cherché est une conique H homofocale à la conique Γ. Nous remarquerons, sans y insister, que ce résultat peut être obtenu comme cas particulier du suivant :

*Le lieu des centres des cercles de rayon donné qui ont avec une conique donnée un système de sécantes communes de directions données est une conique.*

Il s'agit de trouver la surface engendrée par la conique H quand le plan P se déplace parallèlement à lui-même.

Laissons d'abord le cône C fixe et faisons varier le plan P. Le lieu des foyers réels de la section se composera par raison d'homothétie de deux droites passant par le sommet $C_1$ du cône C qui se trouve sur la focale du plan principal choisi. Le lieu cherché est donc une surface réglée contenant cette focale.

Considérons l'une des deux droites passant par $C_1$ ; elle rencontre l'un des plans P en un point F. Prenons la sphère Σ inscrite dans le cône C et tangente au plan P en F. Il existera un second cône C′ circonscrit à la fois à la quadrique S et à la sphère Σ, qui, par suite est aussi de révolution et dont le sommet $C'_1$ se trouve sur la même focale par raison de symétrie.

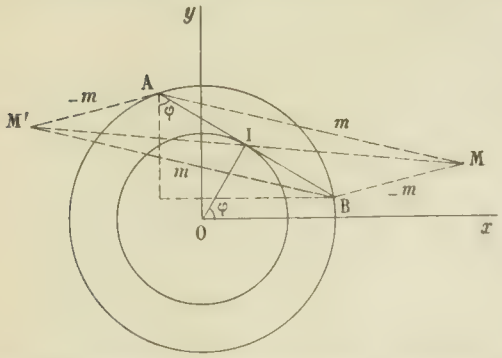
La section du cône C′ par le plan P admet aussi le point F pour foyer.

Donc l'une des deux génératrices de la surface cherchée passant par $C_1$ rencontre l'une des deux autres passant par $C'_1$. Il suffit alors de prendre trois de ces dernières droites et de faire varier le cône C pour avoir défini la surface comme lieu des droites rencontrant trois droites données. C'est donc une quadrique.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1176.** — *Par les extrémités d'une corde* AB *inscrite dans un cercle donné* O *et de longueur constante, on mène deux droites* AM, BM, *respectivement parallèles à deux droites fixes; trouver le lieu du point* M *d'intersection de* AM *et* BM.

Supposons d'abord que les deux directions données soient rectangulaires et prenons des axes parallèles à ces deux directions. L'équation du cercle étant $x^2 + y^2 = R^2$, les coordonnées du point A seront




$$x = R\cos t, \qquad y = R\sin t,$$

et celles du point B,

$$x = R\cos(t+\alpha), \qquad y = R\sin(t+\alpha),$$

$\alpha$ étant une certaine constante.

En menant par le point A une parallèle à $Ox$ et par le point B une parallèle à $Oy$, les coordonnées du point du lieu seront

$$x = R\cos(t+\alpha), \qquad y = R\sin t;$$

telles sont les équations du lieu en fonction d'un paramètre arbitraire $t$. A ce moment, nous développons $x$, nous remplaçons $R\sin t$ par $y$ et nous avons $\cos t = \dfrac{x + y\sin\alpha}{R\cos\alpha}$: ce lieu a donc pour équation

$$\frac{(x+y\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} + y^2 = R^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 + 2xy\sin\alpha = R^2\cos^2\alpha;$$

par suite, ce lieu est une ellipse ayant pour centre le centre du cercle et pour axes les bissectrices de l'angle des axes des coordonnées

Mais si les deux directions données ne sont pas rectangulaires, il y aura avantage à prendre pour axes deux parallèles aux bissectrices de l'angle de ces deux directions et à représenter les deux directions par $y = \pm mx$. Les coordonnées du point A étant toujours $R\cos t$, $R\sin t$, et celles du point B, $R\cos(t+\alpha)$, $R\sin(t+\alpha)$, le point du lieu sera à l'intersection des deux droites

$$y - R\sin t = m(x - R\cos t),$$
$$y - R\sin(t+\alpha) = -m(x - R\cos(t+\alpha)),$$

et l'on aura le lieu lui-même en éliminant $t$ entre ces deux équations, ou en résolvant par rapport à $x$ et à $y$; les deux équations sont linéaires en $\cos t$ et $\sin t$, elles peuvent s'écrire

$$mR\cos t - R\sin t + y - mx = 0,$$
$$(mR\cos\alpha + R\sin\alpha)\cos t - (mR\sin\alpha - R\cos\alpha)\sin t - y - mx = 0.$$

et donnent

$$\frac{R\cos t}{y + mx + (m\sin\alpha - \cos\alpha)(y - mx)} = \frac{R\sin t}{m(\cos\alpha + \sin\alpha)(y - mx) + m(y + mx)} = \frac{1}{m\cos\alpha - \sin\alpha - m(m\sin\alpha - \cos\alpha)}.$$

Il n'y a plus qu'à exprimer que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ pour avoir l'équation ordinaire du lieu. On voit immédiatement que ce nouveau lieu est encore une ellipse ayant son centre à l'origine, c'est-à-dire au centre du cercle donné. En développant les calculs, on trouve aisément que l'équation est de la forme

$$Ax^2 + By^2 + C = 0.$$

Cette ellipse a donc pour axes les axes des coordonnées.

Cette solution était déjà rédigée quand nous avons reçu de M. E.-N. Barisien une solution plus élégante et que voici.

Soient $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ les coordonnés des points A et B: les équations des droites AM et BM sont

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$
$$y - y_2 = -m(x - x_2);$$

de là nous déduisons

$$2mx = m(x_1 + x_2) + y_2 - y_1,$$
$$2y = y_1 + y_2 + m(x_2 - x_1).$$

Or, en désignant par $\varphi$ l'angle du rayon de contact de la corde AB avec le cercle qu'elle enveloppe et par R′ le rayon de ce cercle, nous avons de suite

$$x_1 + x_2 = 2R' \cos \varphi,$$
$$y_1 + y_2 = 2R' \sin \varphi,$$
$$x_2 - x_1 = 2l \sin \varphi,$$
$$y_2 - y_1 = -2l \cos \varphi.$$

$2l$ étant la longueur fixe de la corde AB. Par suite,

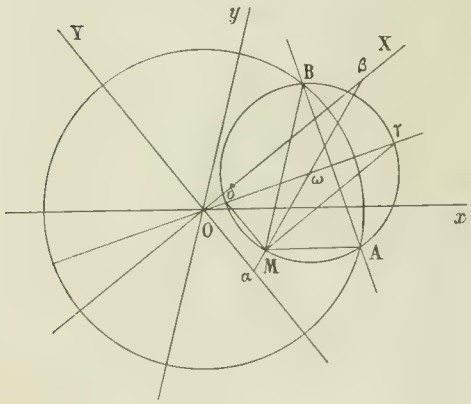
$$mx = (mR' - l) \cos \varphi,$$
$$y = (R' + lm) \sin \varphi;$$

l'élimination de $\varphi$ est immédiate et l'équation du lieu est

$$\frac{m^2x^2}{(mR' - l)^2} + \frac{y^2}{(R' + lm)^2} = 1.$$

En changeant $m$ en $-m$, on a le lieu obtenu par l'échange des deux directions, c'est-à-dire le lieu de l'autre sommet du parallélogramme construit sur AB. Entre R′ et $l$ on a d'ailleurs la relation $R'^2 + l^2 = R^2$.

Bonnes solutions : MM. Marchal; Bouvaist; J. Haag, à Nancy; Pellion, à Rennes; Javelot, à Givet.




**Solution géométrique.** — Soient $Ox$ et $Oy$ les deux directions données, OY, OX leurs bissectrices, $\omega$ le cercle circonscrit au triangle AMB.

Comme le côté AB et l'angle AMB sont constants, il en est de même du rayon $\omega M$ et de la longueur $O\omega$. Soient $\alpha$ et $\beta$ les intersections de $\omega M$ avec OX et OY, $\gamma$ et $\delta$ les intersections de $O\omega$ avec le cercle $\omega$.

Nous avons $M\beta = O\gamma$, $M\alpha = O\delta$ puisque $M\gamma$ et $M\delta$ sont parallèles à OX et OY. Comme $O\gamma$ et $O\delta$ sont constants, le point M décrit une ellipse ayant pour axes OX et OY et pour longueurs d'axes $2O\gamma$ et $2O\delta$.

R. BOUVAIST.

## PHYSIQUE

**1195.** — *Un projectile de fer étant arrêté net par une plaque de blindage, à quelle température, au maximum, peut-il être porté par le choc, si on lui suppose une vitesse initiale de* $700^m$ *par seconde ? Chaleur spécifique du fer* 0,13.

Admettons que toute la force vive du projectile soit convertie en chaleur et que toute cette chaleur reste sur le projectile; cette hypothèse nous donnera évidemment la température cherchée.

On peut traiter le problème avec divers systèmes d'unités.

1° Système : mètre, kilogramme-poids, seconde.

Si $m$ est le nombre de kilogrammes que pèse le projectile, sa masse est exprimée par le nombre $\frac{m}{981}$; sa demi force-vive en *kilogrammètres* est

$$\frac{1}{2} \frac{m}{9,81} \overline{700}^2,$$

et le nombre de calories équivalentes, avec 425 pour équivalent mécanique de la grande calorie, est

$$\frac{1}{2}\,\frac{m}{9{,}81}\,\overline{700}^2\,\frac{1}{425}.$$

Écrivons que cette chaleur élèverait de $x^0$ la température de $m$ kilogrammes de fer.

$$m.\,0{,}13x = \frac{1}{2}\,\frac{m}{9{,}81}\,\overline{700}^2\,\frac{1}{425},$$

d'où

$$x = 452^0.$$

2° Système C. G. S.

Si M est la masse du projectile en grammes, sa demi-force vive en *ergs* est

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{M}.\,\overline{70000}^2.$$

La petite calorie équivaut à $4{,}17 \times 10^7$ ergs et l'équation doit s'écrire

$$\mathrm{M}.\,0{,}13x = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}.\,\overline{70000}^2\,\frac{1}{4{,}17 \times 10^7}.$$

Le résultat, bien entendu, reste le même.

## QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

### ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1903, *fin*).

#### V. — Géométrie Descriptive.

**3654.** — On donne les projections de trois points O, F, M. Le point O est le centre d'une ellipse, F un de ses foyers, M un point de la courbe. Déterminer les projections de cette courbe.

**3655.** — On donne les projections de la directrice d'une parabole et de son foyer. Construire les projections de cette courbe. Même question en supposant la parabole définie par son sommet et son foyer.

**3656.** — On donne les projections des quatre sommets A, B, C, D d'un tétraèdre. Construire la hauteur issue du sommet D.

**3657.** — Etant données les projections d'un tétraèdre SABC dont la face ABC est dans le plan horizontal, construire la perpendiculaire commune aux arêtes SA et BC.

**3658.** — Construire un tétraèdre SABC connaissant les arêtes BC, CA, AB et les dièdres correspondants à ces arêtes. Faire l'épure en supposant le plan ABC horizontal.

**3659.** — On donne trois points M, F, F' de cotes 2, 4 et 5. Construire l'ellipse dont les foyers sont F, F' et passant par le point M.

**3660.** — Par un point d'un plan, mener dans ce plan une droite de pente donnée. Discuter.

**3661.** — Par une droite, mener un plan de pente donnée. Discuter.

**3662.** — Un tétraèdre SABC a sa face ABC dans le plan horizontal ; couper ce tétraèdre par un plan de manière que la section soit un triangle équilatéral.

**3663.** — Construire les projections d'une hyperbole connaissant les projections d'un foyer, de la directrice correspondante et d'un point.

**3664.** — On donne les projections des quatre sommets d'un tétraèdre ; trouver l'angle des plans de deux faces.

**3665.** — Plus courte distance de deux droites parallèles au deuxième bissecteur.

**3666.** — Faire tourner un point d'un angle donné autour d'un axe donné.

**3667.** — Etant données les projections d'un trièdre, trouver le plan bissecteur d'un dièdre.

**3668.** — Intersection d'une droite graduée avec un cône droit dont la directrice est dans le plan de cote zéro et dont le sommet est de cote 5.

**3669.** — On donne un cercle de centre O dans un plan horizontal. Sur la verticale du point O, on prend deux points S et $S_1$ symétriques par rapport au point O. Ce sont les sommets de deux cônes dont le cercle est la base commune. Ombres portées par les deux cônes sur le plan horizontal du sommet le plus bas, les rayons lumineux émanant d'un point situé dans le plan horizontal de l'autre sommet.

**3670.** — On donne une circonférence qui forme les projections d'une conique située dans le deuxième bissecteur ; on donne de plus un point par ses deux projections. Mener au cône ayant le point donné pour sommet et la conique donnée pour base, un plan tangent perpendiculaire à un plan donné.

**3671.** — On donne les projections de quatre points A, B, C, D. On considère les cercles circonscrits aux triangles ABC et ABD. Trouver les sommets des cônes passant par ces deux cercles.

**3672.** — On donne un cylindre de révolution à axe vertical. Par un point de l'axe on mène une droite D. Par cette

droite D et un point S passe un plan dont on demande l'intersection avec le cylindre. Le cylindre ainsi tronqué est éclairé par des rayons lumineux passant par le point S. Ombre portée sur les deux plans de projection.

**3673.** — Une conique située dans un plan défini par deux droites est donnée par sa projection horizontale. C'est la directrice d'un cône dont on donne le sommet. Trouver le contour apparent vertical de ce cône.

**3674.** — Un cône est défini par sa base circulaire dans le plan horizontal et son sommet. On considère le cône supplémentaire et on demande de mener à ce cône des plans tangents par un point et de trouver les points de rencontre de ce cône et d'une droite. En particulier, contours apparents du cône supplémentaire.

**3675.** — Contours apparents d'un cône dont on donne le sommet et dont la base est une circonférence située dans un plan et donnée par son rabattement sur le plan horizontal.

**3676.** — Un cercle O est situé dans le plan horizontal de cote 10. Il est la base d'un cône de révolution à axe vertical dont les génératrices font avec le plan horizontal un angle de 45°, ce sommet étant au-dessous du plan de cote 10. Intersection de ce cône avec un plan donné par sa ligne de pente.

**3677.** — Construire un cône connaissant sa base (une conique du plan horizontal) et trois points.

**3678.** — Construire un cylindre connaissant sa base (une conique du plan horizontal) et deux points.

**3679.** — Un cylindre de révolution a son axe dans le plan horizontal ; un cône est défini par sa base qui est un cercle dans le plan horizontal et son sommet dont la cote est 3. Intersection des deux surfaces.

**3680.** — On donne un cône ayant pour base une ellipse dans un plan horizontal et un point S extérieur au cône. Déterminer un cône ayant le point S pour sommet et tel que son intersection avec le premier cône présente un point de rebroussement.

**3681.** — Intersection de deux cônes ayant leurs sommets dans le plan horizontal et pour bases des ellipses situées dans des plans verticaux et ayant leurs grands axes dans le plan horizontal.

**3682.** — Intersection de deux cylindres ayant chacun leurs génératrices de front et pour bases deux hyperboles équilatères dont l'une a une asymptote parallèle à la ligne de terre et dont l'autre a ses axes parallèles aux asymptotes de la première. Le centre de la seconde est sur l'asymptote de front de la première.

**3683.** — On donne un cylindre hyperbolique par sa base dans un plan horizontal et la direction des génératrices. On donne de plus la base d'un cône qui est un cercle dans le plan horizontal. Comment doit être le sommet du cône pour qu'il y ait deux asymptotes parallèles ?

**3684.** — Intersection d'un cône et d'un cylindre ayant comme base commune un cercle dans le plan horizontal ?

**3685.** — Intersection de deux cylindres, l'un à base circulaire dans un plan horizontal et à génératrices quelconques, l'autre à base elliptique dans un plan de front et à génératrices horizontales.

**3686.** — Intersection de deux cônes ayant pour base commune une conique située dans un plan donné par deux droites et définie par sa projection verticale.

**3687.** — Intersection de deux cylindres dont les bases sont des cercles dans le plan de cote zéro et dont on donne les génératrices graduées.

**3688.** — Intersection de deux cônes dont les bases sont des cercles dans le plan de cote zéro et dont on donne les sommets par leurs projections et leurs cotes.

**3689.** — Intersection de deux cônes ayant pour base commune une conique située dans le deuxième bissecteur.

**3690.** — On donne un cylindre hyperbolique ayant pour base une hyperbole dans un plan de front et dont les génératrices sont horizontales. On prend un point sur l'axe ; c'est le sommet d'un cône ayant pour base une circonférence située dans le plan de front de l'hyperbole et passant par son centre. Intersection des deux surfaces. Branches infinies.

**3691.** — Construire le cône circonscrit de sommet donné à une surface de révolution engendrée par une circonférence de front tournant autour d'un axe de front.

**3692.** — Un cercle horizontal tourne autour d'un axe de front, et engendre une surface. On donne la projection verticale d'un point de la surface ; trouver la projection horizontale et le plan tangent. Trouver la méridienne principale.

**3693.** — On donne deux points A et B et une horizontale H. Construire une sphère passant par le point B et tangente en A au plan déterminé par ce point et l'horizontale H.

**3694.** — Par un point M d'une sphère, on mène une droite quelconque. En supposant que cette droite soit un rayon lumineux, trouver le rayon réfléchi.

**3695.** — Construire une sphère tangente aux plans de projection et passant par deux points.

**3696.** — Un cylindre de révolution est défini par son axe et un point. 1° Etant donnée la projection horizontale d'un point de ce cylindre, trouver la projection verticale et le plan tangent. 2° Mener à ce cylindre les plans tangents par un point ou parallèles à une droite. 3° Intersection avec une droite. 4° Section par le deuxième bissecteur.

**3697.** — Mêmes problèmes pour un cône de révolution défini par son axe, son sommet et un point.

**3698.** — On donne deux droites qui se coupent ; on fait tourner l'une autour de l'autre. Trouver l'intersection du cône ainsi engendré avec une droite quelconque. Mener à ce cône des plans tangents par un point extérieur.

**3699.** — Mener par une droite donnée un plan faisant un angle donné avec une autre droite donnée. Discussion.

**3700.** — Construire une horizontale s'appuyant sur une verticale donnée, rencontrant une autre droite donnée et faisant avec celle-ci un angle donné.

**3701.** — Construire une horizontale rencontrant deux droites données et faisant avec elles des angles égaux.

**3702.** — On donne un plan par sa ligne de pente, et une droite par sa projection cotée. Construire un cône de révolution ayant cette droite pour axe et tangent au plan.

**3703.** — On donne une verticale et une ligne de bout qui ne se rencontrent pas. Mener par un point un plan faisant avec chacune de ces droites un angle donné.

**3704.** — Construire un cône de révolution tangent à un cylindre de révolution dont l'axe est de front, connaissant le sommet et l'axe du cône.

**3705.** — Cône circonscrit à une sphère ayant pour sommet un point donné. Foyers de la trace horizontale de ce cône. Asymptotes de cette conique.

**3706.** — Mener à une sphère un plan tangent faisant un angle donné avec le plan horizontal.

**3707.** — On donne un cône de révolution par son sommet et les contours apparents d'une sphère inscrite ; existe-t-il un cylindre de révolution tangent à ce cône et admettant pour axe une droite donnée ?

**3708.** — Section par un plan de front de la surface gauche engendrée par une droite quelconque tournant autour d'une horizontale.

**3709.** — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical avec un plan passant par la ligne de terre et un point. Nature de la section.

**3710.** — Une surface gauche de révolution est définie par son axe vertical et une génératrice quelconque. Déterminer la nature de la courbe de contact du cône circonscrit ayant pour sommet un point donné.

**3711.** — On donne une surface gauche de révolution dont l'axe est de bout et une génératrice horizontale. Mener à cette surface un plan tangent parallèle à un plan donné.

**3712.** — Contours apparents d'une surface gauche engendrée par une ligne de front tournant autour d'une autre ligne de front.

**3713.** — Construire un hyperboloïde de révolution connaissant deux génératrices de front et un point de l'axe.

**3714.** — Une verticale tourne autour d'une droite quelconque. Contour apparent vertical de la surface engendrée. Point quelconque de la surface et plan tangent.

**3715.** — Etant données deux droites quelconques, l'une d'elles tourne autour de l'autre et engendre un hyperboloïde. Déterminer le contour apparent horizontal.

**3716.** — Un hyperboloïde de révolution est défini par son cercle de gorge horizontal et une génératrice de front F. Une seconde droite D parallèle à F est située dans le plan de front de l'axe. On fait tourner F autour de D, elle engendre un cylindre. Intersection de ce cylindre et de l'hyperboloïde.

**3717.** — Une droite Δ tourne autour d'une droite de front F. On prend un point A sur Δ, trouver la seconde génératrice de la surface qui passe par le point A.

**3718.** — On considère un hyperboloïde engendré par la rotation d'une droite quelconque autour d'une droite de front. Mener par un point un plan tangent dont le point de contact soit sur un parallèle donné.

**3719.** — Trace horizontale du cône circonscrit à un hyperboloïde de révolution dont l'axe est vertical.

**3720.** — On donne un cône de révolution à axe de front par ses deux génératrices de contour apparent vertical. Intersection avec une sphère qui a son centre sur l'une de ces génératrices et qui est tangente à l'autre.

**3721.** — Un hyperboloïde est défini par un cercle dans le plan horizontal, une génératrice verticale et une autre génératrice de même système ; trouver le point de contact du plan tangent de bout passant par cette seconde génératrice. Section de la surface par un plan de bout. Centre de la surface.

**3722.** — On donne un cône de révolution à axe de front; on lui fait subir une translation. Intersection des deux cônes.

**3723.** — On donne trois droites dont une est verticale. Intersection de l'hyperboloïde qu'elles définissent avec une droite quelconque.

**3724.** — Ombre sur les plans de projections de deux demi-sphères : l'une repose sur le plan horizontal par son grand cercle, l'autre est tangente à celle-ci en son point le plus haut, de manière que son grand cercle soit horizontal.

**3725.** — On donne un cône par son sommet et sa directrice qui est un cercle horizontal. C'est le cône asymptote d'un hyperboloïde dont on donne un point. Construire le plan tangent en ce point. Deuxième direction de plans cycliques.

**3726.** — Ombre propre d'un paraboloïde de révolution à axe vertical, limité par un cercle horizontal, les rayons lumineux étant parallèles.

**3727.** — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical ; on mène la normale à la méridienne de front en un point M, et on construit une sphère tangente en M au paraboloïde. Intersection des deux surfaces.

**3728.** — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical et d'un cône ayant pour sommet un point donné et pour directrice la section de l'ellipsoïde par un plan de bout.

**3729.** — Un cône a pour base un cercle dans le plan horizontal, et l'une de ses génératrices de contour apparent vertical est verticale. Sur la seconde génératrice de contour apparent vertical on prend un point qui est le centre d'une sphère de rayon donné. Intersection des deux surfaces.

**3730.** — On coupe une sphère par un plan quelconque passant par son centre et on ne conserve que l'hémisphère inférieur. Ombre de cet hémisphère sur les plans de projection, les rayons lumineux passant par un point.

**3731.** — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical et d'un plan quelconque.

**3732.** — Une sphère est tangente au plan horizontal ; une autre sphère de rayon plus petit est tangente extérieurement à la première en son point le plus haut. Ce système est éclairé par un point lumineux situé dans le plan horizontal tangent au point le plus haut de la petite sphère. Ombres portées de ces deux sphères sur les plans de projection.

**3733.** — Intersection d'une sphère et d'un cône du deuxième degré ayant un plan de symétrie commun.

**3734.** — Intersection d'un tore à axe vertical et d'un cône de révolution ayant pour base l'une des circonférences du tore situées dans le plan de front de l'axe.

**3735.** — Intersection d'un tore à axe vertical avec un cône de révolution tangent au tore et ayant son sommet sur le tore.

**3736.** — On donne un parallélogramme ABCD. On fait tourner AB autour de la diagonale AC, et AC autour de CD. Intersection des deux cônes obtenus.

**3737.** — Plan tangent parallèle à un plan donné à un hyperboloïde de révolution à axe vertical. Plans tangents par une droite.

**3738.** — Un hyperboloïde est défini par un cercle dans le plan horizontal, une génératrice verticale et une autre génératrice de même système. Trouver le centre de la surface. Section par un plan de bout.

**3739.** — Construire une horizontale rencontrant trois droites données.

**3740.** — On donne un cercle dans un plan horizontal ; c'est la directrice d'un cône de sommet donné. D'un point de l'espace on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices (ou sur les plans tangents) du cône. Construire la courbe, lieu des projections. Déterminer un point et la tangente.

**3741.** — On donne une sphère tangente au plan horizontal de cote zéro et dont le centre a pour cote 2. Intersection de cette sphère et d'un cône dont la base est un cercle dans le plan horizontal et dont le sommet a pour cote 5.

**3742.** — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical, une droite Δ passant par son centre et un point S. On

considère la portion de la surface située au-dessous du plan défini par S et Δ. En supposant le point S lumineux, déterminer l'ombre sur les plans de projection de cette partie de l'ellipsoïde.

**3743.** — Intersection d'un hémisphère reposant sur le plan horizontal avec un cône de révolution ayant son axe dans le plan horizontal.

**3744.** — Intersection de deux cylindres de révolution dont les axes sont dans le plan horizontal.

**3745.** — On définit un hyperboloïde par trois droites dont une verticale ; intersection de cette surface : 1° avec une droite verticale ; 2° avec un plan vertical.

**3746.** — Si les normales à une surface rencontrent une droite fixe la surface est de révolution.

**3747.** — On donne un paraboloïde hyperbolique par deux génératrices et un plan directeur de front. Mener par une verticale donnée un plan coupant ce paraboloïde suivant une hyperbole équilatère. Asymptotes de la section.

**3748.** — Cône circonscrit à un ellipsoïde de révolution d'axe vertical.

**3749.** — Intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont dans le plan horizontal.

**3750.** — Intersection d'un hémisphère reposant sur le plan horizontal avec un cylindre de révolution dont l'axe est dans le plan horizontal.

**3751.** — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices A et B et par un plan directeur horizontal avec un cône ou un cylindre passant par la génératrice A et ayant une base circulaire horizontale. Nature de l'intersection. Points où cette intersection rencontre la génératrice commune A.

**3752.** — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical et un cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal et son sommet sur l'hyperboloïde. Intersection de deux surfaces. Tangentes au point double.

**3753.** — Intersection d'un hémisphère reposant sur le plan horizontal et d'un cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal.

**3754.** — On donne deux droites perpendiculaires dans le plan horizontal et une verticale passant par leur point de rencontre O. A partir de ce point on porte sur ces droites des longueurs données $a$, $b$, $c$ ; ce sont les trois axes d'un ellipsoïde. Trouver les sections cycliques de cette surface.

**3755.** — On considère deux génératrices de même système G et $G_1$ d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical. On demande l'intersection de cette surface et d'un autre hyperboloïde défini par les deux droites G, $G_1$ et une autre droite Δ.

**3756.** — On donne un triangle quelconque ABC. On fait tourner AB autour de BC, et BC autour de AC. Intersection des deux cônes engendrés.

**3757.** — On donne deux droites parallèles AC et BD coupées par une sécante AB faisant avec elles 45°. On fait tourner AC autour de AB et AB autour de BD. Intersection des deux cônes engendrés.

**3758.** — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et d'une sphère tangente en un point donné à cet hyperboloïde. Tangentes au point double.

**3759.** — On donne trois droites quelconques dans l'espace ; trouver le contour apparent horizontal de l'hyperboloïde qu'elles déterminent.

**3760.** — On donne un cône de révolution à axe vertical de sommet S. On considère les génératrices de contour apparent vertical SA et SB qui rencontrent le plan horizontal en A et B. On fait tourner autour de son axe la parabole qui a pour foyer B et pour tangente au sommet AS. Intersection du cône et du paraboloïde engendré.

**3761.** — On donne un paraboloïde de révolution dont l'axe est vertical et un point S dans le plan de front de l'axe. Par le point S on mène une tangente ST à la parabole méridienne principale, et on joint S au foyer F de cette parabole. La droite ST tournant autour de SF engendre un cône de révolution. Intersection de ce cône et du paraboloïde.

**3762.** — On donne une sphère et un cône de révolution circonscrit dont le sommet S est dans le plan de front du centre et sur la verticale tangente à gauche au contour apparent vertical de la sphère. Intersection de ce cône avec un cylindre de révolution engendré par la verticale du centre de la sphère tournant autour d'une verticale.

**3763.** — Intersection d'un tore dont l'axe est vertical et d'une sphère bitangente. Traiter la question analytiquement.

**3764.** — On donne un ellipsoïde dont deux des plans principaux sont parallèles aux plans de projection. Trouver les sections de bout qui se projettent horizontalement suivant des cercles. Cela fait, trouver l'intersection de cet ellipsoïde et d'un paraboloïde de révolution à axe vertical.

**3765.** — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices. Déterminer : 1° le sommet ; 2° le plan tangent parallèle au bissecteur du deuxième dièdre ; 3° le plan tangent parallèle au premier bissecteur ; 4° la projection verticale d'un point et le plan tangent en ce point, connaissant la projection horizontale ; 5° l'ombre portée par la surface sur le plan horizontal, les rayons lumineux étant issus d'un point ou parallèles à une droite ; 6° la section par un plan de bout et les asymptotes de l'intersection ; 7° le pôle d'un plan vertical.

**3766.** — On donne une verticale et une droite quelconque ; quelle est la surface engendrée par des horizontales s'appuyant sur les deux droites ? Trouver le second plan directeur. Etant donnée la projection horizontale d'un point de la surface, trouver la projection verticale et le plan tangent.

**3767.** — Mener à une surface topographique un plan tangent par une droite.

**3768.** — Tracer sur une surface topographique un chemin de pente constante reliant deux points. Doit-on prendre pour pente arbitraire une pente plus grande ou plus petite que celle de la droite joignant les deux points ?

## VI. — Cinématique.

**3769.** — Une hyperbole est décrite par un point d'un mouvement uniforme. Etudier le mouvement ; calculer l'accélération.

**3770.** — Mouvement rectiligne d'un point dont l'accélération est proportionnelle au carré de la vitesse.

**3771.** — Mouvement vibratoire simple. Si l'accélération est proportionnelle à l'abscisse, le coefficient de proportionnalité étant négatif, le mouvement est vibratoire simple.

**3772.** — Une roue tourne autour de son axe, avec une vitesse de cent tours à la minute, d'un mouvement uniforme. Un point de cette roue a-t il une accélération ? La calculer sachant que le rayon de la roue est égal à deux mètres.

**3773.** — Un disque D situé dans un plan vertical tourne d'un mouvement uniforme autour d'un de ses points P. On

mène à ce disque une tangente verticale qui rencontre une droite fixe $\Delta$ en un point M. Etudier le mouvement du point M. Examiner les cas particuliers où le point P vient sur la circonférence du disque ou au centre du disque.

**3774.** — Démontrer que si le mouvement d'un point est à accélération centrale, et que l'on fasse tourner de $\frac{\pi}{2}$ l'hodographe prise par rapport au centre des accélérations, on obtient une figure qui est la polaire réciproque de la trajectoire par rapport à un cercle ayant son centre au centre des accélérations.

**3775.** — Les extrémités A et B d'une droite de longueur constante décrivent, le point A, une droite, et le point B, un cercle ayant son centre sur la droite. Sachant que le point B a un mouvement uniforme de rotation, trouver le mouvement du point A.

**3776.** — Etudier le mouvement rectiligne d'un point sachant qu'entre la vitesse $v$ et l'accélération $\gamma$ on a la relation $\gamma = -g\left(1 + \frac{v}{a}\right)$.

**3777.** — Etudier le mouvement d'un point qui décrit une parabole de telle sorte que la projection du point sur l'axe ait un mouvement uniforme.

**3778.** — On considère un point qui se déplace sur une circonférence de façon qu'à chaque instant l'accélération tangentielle soit proportionnelle à la vitesse. Etudier le mouvement du point.

**3779.** — Un point se déplace sur une droite fixe avec une accélération $k\sqrt{v}$, $k$ étant une constante et $v$ la vitesse. Etudier le mouvement.

**3780.** — Deux points M et $M_1$ se meuvent respectivement sur deux droites fixes D et $D_1$ non situées dans un même plan, avec des mouvements uniformément accélérés. Par un point fixe O de l'espace on mène un segment OP équipollent à $MM_1$. Etudier le mouvement du point P.

**3781.** — Etudier le mouvement $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, $y = B\cos(\omega t + b)$.

**3782.** — Etudier le mouvement $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Accélération. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

**3783.** — Etudier le mouvement d'un point se déplaçant sur une droite de sorte que l'accélération soit proportionnelle à l'espace.

**3784.** — On donne deux cercles dans des plans parallèles. Deux points A et B se déplacent sur ces cercles d'un mouvement uniforme. Lieu de la droite AB.

**3785.** — On définit un mouvement par les équations $\rho = \varphi(t)$, $\omega = \psi(t)$, $\rho$ et $\omega$ désignant les coordonnées polaires d'un point et $t$ le temps. Déterminer la vitesse et l'accélération.

**3786.** — Deux points M et $M_1$ se meuvent avec des mouvements uniformes de vitesses $v$ et $v_1$ sur deux droites D et $D_1$ non situées dans un même plan. Chercher le lieu de la droite $MM_1$ joignant les positions de ces points à un même instant.

**3787.** — On donne deux droites dans l'espace. Sur l'une se déplace un point M, animé d'un mouvement uniforme. Sur l'autre se déplace un point $M_1$ dont le mouvement est uniformément varié. Trouver le mouvement du centre de gravité et le lieu de la droite $MM_1$.

**3788.** — On donne une barre rigide qui s'appuie sur deux droites rectangulaires $Ox$ et $Oy$. L'extrémité située sur $Ox$ se déplace sur $Ox$ d'un mouvement uniforme. Etudier le mouvement d'un point quelconque de la barre.

**3789.** — Une courbe est décrite par un point avec une accélération passant toujours par un point fixe O. En appelant $r$ le rayon vecteur OM, on demande de calculer $\frac{dv^2}{dr}$.

**3790.** — Un point décrit une hélice d'un mouvement uniforme, trouver l'accélération et en déduire le rayon de courbure.

**3791.** — Etudier le mouvement du centre de gravité de deux points dont l'un décrit un cercle d'un mouvement uniforme et l'autre une droite également d'un mouvement uniforme. La droite n'est pas située dans le plan du cercle.

**3792.** — Un point décrit la courbe $\rho^2 = a^2\cos 2\omega$ avec une vitesse constante. Calculer son accélération.

**3793.** — Un point décrit une certaine trajectoire. En un point M de cette courbe, on construit l'accélération en ce point, elle est représentée par le vecteur MG. Trouver le lieu du point G et le lieu de la droite MG.

**3794.** — Dans deux plans rectangulaires on donne deux cercles parcourus par deux points d'un mouvement uniforme avec une même vitesse angulaire. Etudier le lieu et le mouvement du centre de gravité des deux points.

**3795.** — Etudier le mouvement $x = a\sin^2(\omega t + \alpha)$, $y = b\sin^2(\omega t + \beta)$.

**3796.** — Etudier le mouvement rectiligne dans lequel l'accélération $\gamma$ est liée à la vitesse $v$ par la relation

$$\gamma = k\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right).$$

**3797.** — Etudier le mouvement d'un point décrivant une parabole de telle sorte que la projection du point sur l'axe ait un mouvement uniformément accéléré. Accélération.

**3798.** — Même problème en supposant que la projection du point sur la tangente au sommet a un mouvement uniformément accéléré.

**3799.** — Tous les éléments d'un cercle attirent un point fixe en fonction de leur distance à ce point. Calculer la résultante.

**3800.** — Un point décrit une ellipse d'un mouvement uniforme, calculer son accélération. En déduire le rayon de courbure.

**3801.** — Mouvement d'un point sur une droite, l'accélération étant proportionnelle à l'espace parcouru.

**3802.** — Un segment de droite AB de longueur constante se déplace de manière que le point A décrive $Ox$ d'un mouvement uniforme de vitesse $v$, et que le point B décrive $Oy$, les axes étant rectangulaires. Trouver la vitesse d'un point M de la droite AB. Enveloppe du vecteur vitesse quand, AB étant fixe, M prend toutes les positions possibles sur AB.

## VII. — Dynamique.

**3803.** — Le travail d'une force appliquée en un point tournant autour d'un axe d'un angle $d\theta$ est égal au moment de la force par rapport à l'axe multiplié par $d\theta$.

**3804.** — Etudier le mouvement d'un point matériel pesant assujetti à décrire une circonférence située dans un plan vertical.

**3805.** — Etudier le mouvement d'un point matériel pesant assujetti à décrire une hélice tracée sur un cylindre vertical, ce point étant repoussé par un point de l'axe du cylindre proportionnellement à la distance.

**3806.** — Sous l'action d'une force centrale, un point décrit une courbe; l'hodographe est une conique. Quelle est la courbe décrite par le point. Propriétés des forces centrales. Démontrer que la vitesse aréolaire est constante.

**3807.** — A quelle hauteur peut s'élever dans le vide un projectile pesant lancé dans une direction donnée avec une vitesse donnée ?

**3808.** — Etudier le mouvement d'un point M soumis à l'action de deux forces dont l'une est verticale, dirigée de haut en bas et d'intensité constante et dont l'autre passe par un point fixe O et est proportionnelle à OM.

**3809.** — On se trouve dans un train qui parcourt 60 kilomètres à l'heure. Un chapeau tombe par une portière, où tombera-t-il ? Pourra-t-on le rattraper en admettant qu'un marchepied longe le train.

**3810.** — Mouvement des projectiles dans le vide. Relation entre le rayon de courbure en un point de la trajectoire et l'angle de la normale en ce point avec la verticale.

**3811.** — On donne une droite $\Delta$ et un point O sur cette droite. Un point pesant abandonné sans vitesse initiale au point O se déplace sur $\Delta$ et occupe au bout du temps $t$ la position M. Lieu du point M quand $\Delta$ tourne autour du point O, $t$ restant fixe. Examiner le cas particulier où les droites $\Delta$ se déplacent dans un plan vertical.

**3812.** — On donne trois axes rectangulaires. De l'origine dans une direction donnée de cosinus directeurs $\alpha, \beta, \gamma$, on lance un point pesant avec une vitesse donnée. Mouvement du point.

**3813** — Un point est lancé sur une droite horizontale AB de A vers B avec une vitesse initiale donnée. Il est soumis à l'action d'une force unique s'opposant à son mouvement, dirigée de B vers A et proportionnelle à la vitesse. Etudier le mouvement de ce point.

**3814.** — On considère un point mobile attiré par des centres fixes en nombre déterminé et proportionnellement à sa distance à chacun des centres, le coefficient de proportionnalité étant le même pour tous les centres. Trouver les équations du mouvement du point mobile.

**3815.** — Tous les éléments d'un segment de droite attirent un point proportionnellement à la distance. Trouver le mouvement du point.

**3816.** — Etudier le mouvement défini par les équations

$$x = 2t + 1, \quad y = t^3, \quad z = 3t^2 - 2t + 1.$$

Connaissant la masse du point, calculer la force appliquée en ce point. Etudier la trajectoire du mouvement, son degré et ses directions asymptotiques.

**3817.** — Un point matériel pesant décrit d'un mouvement uniforme un cercle situé dans un plan vertical. Quelle est la force qui agit sur le point à chaque instant ? Montrer que cette force passe par un point fixe de la verticale du centre du cercle.

**3818.** — On considère un point M soumis à l'action d'une force centrale. Démontrer que si l'hodographe est décrite suivant la loi des aires, la force centrale est proportionnelle à la distance.

**3819.** — On donne un triangle et un point M dans son plan. Ce point est sollicité par des forces perpendiculaires aux côtés du triangle et égales aux distances du point M à ces côtés. On déplace M infiniment peu. Calculer le travail des forces.

**3820.** — Etudier le mouvement d'un point attiré par un point fixe en raison inverse du carré de la distance.

**3821.** — Un point M décrit une parabole de telle manière que la droite joignant le point M au foyer F tourne avec une vitesse angulaire constante. Calculer la force sollicitant le point M.

**3822.** — Soit $t$ la durée d'oscillation d'un pendule simple de longueur $l$ dans un lieu dont la gravité est $g$; montrer par des considérations d'homogénéité que si $t$ est fonction seulement de $l$ et de $g$, la formule qui donne $t$ est de la forme $a\sqrt{\frac{l}{g}}$, où $a$ est une constante.

**3823.** — Quelle est la force qui peut produire le mouvement uniforme d'un point sur une parabole ?

**3824.** — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du cube de la distance.

**3825.** — On considère une droite parcourue par un mobile de telle sorte que la force soit proportionnelle à la vitesse. Etudier ce mouvement.

**3826.** — Etudier le mouvement d'un point qui éprouve une résistance proportionnelle au carré de sa vitesse.

**3827.** — Mouvement d'un point M soumis à une force passant par un point fixe O et inversement proportionnelle au cube de la distance OM.

**3828.** — Mouvement d'un point soumis à une force constante en grandeur et en direction. Cas où le point subit une résistance proportionnelle à sa vitesse.

**3829.** — Mouvement et trajectoire d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse de la distance.

**3830.** — On suppose que des points fixes A $(a, b, c)$, A' $(a', b', c')$,... agissent sur un point mobile M $(x, y, z)$, les forces étant fonctions de la distance. Calculer le travail élémentaire, et montrer que c'est la différentielle totate d'une fonction.

**3831.** — Mouvement d'un point attiré par un point O proportionnellement à la distance et soumis à une force perpendiculaire à une droite OD et proportionnelle à la distance du point M à OD. On suppose la vitesse initiale située dans le plan MOD.

## VIII. — Statique.

**3832.** — On donne une circonférence graduée comme un cadran d'horloge. A chaque division est appliqué un poids proportionnel au numéro de la division. Centre de gravité du système.

**3833.** — Étant donnés trois axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$ et un point A sur $Ox$, d'abscisse $a$, un point B sur $Oy$ d'ordonnée $b$, un point C sur $Oz$ de cote $c$, en ces trois points sont appliquées des forces ayant pour projections $(X_1, Y_1, Z_1)$, $(X_2, Y_2, Z_2)$, $(X_3, Y_3, Z_3)$. Trouver l'axe central du système.

**3834.** — Un point M est attiré par des points fixes en raison inverse du carré de la distance. Le point M peut-il prendre une position d'équilibre ? Qu'arriverait-il si le point M était attiré par des points fixes proportionnellement à la distance ?

**3835.** — Quatre points se repoussent proportionnellement à leurs distances et sont assujettis à rester sur une sphère. Peuvent-ils prendre une position d'équilibre ?

**3836.** — Aux trois sommets d'un triangle on place trois poids. Quels doivent être ces trois poids pour que le centre de gravité du système soit au centre du cercle inscrit ?

**3837.** — Lieu d'une droite ayant des moments donnés par rapport à deux droites fixes et assujettie à rester parallèle à un plan fixe.

**3838.** — Position d'équilibre d'une tige pesante ayant ses extrémités sur deux droites rectangulaires situées dans un plan vertical.

**3839.** — On applique au centre du cercle circonscrit à un triangle ABC une force de $10^{kg}$. La décomposer en trois forces parallèles appliquées aux trois sommets.

**3840.** — Réduire un système de forces à deux, dont l'une soit appliquée suivant une droite donnée.

**3841.** — Un point pesant assujetti à rester sur une parabole à axe vertical est soumis à une force perpendiculaire à l'axe et proportionnelle au carré de la distance de ce point à l'axe. Peut-il y avoir équilibre ?

**3842.** — On donne un triangle ABC et un point M à son intérieur, on abaisse MA', MB', MC' perpendiculaires sur les côtés BC, CA, AB, et on suppose que le point M soit sollicité par les forces MA', MB', MC'. Position d'équilibre du point M.

**3843.** — Position d'équilibre d'un point matériel assujetti à rester sur une ellipse et attiré par un point du plan de l'ellipse proportionnellement à la distance.

**3844.** — Un point pesant est assujetti à demeurer sur une parabole dont l'axe est vertical et dont le sommet est le point le plus haut. Ce point est en outre attiré par le sommet proportionnellement à la distance. Position d'équilibre.

**3845.** — On considère un disque pesant placé sur un plan incliné. On attache en un point de son périmètre un poids donné. Peut-il y avoir une position d'équilibre ?

**3846.** — On donne une parabole dont l'axe est vertical, le sommet étant en bas. Un point pesant est assujetti à rester sur la parabole et il est attiré par un point fixe proportionnellement à la distance. Position d'équilibre.

**3847.** — On donne une ellipse dont le petit axe est vertical. Deux points pesants sont sur cette ellipse et se repoussent proportionnellement à leur distance. Positions d'équilibre.

**3848.** — Trouver le moment d'un vecteur par rapport à la droite $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$.

**3849.** — Centre de gravité de l'aire d'un quadrilatère. M et N étant les milieux des diagonales et O leur point de rencontre, on construit sur OM et ON un parallélogramme OMPN. Démontrer que le centre de gravité du quadrilatère est le même que celui du triangle PNM. Étant données les coordonnées des sommets du quadrilatère, trouver celles du centre de gravité du quadrilatère.

**3850.** — Centre de gravité d'un secteur circulaire. Étant donnés les deux rayons OA et OM d'un cercle et G le centre de gravité du secteur OAM, on suppose que OA restant fixe, OM tourne autour du point O d'un mouvement uniforme. Étudier le mouvement du point G.

**3851.** — Connaissant le moment d'une force par rapport à un point O, déterminer le moment de cette force par rapport à un point O'. Énoncer le théorème obtenu. Solution géométrique.

**3852.** — Sur une règle divisée en $n$ parties égales on applique aux points de divisions des forces proportionnelles à $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$. La règle gardant une longueur fixe, et le nombre des divisions croissant indéfiniment, trouver la position limite du centre de gravité.

**3853.** — Position d'équilibre d'une tige pesante dont les extrémités reposent soit sur une parabole dont l'axe est vertical, soit sur un paraboloïde d'axe vertical.

**3854.** — Position d'équilibre d'un point M sollicité par des forces issues de points fixes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et proportionnelles aux distances $A_1M, A_2M, \ldots, A_nM$.

**3855.** — On donne une ellipse et trois points sur cette ellipse. Ces points se repoussent proportionnellement à leurs distances respectives. Existe-t-il une position d'équilibre ?

**3856.** — La somme des moments des forces d'un couple par rapport à une droite est égale à la projection de l'axe du couple sur la droite.

**3857.** — Réduire un système de forces à deux forces rectangulaires dont on donne la plus courte distance.

**3858.** — Centre de gravité du volume engendré par une parabole tournant autour de son axe, ce volume étant limité à un plan perpendiculaire à l'axe.

**3859.** — Position d'équilibre d'une barre pesante dont les extrémités se déplacent sur une cycloïde dont la concavité est tournée vers le haut.

**3860.** — On donne un polygone plan fermé ABCDE. En A est appliquée une force représentée par le vecteur AB, en B une force représentée par BC, ..., en E une force représentée par EA. Faire la réduction de ce système de forces. Même problème en supposant le polygone gauche.

**3861.** — Peut-on réduire les forces appliquées à un corps solide à trois forces qui soient les arêtes d'un cube n'ayant pas d'extrémité commune ?

**3862.** — Lieu d'un segment de grandeur constante dont les moments par rapport à quatre droites fixes sont donnés.

**3863.** — On considère un fil de longueur donnée fixé par ses extrémités en deux points donnés. En deux points déterminés du fil on fixe deux points pesants. Sachant que la tension du fil est uniforme, chercher s'il existe une position d'équilibre et dans ce dernier cas, déterminer cette position.

**3864.** — Au milieu de chaque côté d'un polygone plan est appliquée une force perpendiculaire et proportionnelle à ce côté. Réduction du système.

**3865.** — On applique aux trois sommets d'un triangle ABC trois forces parallèles quelconques. Trouver le point d'application de la résultante. Quelles doivent être ces forces pour que le point d'application de la résultante soit le centre du cercle exinscrit dans l'angle A ?

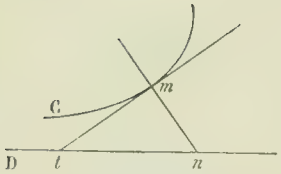
**3866.** — Etant donné un système de forces, déterminer un point tel que le moment résultant du système par rapport à ce point soit parallèle à une droite donnée.

**3867.** — Centre de gravité du quart de l'aire d'une ellipse (limité par la courbe et les deux demi-axes).

## CONCOURS DE 1903 (*suite*)

### ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (**Cours spéciaux**)

*Analyse*



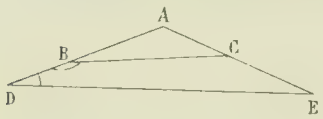

Déterminer une courbe C par la condition que sa tangente *mt* et sa normale *mn* détachent sur une droite donnée D un segment *tn* de longueur constante.

(*Durée : 4 heures.*)

*Trigonométrie.*

On connaît sur un terrain plan les trois points B, C, D et la direction DE.

On a évalué : la distance BC = 304$^m$,919, la distance BD = 122$^m$,131, l'angle DBC = 161°,41′59″,7 et l'angle BDE = 22°18′,9″, 3.




On veut prendre sur la direction DE un point E tel que le triangle ADE obtenu en menant la droite EC et en prolongeant cette droite jusqu'à sa rencontre en A avec DB soit isocèle :

AD = AE.

Calculer la distance DE.

(*Durée : 3 heures.*)

*Mécanique.*

Un chevalet à branches égales, représenté par la figure ABC, est placé dans un plan vertical et repose sur un sol horizontal BC ; la branche AB s'articule en B au sol ; les deux branches AB et AC s'articulent entre elles en A ; la branche AC peut glisser sur le sol.

On applique au milieu D de la branche AB, normalement à cette branche et dans le plan vertical ABC, une pression P ayant pour effet d'appuyer le chevalet sur le sol.

On néglige le poids du chevalet ainsi que le frottement dans les articulations A et B ; mais on tient compte du frottement de la branche AC sur le sol.

1° Entre quelles limites devra rester compris le demi-angle $\alpha$ du chevalet pour que l'équilibre soit assuré ?

2° Calculer, pour l'une quelconque des positions d'équilibre du chevalet, la pression sur le sol en C et les pressions dans les articulations A et B ; indiquer la valeur maximum ou minimum de chacune de ces pressions quand on fait varier l'angle $\alpha$.

(*Durée : 1 heures.*)

*Épure de Géométrie descriptive.*

On remet à MM. les candidats, avec le présent programme, un croquis devant leur servir *d'épure*, et sur lequel est projeté en plan et en élévation le tréteau à mettre en perspective.

Sur ce croquis, MM. les candidats indiqueront à l'encre rouge toutes les constructions géométrales nécessaires pour exécuter le tableau. Quelques lettres, en concordance sur *l'épure* et sur le *tableau*, serviront à désigner les points les plus importants.

Données. — La position $xy$ du tableau, ainsi que celle des deux côtés $xx'$, $yy'$ de l'angle optique en projection horizontale, de même que la hauteur $h$ de l'horizon, sont données sur le croquis.

L'œil est à une distance de 23 centimètres du tableau. Il est donc en dehors de la feuille. Par conséquent on se servira d'un tableau réduit.

Le rapport d'amplification du tableau est égal à 2.

Exécution. — La perspective sera exécutée en trait noir : les lignes vues *en plein* et les lignes cachées *en ponctué*.

Les constructions pour la mise en perspective seront en rouge sur l'épure ainsi que sur le tableau.

On pourra, si on le juge nécessaire, recourir à un abaissement du géométral.

Titre extérieur : Perspective. — Sous-titre : Un tréteau.

Feuille 1/2 grand aigle.

(*Durée : 4 heures.*)

*Croquis et dessin de machines.*

1re partie. — Croquis.

1° Sur une première feuille, faire au crayon, à main levée, le relevé géométral (plan, élévation et coupe) de l'un des objets placés dans la salle d'examen.

2° Relever ses dimensions (en millimètres) et les inscrire sur le croquis.

Feuille 1/8 grand aigle, quadrillée.

(On accordera 1h 1/2 pour cette première partie du travail, après quoi le modèle en relief sera retiré de la salle.)

2e partie. — Mise au net.

Sur une seconde feuille, mettre au net, à l'encre de Chine, à une échelle déterminée, le croquis précédent.

Nota. — L'échelle est laissée à l'arbitraire de MM. les candidats, elle devra être choisie assez grande pour que la feuille soit bien remplie. — L'échelle doit être dessinée dans une partie libre de cette feuille.

(*Durée : 4 heures.*)

---

## ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES. Cours préparatoires

*Mathématiques.*

**1256.** — On donne la parabole $y^2 = 2px$ rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, et un point de l'axe, A, d'abscisse $a$.

On mène par A une sécante coupant la parabole aux points M et N ; puis, par les points M et N, on fait passer un cercle tangent à la parabole : soit Q le point de contact. On demande :

1° de trouver le lieu du centre du cercle, quand la sécante MN tournera autour du point A ;

2° de trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point de rencontre de la sécante MN avec la normale menée à la parabole au point Q.

Construire et discuter ces lieux selon les différentes positions du point A sur l'axe de la parabole.

*Physique.*

I. — **1257.** — Un câble est formé d'un conducteur cylindrique de cuivre A séparé d'une enveloppe cylindrique en plomb B par une matière isolante de capacité inductive K. Le conducteur de cuivre a un diamètre $D_1$. L'armature cylindrique de plomb, d'épaisseur négligeable, est concentrique au conducteur A et a un diamètre $D_2$. On établit entre le conducteur A et l'enveloppe métallique extérieure B une différence de potentiel $V^0$. On demande : 1° les densités électriques superficielles sur chacune des surfaces métalliques ; 2° la différence de potentiel V qui existe entre un point situé à la distance $r$ de l'axe et un point de la surface du conducteur intérieur ; 3° la capacité par unité de longueur de ce câble.

Application numérique : $D_1 = 5^{mm}$ ; $D_2 = 13^{mm}$.

II. — Goniomètre. — Mesure des indices de réfraction.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1258.** — Etant donnés un ellipsoïde et une droite D, on sait que tout point de la droite est le centre d'une conique de l'ellipsoïde.

1° On demande l'enveloppe du plan de cette conique quand son centre décrit la droite D.

2° Cette enveloppe est un cylindre parabolique. Trouver la relation qui lie les droites D pour lesquelles les génératrices de ce cylindre sont parallèles à un plan P passant au centre de l'ellipsoïde.

3° Toutes ces droites D rencontrent une droite fixe Δ. Trouver le lieu décrit par Δ, quand le plan P varie en coupant l'ellipsoïde suivant une ellipse d'aire constante.

E. H.

**1259.** — On considère toutes les coniques Γ conjuguées à un triangle ABC et ayant leurs centres situés sur une droite D passant au point A.

Montrer que l'enveloppe des asymptotes de ces coniques est une parabole P dont l'axe est la droite D, et que le lieu du foyer de cette parabole est un cercle, quand la droite D tourne autour du point A.

N. Abramescu, étudiant à Bucarest.

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE CENTRALE (1902, 2e Session.)

### Trigonométrie.

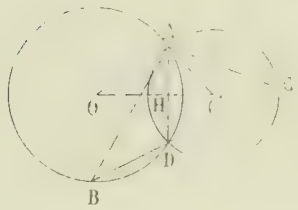
Problème

**1161.** — *On donne deux circonférences dont les rayons sont* R *et* R'. *Elles ont une corde commune* AD = $d$. *On donne en outre une corde qui passe par le point* D *et coupe les circonférences aux points* B *et* C *respectivement. Sa longueur est* BC = $a$.

1° *Résoudre le triangle* BAC.

2° *Résoudre ce triangle en supposant que* BC *est la plus grande corde possible. Dans cette hypothèse, chercher l'accroissement de l'angle* A *en supposant que* R *varie de* ΔR, R' *de* ΔR' *et en négligeant les produits et les puissances des accroissements.*

1. Le cercle circonscrit au triangle ABD ayant pour rayon R, on a




$$\frac{d}{\sin B} = 2R, \qquad \text{d'où} \qquad \sin B = \frac{d}{2R}.$$

Pareillement, on a dans le triangle ADC

$$\frac{d}{\sin C} = 2R', \qquad \text{d'où} \qquad \sin C = \frac{d}{2R'}.$$

B et C étant connus, on aura A par la formule

$$A = 180° - B - C.$$

Pour les côtés $b$, $c$, on a les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

d'où l'on tire

$$b = a.\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{ad}{2R \sin A},$$

$$c = a.\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{ad}{2R' \sin A}.$$

*Discussion.* — Supposons pour fixer les idées $R \geqslant R'$.

Nous devons d'abord chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un triangle

ABC dont les éléments soient donnés par les formules ci-dessus; il faudra chercher ensuite à quelle condition on pourra construire la figure en partant d'un pareil triangle.

Pour que le triangle existe, il faut et il suffit que l'on trouve pour les angles A, B, C des valeurs comprises entre 0 et 180°.

1° Les valeurs trouvées pour sin B, sin C doivent être inférieures ou au plus égales à l'unité, ce qui exige

$$d \leqslant 2R, \qquad d \leqslant 2R',$$

ou, en tenant compte de l'hypothèse $R \geqslant R'$,

$$d \leqslant 2R'.$$

2. Cette condition remplie, on trouvera pour chacun des angles deux valeurs supplémentaires. Soient B et C les angles aigus ainsi obtenus; $B' = 180° - B$, $C' = 180° - C$, les angles obtus supplémentaires.

On peut toujours prendre les angles aigus B et C; on trouve ainsi pour A une valeur comprise entre 0 et 180°. Donc on aura toujours un premier triangle ABC, dans lequel les angles B et C sont aigus.

Peut-on avoir un triangle dans lequel l'un des angles B ou C soit obtus? Prenons l'angle aigu B et l'angle obtus $C' = 180° - C$. La valeur correspondante de A sera

$$A' = 180° - B - (180° - C) = C - B,$$

qui ne peut convenir que si l'on a $C > B$. C'est justement ce qui a lieu puisque R étant plus grand que R', $\frac{d}{2R} = \sin B$ est plus petit que $\frac{d}{2R'} = \sin C$, et par suite $B < C$.

Il résulte de ce qui précède qu'on ne pourrait pas prendre l'angle obtus B' avec l'angle aigu C.

En résumé, pourvu que l'on ait $d \leqslant 2R' \leqslant 2R$ il existe deux triangles ABC, A'B'C' dont les éléments sont fournis par les formules données plus haut. Pour déduire d'un pareil triangle la figure indiquée par l'énoncé, il faudra placer dans ce triangle la longueur $AD = d$, ce qui se fera en décrivant de A comme centre avec $d$ comme rayon un arc de cercle. Soit $h$ la hauteur du triangle

$$\left(h = a \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}\right).$$

Si $d \geqslant h$, on pourra construire la figure (et cela de deux manières différentes pour $d > h$); si au contraire $d < h$, le problème est impossible.

Prenons d'abord le triangle ABC; la condition de possibilité est

$$a \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin (B + C)} \leqslant d$$

ou encore

$$a \leqslant d(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C).$$

Or $\operatorname{cotg} B = \frac{\sqrt{4R^2 - d^2}}{d}$, $\operatorname{cotg} C = \frac{\sqrt{4R'^2 - d^2}}{d}$. On a donc comme condition définitive

$$a \leqslant \sqrt{4R^2 - d^2} + \sqrt{4R'^2 - d^2}.$$

Pour le triangle A'B'C' la condition de possibilité sera

$$a \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin (C - B)} \leqslant d$$

ou encore

$$a \leqslant d(\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C),$$

c'est-à-dire

$$a \leqslant \sqrt{4R^2 - d^2} - \sqrt{4R'^2 - d^2}.$$

Il est intéressant de rapprocher ces résultats de la solution géométrique du problème. — Nous aurons d'abord à construire les deux cercles O et O' de rayons R et R' ayant une corde commune AD de longueur donnée $d$. Cela revient à la construction du triangle AOO' connaissant les côtés $AO = R$,

$AO' = R'$ et la hauteur $AH = \frac{d}{2}$; le problème est possible pourvu que l'on ait $\frac{d}{2} \leqslant R' \leqslant R$ et admet deux solutions : l'une dans laquelle les angles à la base O et O' sont aigus (voir la figure), l'autre dans laquelle l'angle O étant aigu, l'angle O' est obtus. Dans le premier cas, les centres O et O' sont de part et d'autre de la corde commune AD, dans le second cas ils sont du même côté.

Dans chaque cas, on aura à mener par le point D une droite BC de longueur égale à $a$; c'est un problème connu : la condition de possibilité, c'est que la longueur $\frac{a}{2}$ soit inférieure ou au plus égale à la distance des centres OO'. Or, on a suivant le cas :

$$OO' = OH \pm OH' = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \pm \sqrt{R'^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

La condition de possibilité sera donc

$$a \leqslant \sqrt{4R^2 - d^2} \pm \sqrt{4R'^2 - d^2}$$

C'est bien la condition trouvée plus haut. Pour chacun des cas de la figure, on trouve quand le problème est possible, deux droites symétriques en direction par rapport à la corde commune AD; les deux triangles ainsi obtenus sont égaux (côté égal à $a$, adjacent à des angles égaux chacun à chacun). Les deux cas de figures que nous avons à distinguer ici correspondent aux deux formes de triangle trouvées plus haut et nous constatons que dans chaque cas le problème admet en général deux solutions, confondues en une seule lorsque

$$a = \sqrt{4R^2 - d^2} + \sqrt{4R'^2 - d^2} \quad (1^{re} \text{ disposition})$$

ou

$$a = \sqrt{4R^2 - d^2} - \sqrt{4R'^2 - d^2} \quad (2^{e} \text{ disposition}).$$

Calculons les éléments du triangle ABC dans ces deux cas limites. Il résulte de la construction géométrique que dans le cas du maximum BC est perpendiculaire à la corde commune AD; les côtés AB, AC sont alors des diamètres des cercles O et O'. C'est ce qu'on peut vérifier par le calcul;

*1re disposition.* — B et C sont les angles aigus donnés par les formules

$$\sin B = \frac{d}{2R}. \qquad \sin C = \frac{d}{2R'}.$$

Les côtés opposés $b$ et $c$ sont donnés par

$$b = \frac{ad}{2R \sin A}, \qquad c = \frac{ad}{2R' \sin A};$$

on suppose : $a = \sqrt{4R^2 - d^2} + \sqrt{4R'^2 - d^2}$; de plus

$$\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

$$= \frac{d}{2R}\sqrt{1 - \frac{d^2}{4R'^2}} + \frac{d}{2R'}\sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}}$$

$$= \frac{d}{4RR'}\left[\sqrt{4R^2 - d^2} + \sqrt{4R'^2 - d^2}\right] = \frac{ad}{4RR'},$$

on a donc bien :

$$b = \frac{ad}{2R \sin A} = 2R', \qquad c = \frac{ad}{2R' \sin A} = 2R.$$

*2e disposition.* — Continuons d'appeler B et C les angles aigus dont il a été question plus haut; le triangle aura pour angles à la base l'angle aigu B et l'angle obtus $C' = 180° - B$ On a

$$a = \sqrt{4R^2 - d^2} - \sqrt{4R'^2 - d^2}.$$

$$\sin A = \sin(C - B) = \sin C \cos B - \sin B \cos C$$

$$= \frac{d}{2R'}\sqrt{1-\frac{d^2}{4R^2}} - \frac{d}{2R}\sqrt{1-\frac{d^2}{4R'^2}}$$

$$= \frac{d}{4RR'}\left(\sqrt{4R^2-d^2}-\sqrt{4R'^2-d^2}\right) = \frac{ad}{4RR'}.$$

d'où l'on déduit encore :

$$b = 2R', \qquad c = 2R.$$

L'énoncé demande de calculer, *dans cette hypothèse ou* BC *est la plus grande corde possible*, (nous venons de voir que cette hypothèse peut se trouver réalisée de deux manières) l'accroissement $\Delta A$ de l'angle A, en supposant que R varie de $\Delta R$, et R′ de $\Delta R'$. Cette hypothèse ne correspondant à rien de particulier pour l'angle A, nous allons traiter la question dans le cas général.

La formule qui donne A est

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

dans le premier cas de figure, d'où :

$$\Delta A = -\Delta B - \Delta C \tag{1}$$

et

$$A = C - B$$

dans le second cas, d'où

$$\Delta A' = -\Delta B + \Delta C. \tag{2}$$

Tout revient à calculer $\Delta B$ et $\Delta C$, sachant que

$$B = \text{arc sin}\frac{d}{2R}, \qquad C = \text{arc sin}\frac{d}{2R'}$$

Il est commode ici de se servir de la formule de Taylor :

$$f(R+\Delta R) = f(R) + \frac{\Delta R}{1}f'(R) + \frac{(\Delta R)^2}{1.2}f''(R) + \ldots,$$

d'où, en négligeant les puissances de l'accroissement $\Delta R$,

$$\Delta f(R) = \Delta R . f'(R).$$

Appliquons à B qui est une fonction de R et à C qui est la même fonction de R′

$$\Delta B = \Delta R \times \frac{-\dfrac{d}{2R^2}}{\sqrt{1-\dfrac{d^2}{4R^2}}} = \frac{-d\Delta R}{R\sqrt{4R^2-d^2}}.$$

$$\Delta C = \Delta R \times \frac{-\dfrac{d}{2R'^2}}{\sqrt{1-\dfrac{d}{4R'^2}}} = \frac{-d\Delta R'}{R'\sqrt{4R'^2-d^2}}.$$

Nous aurons ainsi :

$$\Delta A = d\left(\frac{\Delta R}{R\sqrt{4R^2-d^2}} \pm \frac{\Delta R'}{R'\sqrt{4R'^2-d^2}}\right),$$

le signe + devant le second terme correspondant au premier cas de figure, le signe — au second.

Graphiquement, il serait facile de se rendre compte de la variation de l'angle A ; en effet le triangle ABC est semblable au triangle AOO′, l'angle A du triangle ABC est égal à l'angle OAO′. En construisant cet angle pour les valeurs R et R′ des rayons, puis pour les valeurs $R + \Delta R$, $R' + \Delta R'$, on obtiendrait par différence l'accroissement cherché $\Delta A$.

P. L.

Assez bonne solution de M. Haag, soldat au 69e de ligne, à Nancy.

CALCUL

**1162**. — *Calculer le plus petit des angles positifs qui satisfont à l'équation*

$$\operatorname{tg}(60x+\alpha) = \sqrt{a^3}\log\cos^2 3\alpha,$$

$$\alpha = 51^\circ 25' 32'' 45, \qquad a = 2{,}005475.$$

On a
$$3\alpha = 154^\circ 16' 37'',35,$$
$$180^\circ - 3\alpha = 25^\circ 43' 22'',65,$$
$$\cos 3\alpha = -\cos(180^\circ - 3\alpha) = -\cos 25^\circ 43' 22'',65.$$

L'équation proposée peut s'écrire

$$\operatorname{tg}(60x+\alpha) = \sqrt{a^3}\log\cos^2 25^\circ 43' 22'',65$$
$$= \sqrt{a^3}\times 2\log\cos 25^\circ 43' 22'',65.$$

Or on trouve

$$\log\cos 25^\circ 43' 22'',65 = \bar{1},9546781,$$

d'où
$$2\log\cos 25^\circ 43' 22'',65 = \bar{1},9093562 = -0{,}0906438.$$

On a donc à résoudre l'équation

$$\operatorname{tg}(60x+\alpha) = -\sqrt{a^3}\times 0{,}0906438.$$

Posons : $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{a^3}\times 0{,}0906438$ ; d'où l'on déduit, au moyen des tables,

$$\varphi = 14^\circ 26' 10'',89.$$

L'équation prend la forme

$$\operatorname{tg}(60x+\alpha) = -\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(-\varphi),$$

d'où
$$60x+\alpha = k.180^\circ - \varphi,$$
$$x = k.3^\circ - \frac{\varphi+\alpha}{60}.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\varphi &= 14^\circ 26' 10'',89\\ \alpha &= 51^\circ 25' 32'',45\\ \hline \varphi+\alpha &= 65^\circ 51' 43'',34\\ \frac{\varphi+\alpha}{60} &= 1^\circ\ 5' 51'',722.\end{aligned}$$

On aura la plus petite valeur positive de $x$ en prenant $k = 1$. On trouve ainsi

$$x = 3^\circ - 1^\circ 5' 51'',722 = 1^\circ 54' 8'',28.$$

P. L.

## CONCOURS DE 1903 (*suite*)

### ÉCOLE CENTRALE (**Deuxième session**).

*Mathématiques.*

STATIQUE

**1260**. — Enoncer les lois du frottement des solides.

Quelle est la charge P, supposée concentrée en un point matériel, que pourrait traîner, en le remontant sur un plan incliné de l'angle $i$ sur l'horizon, un cheval exerçant un effort de traction T supposé parallèle à la ligne de plus grande pente du plan, sachant que le coefficient du frottement de la charge sur le plan est $f$?

Quelle est, avec ces données, le minimum de poids du cheval, sachant que le coefficient du frottement de ses pieds sur le plan est $f_1$ ?

Appliquer à $T = 110^k$, $f = 0{,}05$, $f_1 = 0{,}30$, $\tan i = 0{,}03$.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET CINÉMATIQUE

**1261.** — 1° Construire la courbe S représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$20y = 3x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 34x.$$

2° Sachant qu'un mobile parcourt la trajectoire S d'une vitesse donnée par la formule $v^2 = \beta - y$, indiquer pour diverses valeurs de $\beta$ les limites d'excursion sur la trajectoire. Indiquer la forme générale de l'hodographe pour l'excursion correspondante à $\beta = 1{,}25$, ainsi que les points pour lesquels l'accélération tangentielle est nulle et ceux pour lesquels la composante normale de l'accélération est nulle.

*(15 septembre, de 7 h. à 11 h.)*

## *Physique et Chimie.*

I. — Intensité d'aimantation. Susceptibilité magnétique. Variations de l'intensité d'aimantation avec l'intensité du champ.

II. — **1262.** — On donne un volume V d'air humide à la pression H, à la température T et dont l'état hygrométrique est $e$ ; on abaisse sa température à $t°$ et on demande à quelle valeur $e$ il faut réduire son volume pour que la moitié de la vapeur d'eau se condense ?

$V = 1^{m^3}$, $\alpha = 0{,}00367$, $T = 35°$, $F_{35} = 40^{mm},4$,
$H = 760^{mm}$, $e = 0{,}31$, $t = 20°$, $F_{20} = 17^{mm},39$.

III. — Acide cyanhydrique.

IV. — **1263.** — Soit un minerai composé de sulfure de zinc (blende), de sulfure d'antimoine (stibine) et d'une gangue formée de carbonate de calcium (calcaire). On attaque $0^{gr},347$ par l'acide chlorhydrique concentré en excès et à chaud. Les gaz résultant de l'attaque sont recueillis sur la cuve à mercure. Leur volume est $75^{cc}$.

Dans l'éprouvette qui les renferme, on introduit un cristal d'azotate de plomb humide qui absorbe $50^{cc}$.

Enfin, dans la liqueur provenant de l'attaque du minerai par l'acide chlorhydrique, on plonge une lame de zinc.

Elle se recouvre d'un précipité noir qu'on recueille sur un filtre. Le poids de ce précipité lavé et séché est de $0^{gr},090$.

On demande : 1° D'écrire les formules des réactions ;

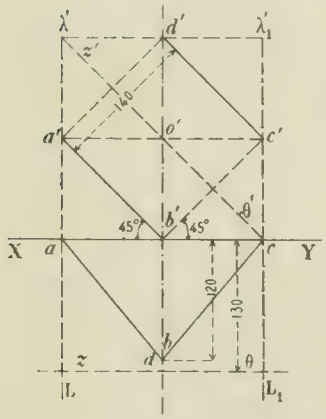
2° De calculer la composition du minerai et d'indiquer, en centièmes, sa teneur en blende, stibine et calcaire.

On supposera les gaz purs, secs et dans les conditions normales et on ne tiendra pas compte de la petite quantité d'acide chlorhydrique dégagé pendant l'attaque.

(Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques).

*(15 septembre, de 2 h. à 5 h.)*

## *Géométrie descriptive.*




INTERSECTION D'UN PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE ET D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION

**1264.** — On demande de déterminer l'intersection d'un paraboloïde hyperbolique avec un cylindre de révolution, les deux surfaces étant définies de la manière suivante :

I. PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE : On donne deux génératrices ($ab$, $a'b'$), ($cd$, $c'd'$) d'un même système, le plan directeur de l'autre système est le plan de bout $a'd'$ à 45° sur le plan horizontal.

Les projections verticales $a'b'$ et $c'd'$ des deux génératrices données sont parallèles et à 45° sur la ligne de terre, leurs projections horizontales $ab$ et $cd$ concourent au point ($bd$) dont l'éloignement est de $120^{mm}$, enfin les traces verticales $a'$ et $c'$ de ces deux droites sont sur une même horizontale. (La figure $a'b'c'd'$ est un carré de $140^{mm}$ de côté).

II. CYLINDRE DE RÉVOLUTION : Il a pour axe la droite de front ($z\theta$, $z'\theta'$) dont l'éloignement est de $130^{mm}$. La droite $z'\theta'$ est parallèle à $a'b'$ et passe par $o'$, centre du carré $a'b'c'd'$. Le rayon du cylindre est de $70^{mm}$.

On tracera la courbe d'intersection en bleu en supposant les deux surfaces indéfinies.

Dans la mise au trait on figurera les deux surfaces limitées ainsi :

1° Le paraboloïde par le plan horizontal de projection, le plan horizontal du point $d'$ et les deux plans de profil des points $(aa')$ et $(cc')$.

2° Le cylindre par les deux plans de bout $a'd'$ et $c'b'$.

Cadre de 270mm sur 450mm. — Ligne de terre XY à 220mm du côté inférieur du cadre. — Projetante $(bb'\ dd')$ confondue avec la ligne médiane des grands côtés du cadre. — $a'b'c'd'$, carré de 140mm de côté. — Eloignement de $bd$ : 120mm, de $z0$ : 130mm. Rayon du cylindre : 70mm.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Paraboloïde et cylindre.

*(16 septembre, de 7 à 11 h.)*

## *Trigonométrie.*

### Problème

**1265.** — Soit le triangle ABC dans lequel la hauteur AD rencontre en I une seconde hauteur et en D le côté BC. Le point I étant supposé situé entre les points A et D, on donne $AI = m$, $ID = \mu$, ainsi que le rayon R du cercle circonscrit à ABC.

1° Calculer le côté $a$ et une ligne trigonométrique de l'angle A.

2° Calculer les côtés $b$, $c$ en fonction des données.

3° Donner la condition de grandeur de R.

4° Construire géométriquement le triangle ABC dans le cas où le point I est entre les points A et D. Discuter.

5° Construire le triangle ABC quelle que soit la position relative des points A, I, D sur la hauteur. Discuter.

*(16 septembre, de 2 h. à 4 h.)*

### Calcul

**1266.** — Calculer les arcs compris entre 180° et 360° qui vérifient la formule

$$\operatorname{cotg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{\sin 3\alpha}}{a^3 \cos \frac{1}{2}\beta},$$

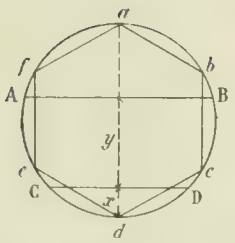
$$a = 0{,}586047, \qquad \alpha = 41°53'12''1, \qquad \beta = 243°53'23''.$$

*(16 septembre, de 1 h. à 5 h.)*

---

## ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (**Cours préparatoires**).

### *Algèbre.*



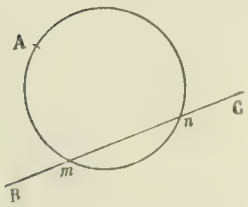

**1267.** — On considère dans une sphère de rayon R, un segment sphérique ABCD de hauteur $y$, contigu à un segment sphérique à une base CdD de hauteur $x$.

1° Former la relation qui doit exister entre $x$ et $y$ pour que le segment ABCD ait un volume égal au volume engendré par l'hexagone régulier $abcdef$ tournant autour du diamètre $ad$ qui sert d'axe aux segments sphériques.

2° Etudier sur cette relation, *par la méthode élémentaire* jointe à l'emploi de la théorie des équations, la variation de la hauteur $y$.

*(Durée : 3 h. 1/2.)*

### *Géométrie analytique.*




**1268.** — Lieu des centres des cercles qui passent par un point donné A et qui détachent sur une droite donnée BC un segment $mn$ de longueur constante.

*(Durée : 3 h. 1/2.)*

### *Épure de Géométrie descriptive.*

Etant donnés les points $(a, a')$ et $(b, b')$ définis par le croquis ci-joint, on construit sur $(ab, a'b')$ comme

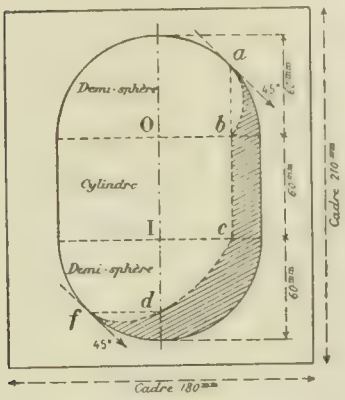
côté, et dans le plan vertical de cette droite, un triangle équilatéral dont le troisième sommet $(c,c')$ soit *au-dessus* de $(ab, a'b')$.

On achève ensuite le tétraèdre régulier dont $(abc, a'b'c')$ est une face et dont le quatrième sommet $(d,d')$ est *en avant* de cette face.

On considère enfin la sphère qui a pour centre le milieu $(o, o')$ de $(ab, a'b')$ et qui est tangente aux deux faces du tétraèdre ne passant pas pas cette arête.

Représenter l'ensemble de la sphère et du tétraèdre, chacun de ces deux corps étant limité à la partie extérieure à leur intersection commune.

Feuille 1/4 grand aigle.




NOTA. — Le résultat de l'épure étant figuré en noir, avec les parties cachées en traits interrompus, on tracera en rouge les lignes de construction, et en bleu pâle les parties non utilisées des contours apparents des deux corps et de leurs lignes d'intersection géométriquement complétées.

*Lavis.*

Faire à l'encre de Chine et à teintes plates ou à teintes fondues, le lavis d'un cylindre terminé par deux demi-sphères.

La surface du solide sera supposée dépolie. — On ne passera pas de teinte sur le fond. — On se conformera aux cotes indiquées en millimètres sur le croquis ci-joint. — Les traits du cadre et les contours apparents du solide seront passés à l'encre avant de laver. — Le rayon lumineux est le rayon ordinaire à 45°.

Feuille 1/8 grand aigle.

(*Durée : 3 h. 1/2.*)

---

## CONCOURS GÉNÉRAUX DE BELGIQUE (Athénées)

**Rhétorique des Humanités : modernes** (*Section scientifique*), **anciennes** (*Section latine*).

MATHÉMATIQUES (*Jeudi 30 Juillet.*)

*Géométrie Analytique.*

Dans une ellipse donnée rapportée à ses axes de symétrie, on mène par le foyer F deux rayons vecteurs FM, FN tels que

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{1}{k},$$

$k$ désignant une constante.

1° Rechercher l'équation du lieu géométrique du point de rencontre P des tangentes à l'ellipse donnée aux points variables M et N ;

2° On demande une discussion algébrique de l'équation trouvée, pour les diverses valeurs positives de $k$, afin de reconnaître la nature du lieu ;

3° Pour $k = \frac{b^2}{2a}$ la courbe dégénère en deux droites dont l'une est la directrice correspondant au foyer F de l'ellipse donnée. Démontrer directement que la polaire de tout point P de cette droite rencontre l'ellipse en deux points M, N tels que

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2a}{b^2},$$

se servir à cet effet des propriétés de l'ellipse et de l'équation de cette conique en coordonnées polaires, le pôle étant au foyer F et l'axe polaire se confondant avec le grand axe de l'ellipse.

4° Pour $k = \frac{a}{2}$, le lieu est une parabole ; trouver l'équation de cette courbe rapportée à son axe de symétrie et à la tangente au sommet ;

5° Quelle valeur faut-il attribuer à $k$ pour que le lieu soit une hyperbole équilatère ? Rapporter cette hyperbole à son centre et à ses axes, puis à ses asymptotes.

*Trigonométrie sphérique.*

Soient $a$, $b$, $c$ les côtés ; A, B, C les angles du triangle sphérique ABC ; $\alpha$, la médiane AM ; $h$, la hauteur AD ; $2E = A + B + C - \pi$ ; $2p$ le périmètre du triangle.

1° Démontrer les formules suivantes :

$$\cos E = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{\sin p \sin (p - a) \sin (p - b) \sin (p - c)}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

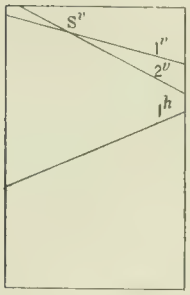
$$\cos b + \cos c = 2 \cos \alpha . \cos \frac{a}{2},$$

$$\sin a . \sin h = 2\sqrt{\sin p \sin (p - a) \sin (p - b) \sin (p - c)}.$$

2° Déduire des formules précédentes cotg E en fonction de $a$, $\alpha$, $h$.

*Géométrie descriptive.*

1° Trouver les projections d'un trièdre trirectangle SABC, étant données les deux projections $1^v$, $1^h$ de l'arête SA, et la projection verticale $2^v$ de l'arête SB.




2° Couper ce trièdre par un plan tel que la section obtenue MNP soit un triangle isocèle, dont la base MN située dans le plan (1, 2) ait une longueur de 70 millimètres et dont le sommet P sur la troisième arête SC soit à une distance de 100 millimètres du point S.

3° Représenter le tétraèdre SMNP en appliquant les conventions relatives au dessin des projections des parties vues ou cachées.

La ligne de terre est parallèle au bord inférieur du cadre,

N. B. — Les élèves ont six heures pour répondre à ces questions.

**Rhétorique des Humanités anciennes** (*Section grecque-latine*).

MATHÉMATIQUES (*Jeudi 30 Juillet.*)

I. — Trouver l'expression de l'annuité $a$ qui fait le service d'un emprunt V remboursable par $n$ annuités constantes, le taux de l'intérêt composé étant de $r$ pour 1.

En supposant que le débiteur paye à la fin de chaque année l'intérêt simple de la dette entière, et que l'on désigne par $m$ la part de l'annuité consacrée au remboursement de V, démontrer la relation $a = m(1 + r)^n$. Appliquer cette formule à la résolution du problème suivant :

Quel est le temps nécessaire à l'amortissement d'un capital de 100 francs, lorsqu'on paye tous les ans, outre l'intérêt simple à 3 °/₀, une somme de 50 centimes ?

Effectuer le calcul à l'aide des logarithmes.

II. — A quelle distance du centre d'une sphère de rayon R faut-il faire une section plane, pour que le plus petit segment ainsi formé soit équivalent au cône ayant pour base la section et pour sommet le centre de la sphère ?

Trouver la distance du centre de la sphère au plan sécant au moyen d'une construction effectuée sur le rayon R, à l'aide de la règle et du compas.

III. — On considère une pyramide régulière à base carrée, les arêtes de la base et les arêtes latérales ont pour longueur commune $a$. On la coupe par un plan parallèle à la base ; la section donne un carré de côté $b$. On demande de calculer le volume et la surface latérale du tronc de pyramide ainsi formé.

IV. — Calculer la distance des points A et B séparés par un obstacle, sachant que les distances de ces points à un troisième point C valent : $AC = 214^m,8$, $BC = 192^m,5$, et que la droite AB est vue du point C sous un angle de 63° 10′ 27″.

Dresser le tableau des calculs.

N. B. — Les élèves ont six heures pour répondre à ces questions.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1269**. — Si d'un point du plan d'un triangle on mène des droites allant aux trois sommets, les perpendiculaires menées à ces droites par les sommets correspondants rencontrent les côtés respectivement opposés en trois points en ligne droite.

**1270**. — Si trois rayons partant des sommets d'un triangle vont se réfléchir sur une droite en un même point, les rayons réfléchis rencontrent respectivement les côtés opposés en trois points en ligne droite.

T. LEMOYNE.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

14e Année. N° 3 Décembre 1903.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### UNE LEÇON SUR L'INVOLUTION

par M. **Ch. Michel**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

1. Il est possible, d'une infinité de manières, d'exprimer les coordonnées homogènes d'un point variable d'une droite par des polynomes entiers et du premier degré par rapport à un paramètre $\lambda$. Si l'on exprime $\lambda$ en fonction d'un autre paramètre $\mu$ qui lui soit lié homographiquement, les coordonnées homogènes d'un point de la droite peuvent aussi se mettre sous la forme de polynomes entiers et du premier degré par rapport à $\mu$. Réciproquement, si les coordonnées homogènes d'un point variable de la droite peuvent s'exprimer, d'une part, sous forme de polynomes entiers et du premier degré d'un paramètre $\lambda$, d'autre part, sous forme de polynomes entiers et du premier degré d'un paramètre $\mu$, il existe entre $\lambda$ et $\mu$ une relation homographique.

2. Cela posé, on dit que deux points M et M′, variables sur une droite, se correspondent en *involution* s'il existe entre leurs paramètres $\lambda$ et $\lambda'$ une relation homographique et symétrique, c'est-à-dire une relation de la forme

$$A\lambda\lambda' + B(\lambda + \lambda') + C = 0,$$

A, B, C étant des quantités données. Nous dirons encore que le couple des points M et M′ varie en involution.

Il est nécessaire de montrer que la définition de l'involution est indépendante de la représentation paramétrique choisie. Or, on reconnaît immédiatement que si, dans la relation précédente, on remplace simultanément $\lambda$ et $\lambda'$ par deux paramètres $\mu$ et $\mu'$ liés respectivement à $\lambda$ et à $\lambda'$ par une même relation homographique, la relation reste homographique et symétrique entre $\mu$ et $\mu'$. La définition est bien acceptable.

On peut toujours supposer, dans la relation involutive, le coefficient de $\lambda\lambda'$ différent de 0. Sinon, remarquons d'abord qu'on peut supposer C différent de 0, car, si l'on a la relation $B(\lambda + \lambda') = 0$, il suffit d'y faire un changement de variable de la forme $\lambda = \mu + \alpha$; on obtient ainsi la relation $B(\mu + \mu') + 2B\alpha = 0$, où le terme indépendant de $\mu$ et de $\mu'$ est différent de 0. Cela posé, dans une relation de la forme $B(\lambda + \lambda') + C = 0$, où C n'est pas nul, il suffit de faire le changement de variable $\lambda = \frac{1}{\mu}$; on obtient alors la nouvelle relation

$$C\mu\mu' + B(\mu + \mu') = 0.$$

où le coefficient de $\mu\mu'$ est différent de 0.

3. *Points doubles.* — Cherchons s'il existe un point M qui coïncide avec le point M′ qui lui correspond dans l'involution. Si $\mu$ est le paramètre d'un tel point, on a la condition nécessaire et suffisante

$$A\mu^2 + 2B\mu + C = 0,$$

qui admet deux racines distinctes ou confondues. Ainsi *il existe deux points qui coïncident avec les points qui leur correspondent dans l'involution.* Ces points sont dits les *points doubles* de l'involution.

Quand les points doubles sont confondus, l'involution est dite *singulière.* Je dis que, dans une involution singulière, les couples de points M et M′ ont un point commun confondu avec les deux points doubles. Tirons en effet de la relation involutive $\lambda$ en fonction de $\lambda'$; il vient

$$\lambda = -\frac{B\lambda' + C}{A\lambda' + B}.$$

Pour que $\lambda$ soit fixe, il faut et il suffit que l'on ait $\frac{B}{A} = \frac{C}{B}$, c'est-à-dire $B^2 - AC = 0$, condition qui exprime que l'équation aux paramètres des points doubles a ses racines égales.

4. Problème. — *Passer de l'équation aux paramètres des points doubles d'une involution à la relation involutive elle-même.*

Si
$$A\mu^2 + 2B\mu + C = 0$$
est l'équation aux paramètres des points doubles, la relation involutive est nécessairement
$$A\lambda\lambda' + B(\lambda + \lambda') + C = 0.$$
Il n'y a donc qu'une involution ayant deux points doubles donnés.

Posons $\varphi(\lambda, \nu) = A\lambda^2 + 2B\lambda\nu + C\nu^2$, et formons $\frac{1}{2}(\lambda'\varphi'_\lambda + \nu'\varphi'_\nu)$. Nous obtenons $\lambda'(A\lambda + B\nu) + \nu'(B\lambda + C\nu)$, c'est-à-dire $A\lambda\lambda' + B(\lambda'\nu + \lambda\nu') + C\nu\nu'$. Si on fait ensuite $\nu = \nu' = 1$, on voit que, si $\varphi(\lambda) = 0$ est l'équation aux paramètres des points doubles, la relation involutive est

$$\lambda'\varphi'_\lambda + \varphi'_\nu(\lambda, 1) = 0.$$

5. Théorème. — *Deux points correspondants* M *et* M′ *d'une involution sont conjugués harmoniques par rapport aux points doubles, et, réciproquement, si deux points* M *et* M′ *sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes, ils se correspondent en involution.*

Soient en effet $\alpha$ et $\beta$ les paramètres des points doubles A et B. On a

$$\alpha + \beta = -\frac{2B}{A}, \qquad \alpha\beta = \frac{C}{A}.$$

La relation involutive peut alors s'écrire
$$2\lambda\lambda' - (\alpha + \beta)(\lambda + \lambda') + 2\alpha\beta = 0,$$
ou encore
$$(\lambda - \alpha)(\lambda' - \beta) + (\lambda' - \alpha)(\lambda - \beta) = 0,$$
ou enfin
$$\frac{\lambda - \alpha}{\lambda' - \alpha} : \frac{\lambda - \beta}{\lambda' - \beta} = -1.$$

Les quatre points M, M′, A, B forment donc une division harmonique.

Réciproquement, si les points M et M′ sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B, il existe entre leurs paramètres $\lambda$ et $\lambda'$ une relation de la forme
$$(\lambda - \alpha)(\lambda' - \beta) + (\lambda' - \alpha)(\lambda - \beta) = 0,$$
qui est une relation involutive.

6. *Relations diverses.* — 1° Entre les paramètres $\lambda$ et $\lambda'$ de deux points correspondants M et M′, on a la relation
$$\frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \beta} - \frac{\lambda' - \alpha}{\lambda' - \beta} = 0.$$

Or, on a
$$\frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \beta} = 1 - \frac{\alpha - \beta}{\lambda - \beta}, \qquad \frac{\lambda' - \alpha}{\lambda' - \beta} = 1 - \frac{\alpha - \beta}{\lambda' - \beta}.$$

Par suite, la relation peut s'écrire

$$\frac{1}{\lambda-\beta}+\frac{1}{\lambda'-\beta}=\frac{2}{\alpha-\beta}.$$

2° Entre les paramètres $\lambda$ et $\lambda'$ de deux points M et M′ correspondants, on a la relation

$$\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta}=-\frac{\lambda'-\alpha}{\lambda'-\beta},$$

d'où

$$\frac{(\lambda-\alpha)^2}{(\lambda-\beta)^2}=\frac{(\lambda'-\alpha)^2}{(\lambda'-\beta)^2}.$$

Si $k$ désigne la valeur commune des deux membres de la relation précédente, on voit que $\lambda$ et $\lambda'$ sont racines d'une équation variable du second degré, de la forme

$$(\lambda-\alpha)^2-k(\lambda-\beta)^2=0,$$

$k$ étant un paramètre variable.

3° Soient deux points correspondants P et P′, de paramètres $a$ et $a'$. On a

$$\frac{a-\alpha}{a'-\alpha}=-\frac{a-\beta}{a'-\beta}.$$

d'où

$$\frac{(a-\alpha)^2}{(a'-\alpha)^2}=\frac{(a-\beta)^2}{(a'-\beta)^2}.$$

ce qui montre que $\alpha$ et $\beta$, paramètres des points doubles, sont racines d'une équation du second degré de la forme

$$(\mu-a)^2-h(\mu-a')^2=0.$$

$h$ étant la valeur commune des rapports précédents.

D'après la règle de passage de l'équation aux paramètres des points doubles à la relation involutive, nous voyons que la relation involutive se met sous la forme

$$(\lambda-a)(\lambda'-a)-h(\lambda-a')(\lambda'-a')=0.$$

4° Soient deux couples de points correspondants M et M′, de paramètres $\lambda$ et $\lambda'$, N et N′, de paramètres $\mu$ et $\mu'$. On a à la fois

$$(\lambda-a)(\lambda'-a)=h(\lambda-a')(\lambda'-a'),$$
$$(\mu-a)(\mu'-a)=h(\mu-a')(\mu'-a'),$$

d'où, par division membre à membre,

$$\frac{(\lambda-a)(\lambda'-a)}{(\mu-a)(\mu'-a)}=\frac{(\lambda-a')(\lambda'-a')}{(\mu-a')(\mu'-a')}.$$

Il en résulte, si l'on change de notation, que la relation involutive peut s'écrire

$$\frac{(\lambda-a)(\lambda-a')}{(\lambda-b)(\lambda-b')}=\frac{(\lambda'-a)(\lambda'-a')}{(\lambda'-b)(\lambda'-b')},$$

$a$ et $a'$, $b$ et $b'$ étant les paramètres de deux couples fixes de points correspondants.

Posons

$$(\lambda-a)(\lambda-a')=f(\lambda),\qquad (\lambda-b)(\lambda-b')=g(\lambda).$$

La relation précédente s'écrit

$$\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}=\frac{f(\lambda')}{g(\lambda')},$$

ce qui montre que $\lambda$ et $\lambda'$ sont racines d'une équation variable du second degré

$$f(\lambda)-\rho g(\lambda)=0,$$

$\rho$ étant un paramètre arbitraire.

5° Réciproquement, si $\lambda$ et $\lambda'$ sont racines d'une équation du second degré de la forme $f(\lambda) - \rho g(\lambda) = 0$, où $\rho$ est un paramètre variable, il existe entre $\lambda$ et $\lambda'$ une relation involutive. En effet, on a

$$\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{f(\lambda')}{g(\lambda')},$$

d'où

$$f(\lambda)g(\lambda') - f(\lambda')g(\lambda) = 0.$$

Posons

$$f(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C, \qquad g(\lambda) = A'\lambda^2 + B'\lambda + C'.$$

Si l'on remarque que $f(\lambda)g(\lambda') - f(\lambda')g(\lambda)$ est divisible par $\lambda - \lambda'$, si l'on développe en mettant en évidence le facteur $\lambda - \lambda'$ dans la différence de deux termes déduits l'un de l'autre par la permutation de $\lambda$ et de $\lambda'$, si l'on divise ensuite par $\lambda - \lambda'$, il reste la relation involutive

$$\lambda\lambda'(AB' - BA') + (\lambda + \lambda')(AC' - CA') + BC' - CB' = 0,$$

qui n'est identique que si l'on a

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

c'est-à-dire si $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont proportionnels.

6° Proposons-nous de déterminer les points doubles d'une involution définie au moyen d'une équation de la forme

$$f(\lambda) - \rho g(\lambda) = 0.$$

Il suffit de disposer de $\rho$ de façon que l'équation du second degré en $\lambda$ ait ses racines égales, c'est-à-dire de façon que les dérivées partielles du premier membre par rapport à $\lambda$ et par rapport à une variable d'homogénéité $\nu$ que nous regarderons ensuite comme égale à 1, aient une racine commune. On a ainsi simultanément

$$f'_\lambda - \rho g'_\lambda = 0, \qquad f'_\nu - \rho g'_\nu = 0.$$

On doit donc avoir l'égalité

$$f'_\lambda g'_\nu - f'_\nu g'_\lambda = 0.$$

Telle est l'équation du second degré aux paramètres des points doubles. On reconnaît, tous calculs effectués, que cette équation est

$$\lambda^2(AB' - BA') + 2\lambda(AC' - CA') + BC' - CB' = 0.$$

7° Voici une autre méthode pour traiter les deux derniers problèmes. On peut mettre l'équation $f(\lambda) - \rho g(\lambda) = 0$ sous la forme

$$(A - A'\rho)\lambda^2 + (B - B'\rho)\lambda + C - C'\rho = 0.$$

On en déduit

$$\lambda + \lambda' = -\frac{B - B'\rho}{A - A'\rho}, \qquad \lambda\lambda' = \frac{C - C'\rho}{A - A'\rho}.$$

On voit ainsi qu'on peut regarder $\lambda + \lambda'$ et $\lambda\lambda'$ comme les coordonnées cartésiennes d'un point variable d'une droite. Il existe donc entre $\lambda\lambda'$ et $\lambda + \lambda'$ une relation entière et du premier degré, c'est-à-dire une relation involutive entre $\lambda$ et $\lambda'$.

On a les points doubles de l'involution en exprimant que l'équation du second degré en $\lambda$ a ses racines égales. On obtient la condition

$$(B - B'\rho)^2 - 4(A - A'\rho)(C - C'\rho) = 0,$$

ou

$$(B'^2 - 4A'C')\rho^2 - 2\rho(BB' - 2AC' - 2CA') + B^2 - 4AC = 0.$$

On obtient ainsi deux valeurs de $\rho$. L'équation correspondante $f(\lambda) - \rho g(\lambda) = 0$ admet une racine double qui est aussi racine de l'équation dérivée $f'(\lambda) - \rho g'(\lambda) = 0$, laquelle est du premier degré et donne le paramètre $\lambda$ du point double correspondant en fonction de $\rho$.

7. *Distinction entre les involutions à points doubles réels et les involutions à points doubles imaginaires conjugués.* — Supposons que la droite qui porte l'involution soit réelle et que les coefficients de la relation involutive soient réels; alors, l'involution contient une infinité de couples réels. Prenons comme paramètre d'un point M l'abscisse $x$ de ce point à partir d'une origine prise sur la droite, et supposons que la relation entre les abscisses $x$ et $x'$ de deux points M et M′ correspondants soit de la forme

$$Axx' + B(x + x') + C = 0,$$

A étant différent de 0. L'involution admet alors deux points doubles à distance finie.

Nous avons vu que si $a$ et $a'$ sont les abscisses de deux points fixes correspondants P et P′, la relation involutive peut s'écrire

$$\frac{(x-a)(x'-a)}{(x-a')(x'-a')} = h.$$

Nous supposons $a$ et $a'$ réels; alors, $h$ est réel. De cette relation, on déduit l'équation aux abscisses des points doubles

$$\frac{(x-a)^2}{(x-a')^2} = h.$$

Pour que les points doubles soient réels et distincts, il faut et il suffit que l'on ait $h > 0$. Si $h < 0$, les points doubles sont imaginaires conjugués; si $h = 0$, l'involution est singulière.

Donc, dans une involution à points doubles réels et distincts, entre deux couples de points correspondants M et M′ d'abscisses $x$ et $x'$, P et P′ d'abscisses $a$ et $a'$, on a l'inégalité

$$\frac{(x-a)(x'-a)}{(x-a')(x'-a')} > 0.$$

Cette inégalité exprime que les deux segments MM′ et PP′ *n'empiètent pas l'un sur l'autre.*

Au contraire, dans une involution à points doubles imaginaires conjugués, deux segments limités par des couples de points correspondants *empiètent l'un sur l'autre.*

Ces deux cas s'excluant l'un l'autre, les réciproques sont vraies.

Lorsque $h = 0$, l'involution est singulière; deux segments limités par des couples de points correspondants ont une extrémité commune.

Nous avons supposé $A \neq 0$. Si $A = 0$ la relation involutive se réduit à

$$B(x + x') + C = 0.$$

L'un des points doubles est à l'infini. La relation exprime que le milieu de tout segment MM′ est fixe; il coïncide d'ailleurs avec le second point double. Dans ce cas encore, deux segments tels que MM′ n'empiètent pas l'un sur l'autre.

8. Théorème. — *Il existe une involution et une seule contenant deux couples de points donnés distincts.* Si $A\lambda\lambda' + B(\lambda + \lambda') + C = 0$ est la relation qui définit l'involution cherchée, et si $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ sont les paramètres des deux couples de points P, P′ et Q, Q′, on a

$$A\alpha\alpha' + B(\alpha + \alpha') + C = 0,$$
$$A\beta\beta' + B(\beta + \beta') + C = 0.$$

C'est un système de deux équations linéaires et homogènes aux inconnues A, B, C. Si les couples P, P′ et Q, Q′ sont distincts, l'un au moins des déterminants mineurs déduits du tableau rectangulaire formé par les coefficients des inconnues n'est pas nul, et le système admet une infinité de solutions proportionnelles entre elles qui définissent une seule et même involution contenant les deux couples de points donnés.

9. Théorème. — *Deux involutions distinctes ont un couple de points commun et un seul.*

Soient

$$A\lambda\lambda' + B(\lambda + \lambda') + C = 0, \qquad A'\lambda\lambda' + B'(\lambda + \lambda') + C' = 0$$

les relations qui définisssent les deux involutions. Ces deux relations forment un système d'équations

linéaires aux inconnues $\lambda\lambda'$ et $\lambda + \lambda'$. Comme A, B, C ne sont pas proportionnels à A′, B′, C′, ce système admet une solution et une seule, finie ou infinie. Il en résulte une solution et une seule en $\lambda$ et $\lambda'$.

**10.** *Droites en involution.* — En vertu du principe de dualité, la théorie précédente s'applique sans modification aux droites variables autour d'un point fixe, du moins dans les parties où il ne s'agit pas de distinguer les éléments, points ou droites, à l'infini des autres éléments du plan.

## SUR LES DÉRIVÉES DE LA FONCTION $x^p \times f(u)$, $u = \text{Log } x$.

par M. **G. Fontené**.

**1.** Dans le *Recueil d'exercices* de Frenet, la dérivée d'ordre $n$ de la fonction $y = x^p \text{Log } x$ est calculée au moyen de la formule de Leibniz relative à la dérivée d'un produit : cela donne un expression compliquée pour la constante $A_1$ dont on trouvera plus loin une expression très simple. En considérant la fonction

$$(1) \qquad y = x^p \times f(u), \qquad u = \text{Log } x,$$

comme on a $u' = \frac{1}{x}$, on voit qu'il vaut mieux procéder de proche en proche à cause des réductions $x^p \times \frac{1}{x} = x^{p-1}, \ldots,$ qui s'effectuent dans le cours du calcul; d'ailleurs, la présence du facteur $x^p$ n'a qu'une importance secondaire. Le résultat auquel on arrive peut s'énoncer ainsi :

La dérivée d'ordre $n$ de la fonction $y$ a pour expression

$$(2) \qquad y^{(n)} = p(p-1)\ldots(p-n+1)x^{p-n}[f(u) + A_1 f'(u) + A_2 f''(u) + \cdots + A_n f^{(n)}(u)],$$

les A étant les coefficients des puissances de $h$ dans le développement du produit

$$P = \left(1 + \frac{h}{p}\right)\left(1 + \frac{h}{p-1}\right)\cdots\left(1 + \frac{h}{p-n+1}\right).$$

**2.** L'exemple cité au début fait bien comprendre le rôle du produit P. Soit

$$y = x^p \times \text{Log } x;$$

considérons Log $x$ comme la limite d'une expression algébrique, et écrivons

$$y = \lim_{h=0} \frac{x^p(x^h - 1)}{h},$$

ou encore

$$y = \lim_{h=0} \frac{x^{p+h} - x^p}{h};$$

on a immédiatement

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= p(p-1)\ldots(p-n+1)x^{p-n} \lim_{h=0} \frac{Px^h - 1}{h} \\ &= p(p-1)\ldots(p-n+1)x^{p-n} \lim_{h=0}\left[P\frac{x^h - 1}{h} + \frac{P-1}{h}\right] \\ &= p(p-1)\ldots(p-n+1)x^{p-n}(\text{Log } x + A_1), \end{aligned}$$

$A_1$ étant le coefficient de $h$ dans le développement du produit P.

Un calcul analogue pourrait être fait pour la fonction

$$y = x^p \times (\text{Log } x)^m.$$

$m$ étant entier et positif, et l'on passerait de là au cas où l'expression $f(u)$ est un polynome entier en $u$.

**3**. Lorsque $p$ est entier et positif, ou nul, dès que l'on prend $n$ supérieur à $p$, l'expression (2) prend la forme illusoire $0 \times \infty$; cela tient à ce que l'on a mis en évidence le facteur $p(p-1)\ldots(p-n+1)$. Il faut alors supprimer le facteur nul dans ce produit, et remplacer le crochet par l'expression

$$f(u) + B_1 f'(u) + B_2 f''(u) + \cdots + B_{n-1} f^{(n-1)}(u),$$

les B étant les coefficients des puissances de $h$ dans le développement d'un produit Q qui diffère du produit P par la suppression du facteur infini.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1186.** — *Étant donnés dans le plan des $xy$ l'ellipse* (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *et dans le plan variable* $z = mx$ *le cercle* (C) *décrit sur l'axe de l'ellipse comme diamètre :*

1° *Discuter la nature de la quadrique de révolution* (S) *qui passe par les coniques* (C) *et* (E).

2° *Trouver les lieux des foyers et des sommets des méridiennes du plan des $zx$ des quadriques* (S).

3° *Trouver le lieu des génératrices des surfaces* (S) *qui passent par un point donné de l'ellipse* (E).

4° *En supposant que $b$ varie en même temps que $m$ et que la quadrique* (S) *soit un cylindre, trouver l'enveloppe des génératrices de ce cylindre contenues dans un plan fixe parallèle au plan des $zx$.*

**1**. Les coniques (C) et (E) ayant même centre O, toute quadrique passant par ces deux coniques a aussi pour centre le point O. Si, de plus, la quadrique est de révolution, le plan du cercle (C) est le plan principal perpendiculaire à l'axe de révolution, et la quadrique est circonscrite le long du cercle (C) à la sphère qui admet (C) pour grand cercle. Il en résulte que l'équation de la quadrique (S) est de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - b^2 + \lambda(z - mx)^2 = 0,$$

$\lambda$ étant déterminé par la condition que la surface contienne l'ellipse (E). On obtient ainsi aisément $\lambda = -\frac{c^2}{a^2m^2}$, $c^2$ désignant comme d'habitude la différence $a^2 - b^2$.

L'équation de la surface (S) est donc

$$x^2 + y^2 + z^2 - b^2 - \frac{c^2}{a^2m^2}(z - mx)^2 = 0,$$

ou, en développant,

$$b^2m^2x^2 + a^2m^2y^2 + (a^2m^2 - c^2)z^2 + 2mc^2xz - a^2b^2m^2 = 0.$$

Pour déterminer la nature de cette quadrique, on peut décomposer en carrés le premier membre de son équation, on obtient sans difficulté

$$\left(bmx + \frac{c^2}{b}z\right)^2 + a^2m^2y^2 + a^2\left(m^2 - \frac{c^2}{b^2}\right)z^2 - a^2b^2m^2 = 0.$$

On voit ainsi que si $m^2$ est plus petit que $\frac{c^2}{b^2}$, la surface (S) est un hyperboloïde à une nappe ; si $m^2$ est plus grand que $\frac{c^2}{b^2}$, cette surface est un ellipsoïde ; enfin dans le cas limite où $m^2$ est égal à $\frac{c^2}{b^2}$, la surface est un cylindre.

**2**. La méridienne située dans le plan des $zx$ a pour équation

$$f(x, z) \equiv b^2m^2x^2 + (a^2m^2 - c^2)z^2 + 2mc^2xz - a^2b^2m^2 = 0.$$

*Lieu des sommets.* — Les axes de cette conique sont les droites $z = mx$ et $z = -\frac{1}{m}x$. Nous aurons donc le lieu des sommets en remplaçant dans l'équation de la conique $m$ successivement par $\frac{z}{x}$ et par $-\frac{x}{z}$.

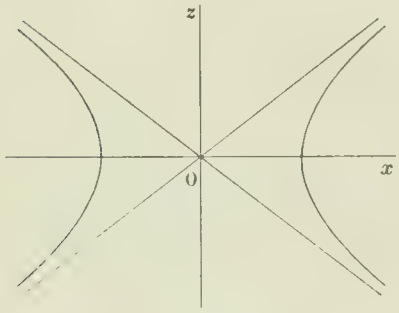
En remplaçant $m$ par $\frac{z}{x}$, on obtient

$$x^2 + z^2 - b^2 = 0,$$

équation qui représente un cercle. En remplaçant ensuite $m$ par $-\frac{x}{z}$, on a

$$(x^2 + z^2)(b^2x^2 - c^2z^2) - a^2b^2x^2 = 0,$$

qui représente une courbe du quatrième degré symétrique par rapport aux axes $Ox$ et $Oz$. On la construit aisément en la coupant par des droites passant par l'origine $z = tx$. Les asymptotes sont en évidence, ce sont les droites $b^2x^2 - c^2z^2 = 0$. Enfin l'origine est un point double isolé, et les tangentes sont confondues avec $Oz$.




Le lieu cherché se compose donc d'un cercle et d'une courbe du quatrième degré.

*Lieu des foyers.* — On peut déterminer les foyers par l'intersection des axes et d'une des hyperboles focales, par exemple

$$f'_x f'_z - 4mc^2 f(x, z) = 0,$$

ou

$$(b^2m^2x + mc^2z)(a^2m^2 - c^2)z + mc^2x) - mc^2(b^2m^2x^2 + (a^2m^2 - c^2)z^2 + 2mc^2xz - a^2b^2m^2) = 0$$

ou, en simplifiant

$$(b^2m^2 - c^2)xz + b^2c^2m = 0\,;$$

il n'y a plus qu'à remplacer dans cette équation $m$ successivement par $\frac{z}{x}$ et par $-\frac{x}{z}$ pour avoir le lieu des foyers. On trouve ainsi les deux coniques

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad \frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0.$$

**3.** Les génératrices de la surface (S) qui passent par le point $P(x_0, y_0, 0)$ de l'ellipse (E) sont à l'intersection de la surface et du plan tangent au point P.

Reprenons l'équation de la surface sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = \frac{c^2}{a^2m^2}(z - mx)^2\,;$$

celle du plan tangent au point P est

$$xx_0 + yy_0 - b^2 = -\frac{c^2x_0(z - mx)}{a^2m}\,;$$

et pour avoir le lieu des génératrices qui passent par le point P, il suffit d'éliminer $m$ entre ces deux équations. Cette élimination se fait très simplement en élevant les deux membres de la seconde équation au carré et en divisant membre à membre. On obtient

$$(xx_0 + yy_0 - b^2)^2 - \frac{c^2x_0^2}{a^2}(x^2 + y^2 + z^2 - b^2) = 0.$$

Il est aisé de voir que cette équation représente le cône qui a pour sommet le point P et qui est circonscrit à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0$. En effet l'équation de ce cône est

$$(xx_0 + yy_0 - b^2)^2 - (x_0^2 + y_0^2 - b^2)(x^2 + y^2 + z^2 - b^2) = 0.$$

Mais comme le point P est sur l'ellipse (E), on a

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad y_0^2 - b^2 = -\frac{b^2x_0^2}{a^2}$$

et par suite $x_0^2 + y_0^2 - b^2 = x_0^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2} = \frac{c^2x_0^2}{a^2}$.

**4.** La surface (S) est un cylindre quand on a $m^2 = \frac{c^2}{b^2}$ ou $b^2 = \frac{a^2}{m^2 - 1}$, et par suite $c^2 = \frac{a^2m^2}{m^2 + 1}$. Remplacons $b^2$ et $c^2$ par ces valeurs dans l'équation de (S), nous obtenons, toutes réductions faites,

$$x^2 + y^2(m^2 - 1) + m^2z^2 + 2mxz - a^2 = 0.$$

Le plan $y = h$ coupe ce cylindre suivant les deux droites

$$x^2 + m^2z^2 + 2mxz + h^2(m^2 - 1) - a^2 = 0,$$

et pour avoir leur enveloppe, nous ordonnons cette équation par rapport à $m$, ce qui donne

$$m^2(z^2 + h^2) + 2mxz + x^2 + h^2 - a^2 = 0,$$

et nous écrivons que cette équation a une racine double. Nous avons ainsi

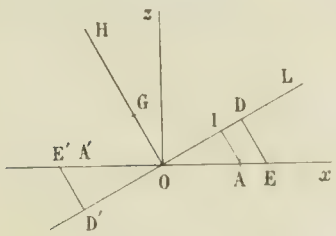
$$x^2z^2 - (z^2 + h^2)(x^2 + h^2 - a^2) = 0$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2 - h^2} - \frac{z^2}{h^2} - 1 = 0.$$

Cette équation représente une hyperbole si $h^2$ est plus petit que $a^2$ et une ellipse imaginaire si $h^2$ est plus grand que $a^2$.

**Remarques géométriques.** — **1.** Nous avons vu plus haut que la surface (S) était circonscrite le long du cercle (C) à la sphère (Σ) qui a pour centre le point O et pour rayon $b$. Soit OL la trace du plan du cercle (C) sur le plan des $zx$; désignons par D et D′ les points de rencontre de cette droite et de la surface, nous avons $OD = OD' = b$. La perpendiculaire OH à la droite OL dans le plan $zOx$ est l'axe de révolution.




Puisque le plan de l'équateur coupe la surface suivant un cercle réel, cette surface ne peut être qu'un ellipsoïde, ou un hyperboloïde à une nappe, ou un cylindre. La nature de cette surface sera donc bien indiquée par la nature de sa méridienne dans le plan des $zx$. Or cette courbe a pour sommets D, D′ et passe par les sommets A et A′ (situés sur $Ox$) de l'ellipse (E). Par le point D menons une perpendiculaire à OL, et désignons par E le point où cette droite rencontre OA. Si $OE < OA$, la méridienne est une hyperbole ; si $OE > OA$, c'est une ellipse ; si $OE = OA$, la méridienne se compose de deux droites parallèles. Posons $\alpha = \widehat{xOL}$, nous avons $\operatorname{tg}\alpha = m$, et $OE = \frac{OD}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha}$ ou $OE = b\sqrt{m^2 + 1}$. La condition $OE < OA$ équivaut à $b\sqrt{m^2 + 1} < a$ ou $m^2 < \frac{c^2}{b^2}$. Nous retrouvons les conditions obtenues précédemment.

**2.** *Lieu des sommets.* — Le lieu des points D et D′ est le cercle de centre O et de rayon $b$. Cherchons maintenant le lieu des sommets situés sur l'axe de révolution OH. Pour que ces sommets soient réels il faut que la méridienne soit une ellipse. Soit G l'un de ces sommets ; comme la méridienne passe par le point A, nous avons entre les coordonnées OI et IA de ce point par rapport aux axes OG et OD la relation

$$\frac{\overline{IA}^2}{\overline{OG}^2} + \frac{\overline{OI}^2}{\overline{OD}^2} = 1.$$

Soient $\rho$ et $\omega$ les coordonnées polaires de G par rapport à l'axe polaire $Ox$, $\rho = OG$, $\omega = \widehat{xOG}$. Nous avons $IA = OA \sin\widehat{xOL} = -a\cos\omega$, $OI = a\sin\omega$, et par suite

$$\frac{a^2\cos^2\omega}{\rho^2} + \frac{a^2\sin^2\omega}{b^2} = 1,$$

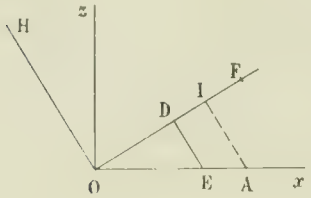
ou

$$\rho^2 = \frac{a^2b^2\cos^2\omega}{b^2 - a^2\sin^2\omega}.$$

C'est l'équation en coordonnées polaires du lieu du point G.

*Lieu des foyers.* — Si la méridienne est une hyperbole, les foyers réels sont situés sur l'axe OD; désignons par F l'un de ces points et cherchons le lieu de ce point en coordonnées polaires, $\rho = OF$, $\omega = \widehat{xOF}$.

Nous aurons dans cette hypothèse




$$\frac{\overline{OI}^2}{b^2} - \frac{\overline{IA}^2}{\rho^2 - b^2} = 1,$$

ou

$$\frac{a^2 \cos^2 \omega}{b^2} - \frac{a^2 \sin^2 \omega}{\rho^2 - b^2} = 1,$$

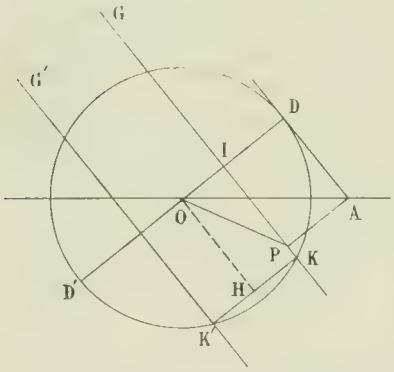
ou, en passant en coordonnées rectilignes,

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Si la méridienne est une ellipse, OD est son petit axe puisque $OD < OA$, les foyers réels sont sur OH. On pourrait avoir le lieu de ces points par un procédé analogue au précédent, mais il est plus simple d'observer que si $\Phi$ désigne l'un de ces foyers, le cône ayant pour sommet ce point et pour directrice l'ellipse (E) est de révolution (*). Par suite le lieu du point $\Phi$ coïncide avec le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par l'ellipse (E). On sait que ce lieu est une hyperbole, située dans le plan perpendiculaire au plan de l'ellipse mené par le grand axe de cette ellipse, et admettant pour sommets les foyers de l'ellipse et pour foyers les sommets de l'ellipse.

**3.** Toute génératrice de la surface (S) est tangente à la sphère ($\Sigma$) au point où elle rencontre le cercle (C). Le lieu des génératrices passant par le point P est donc le cône de sommet P et circonscrit à la sphère.

**4.** Si la surface (S) est un cylindre, la perpendiculaire menée au point D à la droite OD passe par le point A, et les génératrices sont parallèles à DA. Coupons ce cylindre par un plan parallèle au plan $zOx$ et à une distance $h$ de ce plan. Il est aisé de construire les projections sur le plan des $zx$ des génératrices d'intersection.




Il suffit pour cela de rabattre le plan du cercle (C) sur le plan $zOx$ autour de DD'. Sur la perpendiculaire à DD' menée par le point O nous prenons $OH = h$; par le point H nous menons une parallèle à DD' qui rencontre le cercle rabattu aux points K et K', et par ces points nous menons des parallèles G et G' à AD. Ce sont les droites cherchées. Elles ne sont réelles que si $h < OD$, ou $h < a$.

Cela posé, abaissons AP perpendiculaire sur G, je dis que OP est constant. En effet

$$\overline{OP}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{IP}^2.$$

Or

$$\overline{OI}^2 = \overline{HK}^2 = \overline{OK}^2 - \overline{OH}^2 = b^2 - h^2,$$

$$\overline{IP}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OD}^2 = a^2 - b^2,$$

donc

$$\overline{OP}^2 = a^2 - h^2.$$

Le lieu du point P est donc un cercle ($\Gamma$), et par suite l'enveloppe de la droite G est une conique admettant le point A pour foyer et le cercle ($\Gamma$) comme cercle principal. Comme le point A est extérieur à ce cercle, la conique est une hyperbole.

J. HAAG, soldat au 69e de ligne, à Nancy.

Bonnes solutions par MM. R. Bouvaist; Dulimbert, à Grenoble; J. Marchal.

---

**1191.** — *On considère la droite* D *qui, rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires, a pour équations* $z = 0$, $x = a$.

*1° Équation de la surface* S *engendrée par les droites* $\Delta$ *qui rencontrent la droite* D, *l'axe des* $z$ *et font avec ce dernier l'angle constant* $\alpha$.

*2° Construire les sections de la surface* S *par des plans parallèles aux plans de coordonnées et les définir géométriquement.*

---

(*) D'après le théorème suivant : Étant donnée une quadrique de révolution, le cône qui a pour sommet un foyer de la méridienne *situé sur l'axe de revolution* et pour directrice une section plane quelconque de la quadrique est de révolution.

*3° Construire le contour apparent de la surface* S *sur le plan des* $yz$.

*4° Enveloppe des plans directeurs, menés par l'origine, des paraboloïdes des normales de la surface* S, *le lieu de leurs sommets et le lieu de leurs axes.*

**1°** Désignons par $\lambda$ l'ordonnée du point où la droite rencontre $Oz$ et par $u, v, w$ les paramètres directeurs de cette droite ; les équations de cette droite seront

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z-\lambda}{w},$$

et nous aurons d'abord

$$\cos^2\alpha = \frac{w^2}{u^2+v^2+w^2};$$

puis, en écrivant que la droite rencontre celle dont les équations sont $z=0$, $x=a$,

$$aw - u\lambda = 0.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer $u, v, w$ et $\lambda$ entre ces équations ; l'élimination de $u, v, w$ donne d'abord

$$x^2+y^2 = (z-\lambda)^2 \operatorname{tg}^2\alpha,$$
$$a(z-\lambda) + zx = 0;$$

la seconde donne $\lambda = \dfrac{az}{a-x}$ et la première devient ensuite

$$(x^2+y^2)x - a^2 = k^2x z^2, \tag{1}$$

en posant

$$k = \operatorname{tg}\alpha.$$

Telle est l'équation de la surface : elle représente une surface du quatrième degré qui admet pour lignes doubles l'axe des $z$ et la droite D.

**2°** La section par le plan $z=0$ se compose de deux fois la droite D et des deux droites isotropes issues de l'origine.

La section par le plan $z=h$ se projette suivant la courbe

$$(x-a)^2(x^2+y^2) - k^2h^2x = 0,$$

en posant $b = kh$ ; cette équation peut aussi être regardée comme étant celle de la section dans son plan, quand on prend pour axes deux parallèles à $Ox$ et $Oy$. En transformant l'équation à l'aide des coordonnées polaires, on obtient $\rho = \dfrac{a}{\cos\omega} + b$, ce qui montre que la projection sur le plan des $xy$ est une conchoïde de Nicomède ayant pour pôle le point O et pour directrice la droite D. Si $b < a$, le point O est un point double isolé ; si $b > a$, c'est un point double ordinaire, et enfin, si $b = a$, c'est un point de rebroussement.

La section par le plan $x=0$, se compose de deux fois l'axe des $z$ et de deux fois la droite à l'infini du plan des $yz$ ; il fallait s'attendre à ce dernier résultat, car cette droite à l'infini est aussi une génératrice double de la surface. La section par le plan $x=h$ a pour projection sur le plan des $yz$

$$(h-a)^2(h^2+y^2) - k^2h^2z^2 = 0;$$

c'est une hyperbole dont les axes sont fixes.

La section par le plan des $zx$, $y=0$, se compose de deux fois l'axe des $z$ et de deux autres droites $x-a = \pm kz$ dont nous expliquerons l'existence géométriquement. La section par un plan parallèle, $y=h$, a pour équation

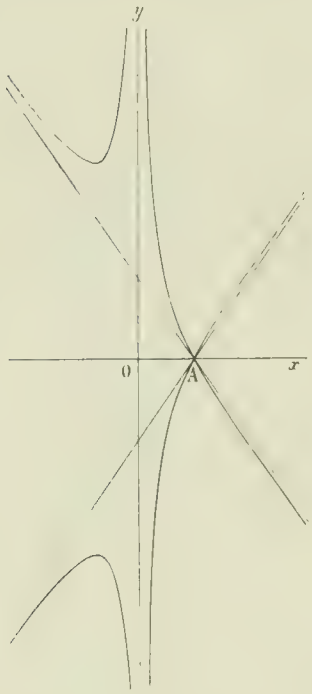
$$(x-a)^2(x^2+h^2) - k^2z^2x^2 = 0;$$

c'est une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à $Ox$, ayant pour asymptotes les deux droites $x-a = \pm kz$, c'est-à-dire les deux droites de la surface qui sont dans le plan des $zx$, et ayant pour point double le point de $Ox$ dont l'abscisse est $a$. L'équation, résolue par rapport à $z$, donne

$$z^2 = \frac{(x-a)^2(x^2+h^2)}{k^2x^2};$$

nous voyons que $z$ est toujours réel, qu'il est nul pour $x=a$, infini pour $x=\pm\infty$ et pour

$x = 0$ ; nous pouvons donc penser que $z^2$ part de l'infini, décroît jusqu'à un certain minimum, et croît jusqu'à $+\infty$, quand $x$ varie de $-\infty$ à $0$ ; puis, que $z^2$ décroît de l'infini à $0$, quand $x$ varie de $0$ à $a$ ; et enfin qu'il croît de $0$ à $+\infty$, quand $x$ va de $a$ à $+\infty$. Il n'y a qu'à prendre la dérivée de $z^2$ pour vérifier tous ces résultats ; le minimum a lieu pour $x = -\sqrt[3]{ah^2}$. La courbe est dès lors aisée à figurer. Quand $h$ augmente, les coordonnées du point où $z^2$ est minimum vont en augmentant.




3. Les points du contour apparent relatif au plan des $yz$ sont ceux pour lesquels $f'_x = 0$. Ces points vérifient donc les deux équations

$$(x-a)^2(x^2+y^2) - k^2x^2z^2 = 0,$$

et

$$(x-a)(x^2+y^2) + x(x-a)^2 - k^2xz^2 = 0.$$

Nous aurons le contour apparent sur le plan des $yz$ en éliminant $x$ entre ces deux équations ; or la première donne $k^2xz^2 = \dfrac{(x-a)^2(x^2+y^2)}{x}$ ; en portant cette valeur dans la seconde et supprimant le facteur $x-a$, il vient d'abord

$$x^2(x-a) + a(x^2+y^2) = 0,$$

puis

$$x^3 + ay^2 = 0.$$

Multiplions l'équation de la surface par $x-a$ et remplaçons dans le dernier terme $x^2(x-a)$ par $-a(x^2+y^2)$, nous aurons

$$(x-a)^3 + ak^2z^2 = 0.$$

Nous avons donc successivement

$$x = -\sqrt[3]{ay^2}, \qquad x = a - \sqrt[3]{ak^2z^2} ;$$

par conséquent l'équation du contour apparent est

$$\sqrt[3]{ak^2z^2} - \sqrt[3]{ay^2} = a,$$

ou

$$2 \qquad kz)^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Cette équation représente la développée d'une hyperbole, de l'hyperbole

$$\frac{z^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

où

$$\alpha = \frac{ak}{k^2-1} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{a}{k^2+1}.$$

4. On sait que les normales à une surface réglée le long d'une génératrice engendrent un paraboloïde droit que l'on obtient en considérant cette génératrice, G, et la génératrice infiniment voisine G', puis une droite qui glisse sur les deux en restant perpendiculaire à G ; cela donne d'abord un paraboloïde droit qui se raccorde avec la surface tout le long de G ; on le fait tourner ensuite d'un angle droit autour de G. Appelons P le premier paraboloïde, et $P_1$ le second.

Les plans directeurs de P sont le plan normal à G et le plan mené par G parallèlement à la génératrice infiniment voisine G' ; ceux de $P_1$ s'obtiendront en faisant tourner ceux-ci d'un angle droit autour de G.

Or, si on pose $y = x \operatorname{tg} \varphi$, l'équation de la surface donne $x - a = \pm kz \cos\varphi$ ; nous pouvons donc prendre pour équations générales des génératrices

$$y = x \operatorname{tg} \varphi \qquad \text{et} \qquad x - a = kz \cos \varphi.$$

Les paramètres directeurs de cette droite sont $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\frac{1}{k}$ et ceux de G′ $\cos\varphi + \Delta\cos\varphi$, $\sin\varphi + \Delta\sin\varphi$ et $\frac{1}{k}$ ; le plan qui contient leurs directions est donc

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\varphi & \sin\varphi & \frac{1}{k} \\ \cos\varphi + \Delta\cos\varphi & \sin\varphi + \Delta\sin\varphi & \frac{1}{k} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\varphi & \sin\varphi & \frac{1}{k} \\ \Delta\cos\varphi & \Delta\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

si nous divisons la dernière ligne par $\Delta\varphi$ et que nous fassions tendre $\Delta\varphi$ vers 0, nous aurons, à la limite,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\varphi & \sin\varphi & \frac{1}{k} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - kz = 0.$$

Le plan directeur de $P_1$ contient la normale à ce plan et la direction de G : il a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\varphi & \sin\varphi & -k \\ \cos\varphi & \sin\varphi & \frac{1}{k} \end{vmatrix} = 0.$$

ou
$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0.$$

L'autre plan directeur est perpendiculaire à la droite G. Les deux plans directeurs de $P_1$ sont donc

$$(3) \qquad \begin{cases} x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0, \\ x\cos\varphi + y\sin\varphi + \frac{z}{k} = 0; \end{cases}$$

le premier enveloppe l'axe des $z$, le second enveloppe le cône

$$(4) \qquad x^2 + y^2 = \frac{z^2}{k^2}.$$

Le sommet du paraboloïde $P_1$ coïncide avec celui du paraboloïde P ; il est à l'intersection de la génératrice G avec celle de l'autre système qui est perpendiculaire au plan directeur relatif à la droite G ; or celui-ci a pour équation

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0;$$

il faut donc trouver les équations de la normale qui est perpendiculaire à ce plan : ce sont

$$(X - x)\cos\varphi + (Y - y)\sin y = 0$$
$$Z - z = 0,$$

$(x, y, z)$ étant le pied de cette normale, point qui, par hypothèse, est situé sur la droite G. D'ailleurs les coordonnées du pied de la normale vérifient les équations $f'_x\cos\varphi + f'_y\sin\varphi = 0$ et $f'_z = 0$ ; la dernière est indépendante de $\varphi$ ; donc, avec l'équation de la surface $f(x, y, z) = 0$, elle définit le lieu du sommet. Or $f'_z = 0$ se réduit à $x^2z = 0$ ; le lieu des sommets est donc la droite D, ou Oz, ou les deux. Or pour $z = 0$, $x = 0$, les trois dérivées partielles sont nulles ; par suite les équations $f'_x\cos\varphi + f'_y\sin\varphi = 0$ et $f'_z = 0$, tout en étant vérifiées, n'expriment pas que la normale est parallèle à la direction $\sin\varphi$, $-\cos\varphi$, 0. Cela n'a pas lieu pour les points de $Oz$ ; donc le lieu des sommets se confond avec $Oz$.

Le point de rencontre de G avec $Oz$ a pour coordonnées $0, 0, \frac{-a}{k\cos\varphi}$; la direction de l'axe a pour paramètres $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $-k$; donc l'axe lui-même a pour équations

$$\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi} = \frac{z + \frac{a}{k\cos\varphi}}{-k}.$$

En égalant le premier rapport au dernier, on trouve

$$\cos\varphi = -\frac{k^2x + a}{kz};$$

puis, en égalant les deux premiers,

$$\sin\varphi = -\frac{k^2x + a}{kz}\,\frac{y}{x}.$$

Le lieu de l'axe a donc pour équation

$$(5) \qquad (k^2x + a)^2(x^2 - y^2) = k^2x^2z^2.$$

C'est une surface de même nature que la surface donnée : elle s'en déduit en changeant $a$ en $a' = -\frac{a}{k}$ et $k$ en $\frac{1}{k}$.

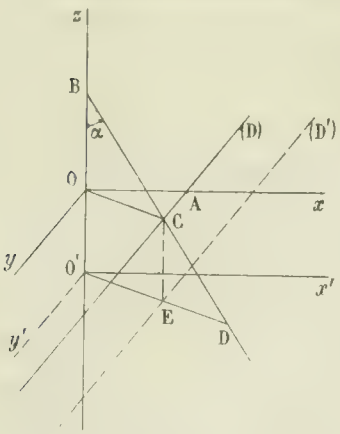
**Bonnes solutions : MM. J. Haag, à Nancy ; Parrod, à Vesoul.**
**Solution satisfaisante : M. J. Ména, lycée de Nancy.**

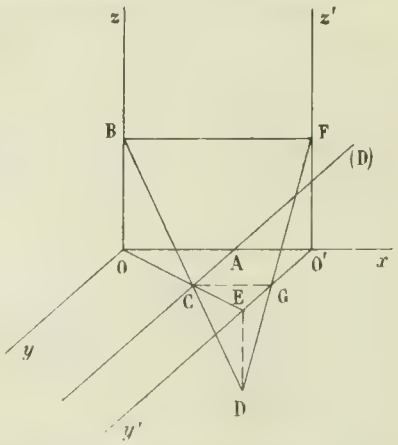
**Solution géométrique.** — **1.** Par tout point de $Oz$ il passe deux génératrices : ce sont les deux génératrices du cône de révolution ayant son sommet en ce point, pour axe, $Oz$ et pour demi-angle au sommet, $\alpha$, qui s'appuient sur la droite D. De même, par tout point de D il passe deux génératrices : les deux droites issues de ce point dans le plan mené par $Oz$ et par ce point, et faisant avec $Oz$ l'angle $\alpha$ ; elles forment un triangle isocèle dont la base est sur $Oz$ et dont l'angle au sommet est le supplément de $2\alpha$.

Il résulte de là que $Oz$ et D sont deux lignes doubles de la surface. Si on mène un plan passant par la droite $Oz$, ce plan coupe la surface suivant deux droites confondues avec $Oz$ et suivant deux autres droites. Cette section est du quatrième ordre ; donc la surface elle-même est du quatrième ordre.

Si on considère un plan passant par $Oz$ et infiniment voisin du plan des $yz$, les deux génératrices qui sont dans ce plan sont infiniment éloignées ; la surface a donc deux génératrices confondues avec la droite à l'infini du plan des $yz$. En outre il y a un point à l'infini sur chaque génératrice ; donc le cône directeur total de la surface se compose de deux fois le plan des $yz$ et d'un cône de révolution ayant $Oz$ pour axe et pour demi-angle au sommet du cône, l'angle $\alpha$.

**2.** Les sections de la surface par les plans de coordonnées résultent immédiatement de ce qui précède : celles qui sont dans le plan des $zx$ et dans le plan des $yz$ viennent d'être signalées ; celle du plan des $xy$ se compose de deux fois la droite D et des deux droites isotropes issues du point O, car le cône de révolution ayant pour sommet O, pour axe $Oz$ et pour demi-angle au sommet $\alpha$, est coupé par le plan des $xy$ suivant les deux droites isotropes de ce plan issues du point O.




Coupons maintenant la surface par le plan $z = h$ et soient $O'x'$, $O'y'$ ses traces sur les plans des $zx$ et des $yz$ ; soient en outre BC une génératrice de la surface, C son point de rencontre avec (D) et D son point de rencontre avec le plan $O'x'y'$. Si nous projetons la droite (D) et la génératrice sur ce plan, nous avons les trois points O', E et D qui sont en ligne droite et

$$ED = EC \operatorname{tg} \alpha = |h| \operatorname{tg} \alpha = Cc.$$

Donc le lieu du point D est une conchoïde de la droite (D') par rapport au point O', la constante additive ED augmentant avec $h$.

Coupons ensuite par un plan parallèle au plan des $yz$, $x = h$, et soient $O'y'$, $O'z'$ ses traces sur les plans des $xy$ et des $zx$ ; soient aussi BC une génératrice de la surface, D son point de rencontre avec le plan $x = h$ et E la projection de ce point sur $O'y'$. Nous avons

$$DE = \frac{EC}{\operatorname{tg} \alpha}, \qquad \frac{O'E}{AC} = \frac{h}{a} \qquad \text{et} \qquad \frac{EC}{OE} = \frac{h-a}{h};$$

mais

$$\overline{OE}^2 - \overline{O'E}^2 = h^2;$$

par suite,

$$\frac{h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha . \overline{ED}^2}{(h-a)^2} - \overline{O'E}^2 = h^2.$$

Le lieu du point D est donc bien une hyperbole ayant pour axes $O'y'$ et $O'z'$. Pour $h = a$, cette hyperbole se réduit à deux droites confondues avec (D).

**3.** Si nous projetons le point B en F sur $O'z'$, la droite DF est la projection de la génératrice sur le plan $O'y'z'$, et l'enveloppe de cette droite est le contour apparent de la surface sur le plan des $yz$. En appelant $\beta$ et $\gamma$ les coordonnées du point D par rapport aux axes $O'y'$, $O'z'$, on trouve pour équation de cette droite

$$\frac{hy}{\beta} + \frac{(a - hz)}{\gamma} = a,$$

avec

$$h^2k^2\gamma^2 - (h-a)^2\beta^2 = h^2(h-a)^2.$$

L'enveloppe de cette droite s'obtient aisément : c'est la courbe

$$(kz)^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (k = \operatorname{tg} \alpha)$$

Mais il est plus simple de procéder ainsi : on a $O'G = AC$ et $O'F = OB$ ; puis, en désignant par $\varphi$ l'angle $\widehat{AOC}$, $AC = a \operatorname{tg} \varphi$, $OC = \frac{a}{\cos \varphi}$ et $OB = OC \operatorname{cotg} \alpha$, $OB = O'F = \frac{a}{\cos \varphi \operatorname{tg} \alpha}$ ; l'équation de FG est donc

$$\frac{y}{a \operatorname{tg} \varphi} + \frac{z \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha}{a} = 1.$$

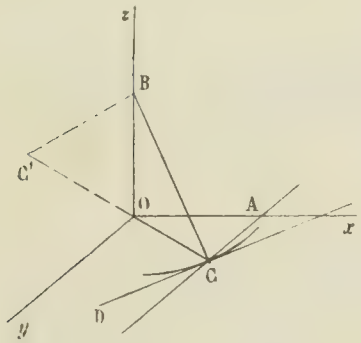
$$\frac{y}{\sin \varphi} + kz = \frac{a}{\cos \varphi};$$

elle enveloppe une courbe dont l'équation tangentielle est

$$\frac{k^2}{v^2} - \frac{1}{u^2} = \frac{a^2}{w^2}.$$

Cette courbe est bien la développée d'une hyperbole ayant pour axe transverse $Oz$ et pour axe imaginaire $Oy$.

**4.** Nous avons expliqué comment on forme un paraboloïde P qui se raccorde avec la surface tout le long de la génératrice G, et comment on en déduit le paraboloïde des normales, $P_1$. Si par le point B on mène des parallèles aux génératrices de la surface, on obtient un cône de révolution ayant pour axe $Oz$ et pour demi-angle au sommet, $\alpha$ ; le plan formé par BC et par la génératrice infiniment voisine est le plan tangent à ce cône mené par BC ; c'est le second plan directeur du paraboloïde P, le premier étant le plan perpendiculaire à BC.




Quand on fait tourner le paraboloïde P avec tous ses éléments autour de BC, le second plan directeur vient se placer sur le plan OBC, le premier ne change pas. Donc le premier plan directeur enveloppe le cône supplémentaire du cône défini antérieurement et le second enveloppe l'axe des $z$.

Le plan tangent à la surface au point B est le plan OBC, il est perpendiculaire à CD qui est la direction de l'axe du paraboloïde P ; donc le point B est le sommet de P ; c'est aussi le sommet de $P_1$. Donc le lieu des sommets est $Oz$.

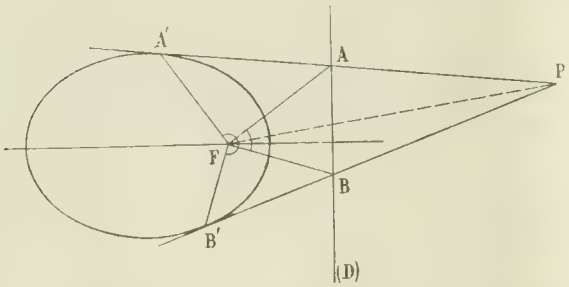
Le lieu des axes s'obtient en menant par le point B une droite perpendiculaire au plan BCD ; elle coupe OC en un point C' tel que $OC.OC' = -\overline{OB}^2$ ; or $OB = OC \operatorname{cotg} \alpha$, donc $OC' = -OC \operatorname{cotg}^2 \alpha$. Le lieu du point C' est donc une droite parallèle à D, dont l'abscisse a pour valeur $-a \operatorname{cotg}^2 \alpha$. Par conséquent le lieu de la droite BC' est une surface de même genre que celle qui était à étudier.

Nous terminerons cette étude un peu longue en disant qu'il serait facile de donner une construction géométrique de chaque point de la section faite par un plan parallèle au plan des $zx$ et de montrer que les projections des droites BC sur le plan des $yz$ restent orthogonales à une hyperbole fixe.

Solutions très satisfaisantes : MM. J. Haag, à Nancy ; J. Ména, lycée de Nancy.

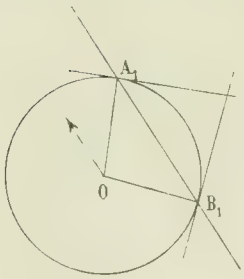
**1193.** — *Par un point* P *on mène deux tangentes à une ellipse, elles rencontrent l'une des directrices en* A *et* B, *démontrer que* PF *est bissectrice de l'angle* AFB, F *étant le foyer correspondant à la directrice considérée.*

Considérons une conique, un de ses foyers F, la directrice correspondante (D), et les deux tangentes PA′ et PB′ menées d'un point quelconque P à cette conique ; ces tangentes coupent la droite (D) en A et B et il s'agit de montrer que la droite FP est une bissectrice de l'angle AFB. A cet effet remarquons que A′F est la polaire de A, B′F, la polaire de B ; les angles A′FA et B′FB sont donc droits, et les deux angles A′FB′ et AFB ont les mêmes bissectrices. Or on sait que FP est une bissectrice de l'angle A′FB′ ; le théorème est donc démontré.




Cette propriété est très connue et ne présente véritablement d'intérêt qu'en ce qu'elle est la transformée par polaires réciproques d'une propriété évidente du cercle.

Prenons en effet comme conique directrice un cercle ayant pour centre le point F ; la conique donnée deviendra un cercle ayant pour centre le pôle de la droite (D), O ; les tangentes PA′ et PB′ deviendront deux points du cercle et le point P, la droite qui joint ces deux points $A_1$, $B_1$. Aux points A′ et B′, correspondent les tangentes en $A_1$ et $B_1$ ; aux points A et B, les rayons $OA_1$ et $OB_1$. Enfin, aux droites FA, FB, FP correspondent trois points à l'infini sur $OA_1$, $OB_1$ et la corde $A_1B_1$. La propriété revient donc à celle-ci : *la parallèle à la corde* $A_1B_1$ *menée par le point* O *est une bissectrice de l'angle des deux rayons* $OA_1$, $OB_1$, et cette propriété est évidente.




La solution analytique est tout aussi simple et nous ne la donnerons pas.

VIAL, à Châlons, PHILBERT.

Bonnes solutions ; MM. A. Sainte-Lagüe, élève de l'Ecole normale supérieure ; E. Foucart ; Fiorellino, à Nice ; R. Javelot, à Givet ; J. Haag, à Pont-à-Mousson ; Blanchot, répétiteur à Aurillac ; R. Manen, étudiant à Toulouse ; N. Abramescu ; J.-G. Nicolesco ; R. Bouvaist ; E.-N. Barisien ; Parrod, à Vesoul ; Confavreux et de Thy, à Saint-Etienne ; J. Roda.

Assez bonnes solutions : MM. A. Dupont, à Saumur ; G. Hélitas ; Ch. Pellion, à Reims ; J. Blanchet.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1271.** — On considère deux courbes (A), (B) et un rayon mobile issu du point fixe O et qui les coupe en $a$ et $b$ ; ce rayon coupe en $m$ une troisième courbe (M).

Trouver cette dernière courbe sachant que sa tangente en $m$ est divisée au point $m$ dans un rapport constant par les tangentes en $a$, $b$ à (A) et (B), ou par les parallèles à ces mêmes tangentes menées par le pôle.

L. Bickart.

**1272.** — Trouver la podaire d'une épicycloïde ordinaire par rapport au centre du cercle fixe.

L. Orlando, élève de l'académie militaire de Turin.

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1197.** — *On considère les cercles* Σ *tangents au cercle fixe* C *et à la droite fixe* D. *Le lieu des centres de similitude des cercles* C *et* Σ *se compose du cercle* C *et d'une conique. Discuter le genre de la conique et voir quelle doit être la position de* D *par rapport à* C *pour que la conique soit :* 1° *une hyperbole équilatère;* 2° *une parabole;* 3° *un système de deux droites.*

Prenons pour axes de coordonnées deux diamètres rectangulaires du cercle C, l'axe $Ox$ étant perpendiculaire à la droite D). Désignons par R le rayon du cercle, et par $a$ l'abscisse de la droite ; nous pouvons toujours supposer $a > 0$.

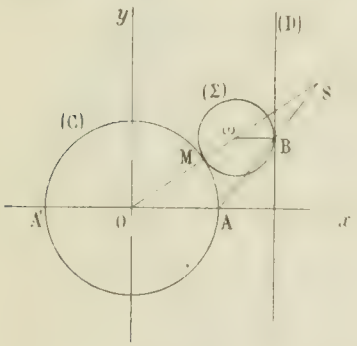


Fig. 1

Considérons un cercle Σ, de centre ω, touchant le cercle C au point M et la droite D au point B. Le point M est l'un des centres de similitude des cercles C et Σ, le lieu de ce point est le cercle C. Il existe un autre centre de similitude S, conjugué harmonique de M par rapport à O et ω, et dont nous allons chercher le lieu géométrique.

Soient α, β les coordonnées du point ω ; le rayon du cercle Σ est égal à la valeur absolue de $a - \alpha$, puisque ce cercle est tangent à D. Si le point ω est à gauche de D, $a - \alpha$ est positif, le rayon est égal à $a - \alpha$. Si le point ω est à droite de D, $a - \alpha$ est négatif, le rayon est égal à $\alpha - a$.

D'autre part, la distance des centres Oω est égale à la somme ou à la différence des rayons suivant que les deux cercles sont tangents extérieurement ou intérieurement.

Nous aurons donc plusieurs cas à distinguer suivant le signe de $a - \alpha$, et suivant la nature du contact des deux cercles. Nous déterminerons le point S par l'intersection de la droite Oω et de la droite joignant les extrémités des deux rayons parallèles ωB et OA ou ωB et OA' suivant la nature du contact.

**Premier cas.** — *Les deux cercles sont tangents extérieurement et le point* ω *est à gauche de* (D) (*fig.* 1).

Le rayon du cercle (Σ) est égal à $a - \alpha$, la distance Oω des centres est égale à la somme des rayons $R + a - \alpha$; on a donc

$$\alpha^2 + \beta^2 = (R + a - \alpha)^2.$$

Le point S est à l'intersection de Oω et de AB, dont les équations sont

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \frac{y}{x - R} = \frac{\beta}{a - R},$$

puisque les coordonnées de B sont $a$ et β. Nous aurons l'équation du lieu en éliminant α et β entre ces trois équations.

La troisième nous donne $\beta = \dfrac{(a - R)y}{x - R}$, la seconde $\alpha = \dfrac{(a - R)x}{x - R}$, et en portant ces valeurs dans la première, nous obtenons

$$\frac{(a - R)^2(x^2 + y^2)}{(x - R)^2} = \left[R + a - \frac{(a - R)x}{x - R}\right]^2$$

ou

$$(\Gamma) \qquad x^2 + y^2 = \frac{4R^2}{(a-R)^2}\left[x - \frac{a+R}{2}\right]^2.$$

Le lieu est une conique $(\Gamma)$.

**Deuxième cas.** — *Les deux cercles sont tangents extérieurement et le point $\omega$ est à droite de* (D) (*fig.* 2).

Le rayon du cercle $\Sigma$ est $\alpha - a$, nous avons

$$\alpha^2 + \beta^2 = (R + \alpha - a)^2.$$

D'autre part, le point S est à l'intersection des droites $O\omega$ et A'B dont les équations sont

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \frac{y}{x+R} = \frac{\beta}{a+R};$$

et nous devons éliminer $\alpha$ et $\beta$ entre ces trois équations.

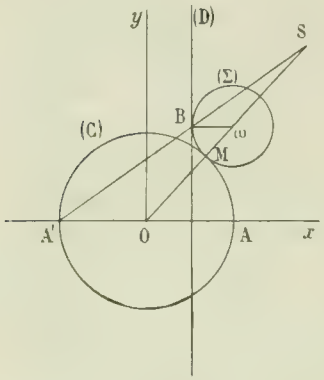



Fig. 2

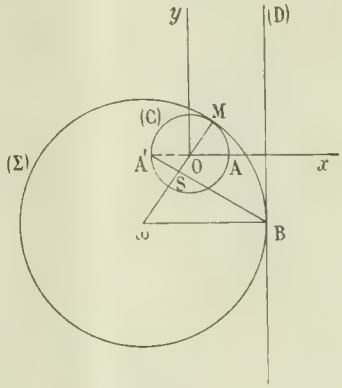



Fig. 3

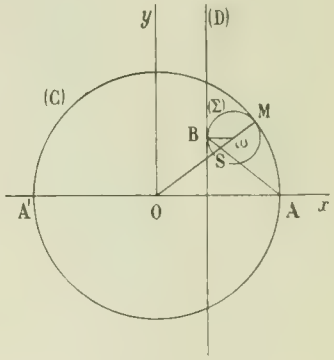



Fig. 4

Mais il est aisé d'observer que ces trois équations se déduisent des équations du cas précédent en changeant R en $-R$; il en sera de même pour le résultat de l'élimination. Il en résulte que le lieu est dans ce cas une conique $\Gamma'$ dont l'équation se déduit de celle de $\Gamma$ en changeant R en $-R$.

$$(\Gamma') \qquad x^2 + y^2 = \frac{4R^2}{(a+R)^2}\left[x - \frac{a-R}{2}\right]^2.$$

**Troisième cas.** — *Les deux cercles sont tangents intérieurement, et le point $\omega$ est à gauche de* (D) (*fig.* 3).

Le rayon du cercle $\Sigma$ est égal à $a - \alpha$, et la distance $O\omega$ est égal à la différence des rayons. Le point S est à l'intersection de $O\omega$ et de la droite BA'. Le lieu cherché s'obtient en éliminant $\alpha$ et $\beta$ entre les équations

$$\alpha^2 + \beta^2 = (R - a + \alpha)^2,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \frac{y}{x+R} = \frac{\beta}{a+R}.$$

Le lieu est donc la conique $\Gamma'$.

**Quatrième cas.** — *Les deux cercles sont tangents intérieurement, et le point $\omega$ est à droite de* D (*fig.* 4).

Le rayon du cercle $(\Sigma)$ est égal à $\alpha - a$, la distance $O\omega$ est égale à la différence des rayons, et le point S est à l'intersection des droites $O\omega$ et AB. Nous avons donc à éliminer $\alpha$ et $\beta$ entre les équations

$$\alpha^2 + \beta^2 = (R + a - \alpha)^2$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \frac{y}{x-R} = \frac{\beta}{a-R}.$$

Le lieu est la conique $\Gamma$.

Il résulte de là que le lieu du point S se compose des deux coniques $\Gamma$ et $\Gamma'$.

La conique $\Gamma$ a pour foyer l'origine, pour directrice correspondante la droite $x = \frac{a+R}{2}$, et pour excentricité $\frac{2R}{|a-R|}$.

Pour que cette conique soit une ellipse il faut qu'on ait $2R < |a-R|$ ou $4R^2 - (a-R)^2 < 0$, ou encore $(2R+a-R)(2R-a+R) < 0$, ou enfin $(a-R)(3R-a) < 0$. Comme $a+R$ est positif, il faut que $a > 3R$.

Donc si $a > 3R$, $\Gamma$ est une ellipse ; si $a < 3R$, $\Gamma$ est une hyperbole ; si $a = 3R$, $\Gamma$ est une parabole.

Pour que $\Gamma$ soit une hyperbole équilatère, il faut que son excentricité soit égale à $\sqrt{2}$. On doit donc avoir $2R = |a-R|\sqrt{2}$, ce qui donne, ou bien $2R = (a-R)\sqrt{2}$ ou $a = R(1+\sqrt{2})$, ou bien $2R = -(a-R)\sqrt{2}$, ce qui est impossible puisque $a$ est positif.

Enfin si $a = R$, $\Gamma$ se réduit à une droite double $(x-R)^2 = 0$.

Considérons maintenant la conique $\Gamma'$, elle a aussi pour foyer l'origine, pour directrice correspondante la droite $x = \frac{a-R}{2}$ et pour excentricité $\frac{2R}{a+R}$.

On en conclut que si $a > R$ la conique est une ellipse ; si $a < R$, une hyperbole ; si $a = R$, une parabole réduite à une droite double, $y^2 = 0$.

Enfin $\Gamma'$ est une hyperbole équilatère si $a = R(\sqrt{2}-1)$.

**Solution géométrique.** — Nous nous bornerons au premier cas (*fig.* 5). Soit N le second point de rencontre du cercle $\Sigma$ et de la droite $\omega M$. Les deux triangles isocèles OAM, $\omega$BN ont leurs angles égaux, donc NB et MA sont parallèles. Comme $\omega M = \omega N$, la parallèle à MA menée par le point $\omega$ rencontre AB en son milieu I. Par ce point menons une parallèle $\Delta$ à la droite D et soit L le point où cette parallèle rencontre OA. Le point L est le milieu de AD. Je dis que le lieu de S est une conique ayant le point O pour foyer et pour directrice correspondante $\Delta$. Abaissons en effet SH perpendiculaire sur $\Delta$, nous avons

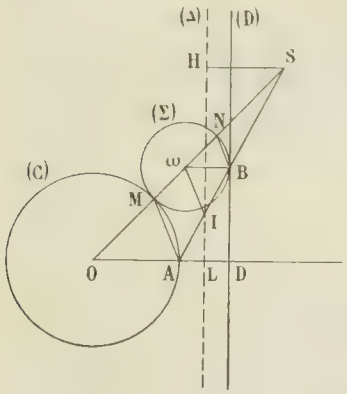


Fig. 5

$$\frac{SH}{AL} = \frac{SI}{AI} = \frac{S\omega}{\omega M},$$

mais comme S et M sont conjugués harmoniques par rapport à O et $\omega$,

$$\frac{S\omega}{\omega M} = \frac{SO}{OM},$$

donc

$$\frac{SH}{AL} = \frac{SO}{OM}$$

ou

$$\frac{SO}{SH} = \frac{OM}{AL} = \frac{R}{\frac{a-R}{2}}.$$

Donc le lieu du point S est une conique ayant pour foyer le point O, pour directrice $\Delta$ et pour excentricité

$$\frac{2R}{a-R}.$$

Les autres cas se traitent d'une manière analogue.

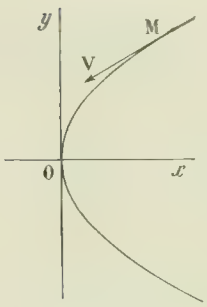
Solution satisfaisante de M. J. Haag.

## MÉCANIQUE

**1204.** — *Un point mobile* M *décrit la parabole* $y^2 - 2px = 0$ *avec une vitesse constante* $v_0$. *Déterminer pour chaque position du mobile les composantes de sa vitesse et de son accélération. On supposera que le mobile décrit la parabole dans le sens trigonométrique direct.*

*Lieu de l'extrémité du vecteur accélération mené par l'origine.*

Soit $M(x,y)$ la position du mobile au temps $t$. Le vecteur vitesse correspondant est MV, dirigé dans le sens trigonométrique direct et de longueur $v_0$. Désignons par $\alpha$ l'angle de $Ox$ avec ce vecteur; les composantes de la vitesse sont alors




$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha.$$

Or, le coefficient angulaire de la droite MV est $\operatorname{tg}\alpha$; comme cette droite est tangente à la parabole au point M, nous avons $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{f'_x}{f'_y}$, ($f(x,y)$ désignant $y^2 - 2px$), ou $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{y}$. Nous en déduisons

$$\frac{\cos\alpha}{y} = \frac{\sin\alpha}{p} = \pm\frac{1}{\sqrt{y^2+p^2}}.$$

D'autre part, comme la projection du vecteur MV sur $Oy$ est toujours négative, il faut prendre le signe moins devant le radical, ce qui donne

$$\cos\alpha = -\frac{y}{\sqrt{y^2+p^2}}, \qquad \sin\alpha = -\frac{p}{\sqrt{y^2+p^2}};$$

et par suite

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v_0 y}{\sqrt{y^2+p^2}}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{v_0 p}{\sqrt{y^2+p^2}}.$$

Les composantes de l'accélération sont $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$. Or $\frac{dx}{dt}$ est exprimé en fonction de $y$; pour calculer la dérivée de $\frac{dx}{dt}$ par rapport à $t$, nous prendrons la dérivée de $\frac{dx}{dt}$ par rapport à $y$ et nous multiplierons cette dérivée par $\frac{dy}{dt}$, ce qu'on peut écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dy}{dt}.$$

La dérivée par rapport à $y$ de $-\frac{v_0 y}{\sqrt{y^2+p^2}}$ est $-\frac{v_0 p^2}{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}$:

nous aurons donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v_0 p^2}{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{v_0 p}{\sqrt{y^2+p^2}}\right) = \frac{v_0^2 p^3}{(y^2+p^2)^2}.$$

De même

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{v_0 p y}{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{v_0 p}{\sqrt{y^2+p^2}}\right) = -\frac{v_0^2 p^2 y}{(y^2+p^2)^2}.$$

Il en résulte que les composantes de l'accélération sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v_0^2 p^3}{(y^2+p^2)^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{v_0^2 p^2 y}{(y^2+p^2)^2}.$$

Si nous menons par l'origine un vecteur équipollent au vecteur accélération, les coordonnées de son extrémité sont

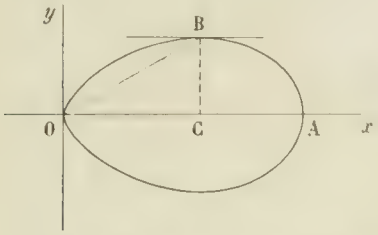
$$(1) \qquad X = \frac{v_0^2 p^3}{(y^2+p^2)^2}, \qquad Y = -\frac{v_0^2 p^2 y}{(y^2+p^2)^2};$$

et nous aurons le lieu de ce point en éliminant $y$ entre ces deux équations. Nous avons d'abord

$$\frac{X}{Y} = -\frac{p}{y}, \qquad \text{ou} \qquad y = -\frac{pY}{X}.$$

et en portant cette valeur dans la première des équations (1), nous obtenons

$$pX^2 - Y^2 p^2 - v_0^2 X^3 = 0,$$




c'est l'équation du lieu. Elle représente une courbe du quatrième degré tangente à l'origine à $Oy$ et symétrique par rapport à $Ox$.

Pour la construire aisément, passons en coordonnées polaires, nous avons l'équation

$$\rho = \frac{v_0^2}{p} \cos^3\omega.$$

Il suffit de faire varier $\omega$ de $0$ à $\frac{\pi}{2}$ et de prendre le symétrique de la portion de courbe obtenue par rapport à $Ox$. Quant $\omega$ croît de $0$ à $\frac{\pi}{2}$, $\rho$ décroît de $\frac{v_0}{p}$ à $0$, ce qui donne la forme ci-contre.

La tangente en un point de la courbe est déterminée par la valeur

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'_\omega} = -\frac{1}{3 \operatorname{tg} \omega};$$

par suite la tangente au point A $\left(\rho = \frac{v_0^2}{p},\ \omega = 0\right)$ est perpendiculaire à $Ox$.

Pour que la tangente en un point soit parallèle à $Ox$, il faut que $\operatorname{tg} V$ soit égal à $-\operatorname{tg}\omega$. On doit donc avoir

$$-\frac{1}{3 \operatorname{tg}\omega} = -\operatorname{tg}\omega \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tg}^2\omega = \frac{1}{3},$$

cette équation admet une seule racine comprise entre $0$ et $\frac{\pi}{2}$, cette racine est $\frac{\pi}{6}$. Soit B le point correspondant, le rayon vecteur de ce point est $\frac{v_0^2}{p}\cos^3\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{3v_0^2\sqrt{3}}{8p}$, et par suite ses coordonnées rectilignes sont

$$x = OC = \frac{9v_0^2}{16p}, \qquad y = CB = \frac{3v_0^2\sqrt{3}}{16p}.$$

Remarque. — Nous avons $\frac{Y}{X} = -\frac{y}{p}$, ce qui montre que le vecteur accélération est dirigé suivant la normale au point M; cela pouvait se prévoir, car le mouvement du point M est uniforme, et l'on sait que dans ce cas l'accélération totale se réduit à l'accélération centripète, dirigée suivant la normale, vers le centre de courbure, et égale à $\frac{v_0^2}{R}$, R désignant le rayon de courbure. On déduit de là la valeur du rayon de courbure en un point de la parabole. En effet le carré de l'accélération est

$$X^2 + Y^2 = \frac{p^4 v_0^4}{(p^2+y^2)^3} = \frac{v_0^4}{R^2},$$

et par suite

$$R = \frac{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

Bonnes solutions par MM. Blanchot, lycée d'Aurillac; Guinand, agent-voyer à Ecouen R. Javelot, à Givet; J. Roda, à Toulouse.

**1205.** — *Un point décrit une parabole* $y^2 - 2px = 0$ *de telle façon que l'hodographe de son mouvement soit la parabole* $y^2 - 2qx = 0$.

1° *Trouver les équations du mouvement de ce point et son accélération à chaque instant.*

2° *Lieu de l'extrémité du vecteur accélération mené par l'origine. Lieu des extrémités des vecteurs vitesse et accélération menés à chaque instant par la position du mobile.*

3° *Enveloppe du vecteur accélération mené par la position du mobile. Mouvement du point où ce vecteur touche son enveloppe.*

**1.** $x$ et $y$ sont des fonctions du temps $t$ telles que l'on ait

$$(1) \qquad y^2 = 2px, \qquad (2) \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2q\,\frac{dx}{dt},$$

et aussi

$$(3) \qquad y\,\frac{dy}{dt} = p\,\frac{dx}{dt},$$

cette dernière étant obtenue en dérivant l'équation (1) par rapport à $t$.

Divisons membre à membre les équations (2) et (3), nous avons

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{2q}{p}$$

ou

$$\frac{dy}{y} = \frac{2q}{p}\,t,$$

et en intégrant

$$\mathrm{L}y = \frac{2qt}{p} + \mathrm{C}$$

ou

$$y = e^{\frac{2qt}{p} + \mathrm{C}}.$$

Déterminons la constante C de manière que pour $t = 0$, $y$ soit égal au paramètre $p$, nous avons $e^{\mathrm{C}} = p$, et par suite

$$y = pe^{\frac{2qt}{p}}.$$

La valeur correspondante de $x$ est $x = \dfrac{y^2}{2p} = \dfrac{p}{2}e^{\frac{4qt}{p}}$.

Les équations du mouvement sont donc

$$x = \frac{p}{2}e^{\frac{4qt}{p}}, \qquad y = pe^{\frac{2qt}{p}}.$$

Les projections de la vitesse sont

$$\frac{dx}{dt} = 2qe^{\frac{4qt}{p}}, \qquad \frac{dy}{dt} = 2qe^{\frac{2qt}{p}},$$

et celles de l'accélération

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{8q^2}{p}e^{\frac{4qt}{p}}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{4q^2}{p}e^{\frac{2qt}{p}}.$$

**2.** L'extrémité du vecteur accélération mené par l'origine a pour coordonnées

$$\mathrm{X} = \frac{8q^2}{p}e^{\frac{4qt}{p}}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{4q^2}{p}e^{\frac{2qt}{p}}.$$

Pour éliminer $t$ entre ces deux équations, il suffit d'élever la deuxième au carré et de diviser membre à membre. Nous obtenons ainsi l'équation du lieu

$$\mathrm{Y}^2 - \frac{2q^2}{p}\,\mathrm{X} = 0,$$

qui représente une parabole.

L'extrémité du vecteur vitesse mené par la position du mobile $(x, y)$ a pour coordonnées

$$X = x + \frac{dx}{dt} = \frac{p+4q}{2} e^{\frac{4qt}{p}},$$

$$Y = y + \frac{dy}{dt} = (p+2q) e^{\frac{2qt}{p}},$$

et le lieu de ce point a pour équation

$$Y^2 - \frac{2(p+2q)^2}{p+4q} X = 0.$$

Enfin les coordonnées de l'extrémité du vecteur accélération mené par la position du point mobile sont

$$X = x + \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{p^2+16q^2}{2p} e^{\frac{4qt}{p}},$$

$$Y = y + \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{p^2+4q^2}{p} e^{\frac{2qt}{p}},$$

et le lieu de ce point a pour équation

$$Y^2 - \frac{2(p^2+4q^2)^2}{p(p^2+16q^2)} X = 0.$$

3. L'équation du vecteur accélération mené par la position du mobile est

$$\frac{X-x}{\frac{d^2x}{dt^2}} = \frac{Y-y}{\frac{d^2y}{dt^2}},$$

ou

$$\frac{X - \frac{p}{2} e^{\frac{4qt}{p}}}{\frac{8q^2}{p} e^{\frac{4qt}{p}}} = \frac{Y - p e^{\frac{2qt}{p}}}{\frac{4q^2}{p} e^{\frac{2qt}{p}}},$$

ou, enfin,

$$2X - 4Y e^{\frac{2qt}{p}} + 3p e^{\frac{4qt}{p}} = 0.$$

Posons $\lambda = e^{\frac{2qt}{p}}$, et écrivons que l'équation $2X - 4\lambda Y + 3p\lambda^2 = 0$ a une racine double en $\lambda$ nous avons

$$Y^2 - \frac{3}{2} pX = 0,$$

c'est l'équation de l'enveloppe.

La valeur de la racine double est $\lambda = \frac{2Y}{3p}$, par suite l'ordonnée du point où le vecteur touche son enveloppe est

$$Y = \frac{3p}{2}\lambda = \frac{3p}{2} e^{\frac{2qt}{p}},$$

son abscisse est

$$X = \frac{2Y^2}{3p} = \frac{3p}{2} e^{\frac{4qt}{p}}.$$

Par suite les équations du mouvement de ce point sont

$$X = \frac{3p}{2} e^{\frac{4qt}{p}}, \qquad Y = \frac{3p}{2} e^{\frac{2qt}{p}}.$$

J. RODA, à Toulouse.

Bonne solution par M. J. Haag.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1273**. — On considère toutes les coniques qui ont un foyer donné F et qui passent par deux points fixes A et B.

1° Le lieu du centre de ces coniques se compose de deux coniques homofocales;

2° Le lieu des sommets de l'axe focal est une quartique

3° Les directrices passent par deux points fixes.

E.-N. Barisien.

**1274**. — On considère un parallélogramme ABCD et deux paraboles variables, l'une tangente en A à AD et ayant pour diamètre AB, l'autre tangente en C à CD et ayant pour diamètre CB; on suppose en outre que ces deux paraboles sont tangentes en un point M, et l'on désigne par P le point de rencontre de la tangente en M avec l'autre tangente commune. Démontrer que la tangente en M passe par un point fixe et trouver les lieux décrits par les points M et P.

J. G. Nicolesco.

**1275**. — Lorsqu'un triangle est inscrit dans une parabole, l'axe de cette conique est une droite de Simson du triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du précédent.

P. Tribier.

## BIBLIOGRAPHIE

**Cours de Mécanique**, à l'usage des candidats à l'Ecole Polytechnique, par Ch. Michel, docteur ès sciences, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon. — Paris, 1903. F. R. de Rudeval, éditeur.

En peu de pages, l'auteur a su développer tout le programme, simplement, et d'une façon toujours très claire.

M. Michel s'est appliqué, en particulier, à donner aux définitions et aux postulats dont l'importance est capitale en mécanique, toute la rigueur et toute la précision sans lesquelles les démonstrations les mieux faites des théorèmes les plus simples restent obscures. Nous citerons, par exemple, la définition d'un point lié invariablement à un corps solide, celle de l'accélération au moyen de l'hodographe, qui est certainement la plus compréhensible pour les élèves qui commencent l'étude de la Mécanique. Nous ne saurions omettre de louer aussi le soin apporté par l'auteur à la simplification des calculs, par une combinaison habile de la Géométrie et de l'Analyse : cette manière de procéder, qu'on ne saurait trop recommander aux élèves, lui a permis, par exemple, d'obtenir en quelques lignes, les expressions de l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète. D'ailleurs, cette élégance dans les démonstrations se retrouve dans tout le cours de l'ouvrage, et contribue dans une large mesure à en faciliter la lecture; à ce point de vue, les chapitres sur les mouvements à accélération centrale, sur les forces parallèles, sur la réduction des forces appliquées à un corps solide, sont à signaler tout particulièrement.

Tel qu'il est conçu et rédigé, le livre de M. Michel doit rendre les plus grands services aux élèves de Mathématiques spéciales; il constitue également une excellente introduction à l'étude de la *Mécanique rationnelle*, pour les étudiants des Universités.

T. C.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

14e Année. N° 4 Janvier 1904.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LES TRANSFORMATIONS HOMOGRAPHIQUES

par M. L. Bickart.

**1.** *Deux figures homographiques planes situées dans un même plan peuvent toujours être projetées suivant deux figures semblables.*

**2.** *Il n'en est pas de même pour deux figures à trois dimensions.*

**1.** Soit une transformation homographique plane définie par

$$x' = \frac{a_0 + ax + ay}{c_0 + cx + cy},$$

$$y' = \frac{b_0 + bx + by}{c_0 + cx + cy}.$$

Supposons que cette transformation soit la plus générale possible, c'est-à-dire qu'elle comporte trois points doubles distincts et trois seulement.

Prenons l'un de ces points doubles pour origine : il faut que pour $x = y = 0$ on ait $x' = y' = 0$, d'où

$$a_0 = b_0 = 0. \qquad c_0 \neq 0.$$

Soit $c_0 = 1$. Projetons à l'infini la droite qui joint les deux autres points doubles : $x'$ et $y'$ doivent être infinis quand $x$ et $y$ le sont, d'où $c = c' = 0$.

Les équations de la transformation se réduisent à

$$x' = ax + a'y,$$
$$y' = bx + b'y.$$

Les points doubles à l'infini sont déterminés par

$$m' = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} = m,$$

$$m' = \frac{b'm + b}{a'm + a},$$

$$a'm^2 + (a - b')m - b = 0.$$

Exprimons que ces points doubles coïncident avec les points cycliques, c'est-à-dire que la dernière équation admet pour racines $\pm i$. Il vient

$$b' = a,$$
$$a' = -b.$$

Les équations de la transformation deviennent

$$x' = ax - by,$$
$$y' = bx + ay.$$

Posons

$$a = k\cos\varphi, \qquad b = k\sin\varphi,$$
$$x' = k(x\cos\varphi - y\sin\varphi),$$
$$y' = k(x\sin\varphi + y\cos\varphi).$$

Soient $(\rho, \theta)$, $(\rho', \theta')$ les coordonnées polaires des points $(x, y)$, $(x', y')$; on a

$$\rho' \cos \theta' = k\rho \cos (\theta + \varphi),$$
$$\rho' \sin \theta' = k\rho \sin (\theta + \varphi).$$

Divisons membre à membre

$$\sin (\theta + \varphi) \cos \theta' - \cos (\theta + \varphi) \sin \theta' = 0,$$
$$\sin (\theta + \varphi - \theta') = 0,$$
$$\theta' = \theta + \varphi,$$

d'où

$$\rho' = k\rho.$$

Donc le point $(x', y')$ se déduit du point $(x, y)$ par une rotation de l'angle $\varphi$ autour de l'origine suivie d'une homothétie dans le rapport $k$. Donc les deux figures F et F′ sont semblables.

On peut d'ailleurs écrire aussi

$$x' + iy' = ke^{i\varphi}(x + iy),$$
$$x' - iy' = ke^{-i\varphi}(x - iy),$$

équations qui suffisent à prouver la même proposition.

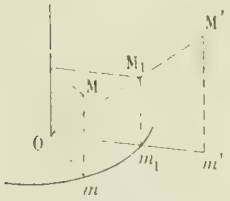
On peut dire d'après cela que :

*Deux figures planes semblables sont deux figures homographiques dans lesquelles deux des points doubles sont les points cycliques.*

**2.** Considérons maintenant une transformation homographique à trois dimensions.

Cherchons d'abord les équations qui permettent de passer le plus simplement d'une figure F à une figure F′ semblable. La figure F′ doit se déduire de F par une rotation autour d'un axe suivie d'une homothétie autour d'un point O de cet axe. Prenons ce point O pour origine et cet axe pour axe des $z$. Prenons dans le plan perpendiculaire en O à O$z$ deux droites rectangulaires quelconques pour axes des $x$ et des $y$.

Soit $\varphi$ l'angle de la rotation, $k$ le rapport d'homothétie.




Un point du plan $z = 0$ reste dans ce plan et les équations qui définissent la transformation sont

$$x' + iy' = ke^{i\varphi}(x + iy),$$
$$x' - iy' = ke^{-i\varphi}(x - iy).$$

Le rapport d'homothétie étant $k$, on devra avoir

$$z' = kz.$$

En effet, soit M le point $(x, y)$, $M_1$ la nouvelle position de M après rotation, M le point homologue de $M_1$, situé sur $OM_1$ et tel que

$$\frac{OM'}{OM_1} = k,$$

Soient $m$, $m_1$, $m'$ les projections sur le plan $z = 0$ des trois points M, $M_1$, M′; il est évident que

$$\frac{z'}{z} = \frac{M'm'}{Mm} = \frac{M'm'}{M_1m_1} = \frac{OM'}{OM_1} = k.$$

Prenons alors pour axes des $x$ et $y$ les droites isotropes du plan $z = 0$, c'est-à-dire, posons

$$X = x + iy,$$
$$Y = x - iy.$$

Les équations de la transformation peuvent s'écrire

$$X' = ke^{i\varphi}X,$$
$$Y' = ke^{-i\varphi}Y,$$
$$Z = kZ,$$

ou, si l'on veut,

$$(1)\qquad \begin{aligned} x' &= \alpha x,\\ y' &= \beta y,\\ z' &= \gamma z, \end{aligned}$$

avec la condition $\alpha\beta - \gamma^2 = 0,$

et étant entendu que les axes $Ox$ et $Oy$ sont les droites isotropes. Ceci posé, considérons une transformation homographique

$$x' = \frac{a_0 + ax + a'y + a''z}{hx + h'y + h''z + h_0}, \qquad y' = \frac{b_0 + bx + b'y + b''z}{hx + h'y + h''z + h_0}, \qquad z' = \frac{c_0 + cx + c'y + c''z}{hx + h'y + h''z + h_0}.$$

Prenons pour origine l'un des quatre points doubles :

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0,$$

et projetons à l'infini le plan qui contient les trois autres :

$$h = h' = h'' = 0, \qquad h_0 \neq 0.$$

Soit $h_0 = 1$. Les équations se réduisent à

$$(2)\qquad \begin{aligned} x' &= ax + a'y + a''z,\\ y' &= bx + b'y + b''z.\\ z' &= cx + c'y + c''z. \end{aligned}$$

Prenons pour axes les trois arêtes issues de l'origine du tétraèdre des points doubles et faisons une projection telle que deux d'entre elles deviennent les droites isotropes issues de l'origine dans le plan normal à la troisième. Les équations se réduisent à

$$\begin{aligned} x' &= ax,\\ y &= by.\\ z' &= cz, \end{aligned}$$

et on ne pourra les identifier avec les équations (1) que si

$$ab = c^2.$$

Donc, dans le cas général les deux figures F et F′ ne pourront pas se transformer en deux figures semblables.

Pour préciser, proposons-nous d'effectuer la transformation sur les équations de transformation prises sous la forme (2).

A cet effet, effectuons sur l'ensemble des deux figures F et F′ une transformation définie par

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= AX + A'Y + A''Z.\\ y &= BX + B'Y + B''Z,\\ z &= CX + C'Y + C''Z. \end{aligned}$$

Les équations de la transformation deviennent

$$(4)\qquad \begin{aligned} AX' + A'Y' + A''Z' &= a(AX + A'Y + A''Z) + a'(BX + \cdots) + a''(CX + \cdots),\\ BX' + B'Y' + B''Z' &= b(AX + \qquad\qquad) + b'(BX + \cdots) + b''(CX + \cdots),\\ CX' + C'Y' + C''Z' &= c(AX + \cdots \qquad\qquad) + c'(BX + \cdots) + c''(CX + \cdots), \end{aligned}$$

équations qui doivent former un système équivalent à

$$(5)\qquad X' = \alpha X, \qquad Y' = \beta Y, \qquad Z' = \gamma Z,$$

avec $\gamma^2 = \alpha\beta.$

Autrement dit, si on substitue dans les équations (4) à X′, Y′, Z′ les expressions (5), les équations (4) doivent devenir des identités. Ces équations deviennent

$$\begin{aligned} A\alpha X + A'\beta Y + A''\gamma Z &= (aA + a'B + a''C)X + (aA' + a'B' + a''C')Y + (aA'' + a'B'' + a''C'')Z,\\ B\alpha X + B'\beta Y + B''\gamma Z &= (bA + b'B + b''C)X + (bA' + b'B' + b''C')Y + (bA'' + b'B'' + b''C'')Z,\\ C\alpha X + C'\beta Y + C''\gamma Z &= (cA + c'B + c''C)X + (cA' + c'B' + c''C')Y + (cA'' + c'B'' + c''C'')Z; \end{aligned}$$

d'où, en identifiant :

$$(6)\quad \begin{aligned} &(a-\alpha)A + a'B + a''C = 0,\\ &bA + (b'-\alpha)B + b''C = 0,\\ &cA + c'B + (c''-\alpha)C = 0; \end{aligned} \qquad (7)\quad \begin{aligned} &(a-\beta)A' + a'B' + a''C' = 0,\\ &bA' + (b'-\beta)B' + b''C' = 0,\\ &cA' + c'B' + (c''-\beta)C' = 0; \end{aligned} \qquad (8)\quad \begin{aligned} &(a-\gamma)A'' + a'B'' + a''C'' = 0,\\ &bA'' + (b'-\gamma)B'' + b''C'' = 0,\\ &cA'' + c'B'' + (c''-\gamma)C'' = 0. \end{aligned}$$

Entre les trois équations (6) éliminons A, B, C. Eliminons de même A', B', C' entre les équations (7) et A'', B'', C'' entre les équations (8) : il vient

$$(9)\quad \begin{vmatrix} a-\alpha & a' & a'' \\ b & b'-\alpha & b'' \\ c & c' & c''-\alpha \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a-\beta & a' & a'' \\ b & b'-\beta & b'' \\ c & c' & c''-\beta \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a-\gamma & a' & a'' \\ b & b'-\gamma & b'' \\ c & c' & c''-\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Avant d'aller plus loin, cherchons les arêtes issues de l'origine du tétraèdre des points doubles dans la transformation (2) : une droite

$$\frac{x'}{P} = \frac{y'}{Q} = \frac{z'}{R}$$

se transforme en

$$\frac{ax + a'y + a''z}{P} = \frac{bx + b'y + b''z}{Q} = \frac{cx + c'y + c''z}{R}.$$

Les deux droites devant coïncider, on devra avoir

$$\frac{x}{P} = \frac{y}{Q} = \frac{z}{R},$$

d'où

$$\frac{ax + a'y + a''z}{x} = \frac{bx + b'y + b''z}{y} = \frac{cx + c'y + c''z}{z}.$$

Soit S la valeur commune de ces trois rapports :

On a

$$\begin{aligned} (a-S)x + a'y + a''z &= 0,\\ bx + (b'-S)y + b''z &= 0,\\ cx + c'y + (c''-S)z &= 0, \end{aligned}$$

d'où, en éliminant $x$, $y$ et $z$,

$$\begin{vmatrix} a-S & a' & a'' \\ b & b'-S & b'' \\ c & c' & c''-S \end{vmatrix} = 0,$$

équation du 3e degré dont $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ se trouvent être les racines d'après les équations (9).

Si l'on pose

$$a + b' + c'' = \sigma,$$

$$(ab' - ba') + (b'c'' - c'b'') + (c''a - a''c) = \theta,$$

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \Delta,$$

l'équation en S s'écrit

$$S^3 - \sigma S^2 + \theta S - \Delta = 0,$$

et on a

$$\alpha + \beta + \gamma = \sigma$$

$$\alpha\beta + (\alpha + \beta)\gamma = \theta, \qquad \gamma^2 = \alpha\beta,$$

$$\alpha\beta\gamma = \Delta,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \sigma,\\ \gamma^2 + (\alpha + \beta)\gamma &= \theta,\\ \gamma^3 &= \Delta, \end{aligned} \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \sigma,\\ \gamma(\alpha + \beta + \gamma) &= \theta,\\ \gamma^3 &= \Delta, \end{aligned}$$

d'où
$$\gamma\sigma = \theta,$$
$$\gamma^3 = \Delta,$$
et enfin
$$\theta^3 = \Delta\sigma^3;$$
telle est la condition cherchée.

Nous pouvons donner une forme géométrique à cette condition. Soient M et M′ deux points homologues d'une homographie, $Ox$, $Oy$, $Oz$ les trois arêtes issues d'un même sommet O du tétraèdre des points doubles. On sait que le rapport anharmonique des quatre plans qui ont en commun l'une des arêtes, $Oz$ par exemple, et qui passent respectivement par les points M, M′, et les deux autres arêtes, est constant, et se conserve si on effectue sur l'homographie donnée une transformation homographique.

Ceci étant, reprenons les équations
$$x' = \alpha x, \qquad y' = \beta y, \qquad z' = \gamma z.$$
Soient $\rho_1$ le rapport anharmonique relatif à l'arête $Ox$ et $\rho_2$ le rapport relatif à l'arête $Oy$ :
$$\rho_1 = \frac{y'}{z'} : \frac{y}{z} = \frac{\beta}{\gamma}$$
$$\rho_2 = \frac{x'}{z'} : \frac{x}{z} = \frac{\alpha}{\gamma}.$$
Si la condition $\gamma^2 = \alpha\beta$ est réalisée, on aura
$$\rho_1\rho_2 = 1.$$
On peut donc dire d'après cela que :

Deux figures semblables à trois dimensions sont deux figures homographiques dans lesquelles le tétraèdre des points doubles admet trois sommets à l'infini dont un est réel et dont les deux autres sont les points cycliques des plans normaux à la direction du premier, telles de plus que les rapports anharmoniques fondamentaux relatifs aux deux arêtes isotropes ont pour produit l'unité.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1192.** — *Par un point* A *pris sur la courbe*

(C) $$y = \frac{x^3}{x^2 - 1},$$

*on mène les tangentes autres que celle qui touche la courbe en* A *et on désigne par* B *et* D *leurs points de contact. La droite* BD *rencontre* (C) *en un troisième point* E. *Cela posé, on demande, lorsque* A *varie :*

1° *De trouver le lieu du milieu du segment* BD, *et le lieu du point de rencontre des tangentes en* A *et en* E ;

2° *De démontrer que le point de contact de* BD *avec son enveloppe est le conjugué harmonique du point* E *par rapport aux points* B *et* D ;

3° *De trouver le lieu du centre de gravité du triangle* ABD *et de construire ce lieu.*

Rien n'est plus aisé d'abord que de construire la courbe (C). Il est visible en effet qu'elle a l'origine pour centre, l'axe des $x$ pour tangente d'inflexion en ce point, que les deux droites $x = -1$ et $x = 1$ sont des asymptotes et enfin que la droite $y = x$ est la troisième asymptote. En joignant à ces résultats l'étude de la position de la courbe par rapport aux deux asymptotes $x = \pm 1$, étude qui se fait sans peine, d'une manière évidente, on a de suite le tracé de la courbe (*fig.* 1).

Il est facile de résoudre le problème indiqué par une méthode toute naturelle, en suivant les indications mêmes de l'énoncé. Nous procéderons autrement.

1. Proposons-nous d'abord de trouver la relation qui existe entre les abscisses de trois points de la courbe (C) qui sont en ligne droite. Si nous désignons par

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation d'une droite quelconque du plan, l'équation aux abscisses des points de rencontre de cette droite avec la courbe (C) est

$$ux + \frac{vx^3}{x^2 - 1} + w = 0,$$

ou $$(u + v)x^3 + wx^2 - ux - w = 0,$$

et l'on voit immédiatement que la relation cherchée est

$$\Sigma \frac{1}{x_1 x_2} = -1,$$

ou $$x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3 = 0.$$

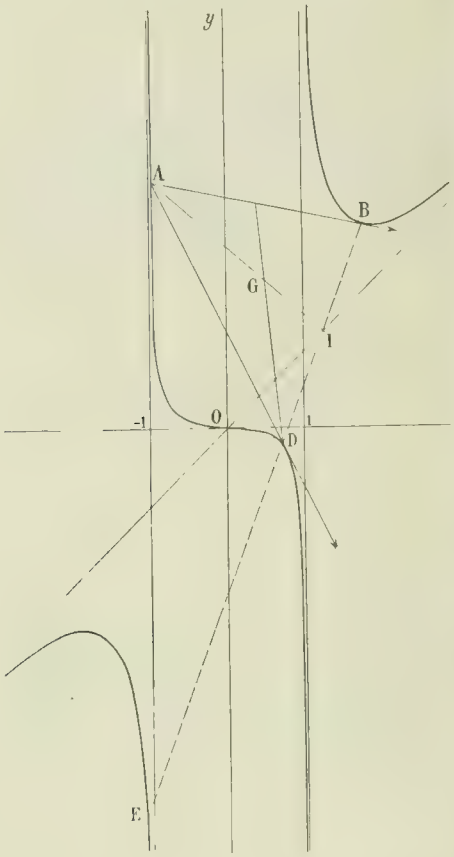


Fig. 1.

Appelons alors $a$, $b$ les coordonnées du point A, $x'$ et $y'$ les coordonnées du point B et $x''$, $y''$ celles du point D ; nous aurons, entre l'abscisse $a$ du point A et celle $x$ de l'un des deux points de contact, la relation

$$ax^2 + 2x + a = 0 ;$$

par suite, $$x' + x'' = -\frac{2}{a} \quad \text{et} \quad x'x'' = 1.$$

De là résulte immédiatement l'abscisse du point E : il n'y a qu'à porter $x'$ et $x''$ à la place de $x_2$ et de $x_3$ dans la relation fondamentale ; nous avons ainsi $x_1 = \frac{1}{a}$.

Nous remarquons en outre que si deux nombres quelconques $x'$ et $x''$ ont pour produit l'unité, ce sont les abscisses des points de contact des deux tangentes issues d'un point de la courbe ; car elles sont données par une équation de la forme

$$x^2 + px + 1 = 0,$$

celle-ci peut être identifiée avec $ax^2 + 2x + a = 0$, et nous avons ainsi, pour abscisse du point d'où l'on mène les deux tangentes, le nombre $a = \frac{2}{p}$.

Or les abscisses de A et de E sont $a$ et $\frac{1}{a}$, leur produit est égal à 1 ; donc le lieu du point de rencontre des tangentes en A et E est la courbe (C) elle-même.

Cherchons maintenant l'équation de la droite BD ; pour cela, identifions l'équation aux abscisses des points de rencontre d'une droite et de la courbe (C) avec l'équation $(x - x')(x - x'')(x - x_1) = 0$ ; nous aurons

$$\frac{w}{u + v} = -(x' + x'' + x_1) = \frac{2}{a} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a},$$

$$\frac{u}{u + v} = -[x'x'' + x_1(x' + x'')] = -1 + \frac{2}{a^2},$$

puis, $$\frac{v}{u + v} = 1 - \frac{u}{u + v} = 2 - \frac{2}{a^2}.$$

Il en résulte que l'on peut prendre $u = 2 - a^2$, $v = 2(a^2 - 1)$ et $w = a$ ; la droite BD a dès lors

pour équation

$$(2-a^2)x+2(a^2-1)y+a=0.$$

Nous aurons le lieu du point I, milieu de BD, en faisant $x=-\frac{1}{a}$ dans cette équation ou en y remplaçant $a$ par $-\frac{1}{x}$. Nous trouvons ainsi

$$(1) \qquad (x^2-1)(x-y)=0;$$

les deux droites $x=\pm 1$ correspondent aux cas où le point A s'éloigne à l'infini sur l'une ou l'autre des branches asymptotes à ces droites : quand le point A est à l'infini sur la branche asymptote à $x=-1$, les deux points de contact B et D sont confondus à l'infini avec le point de contact de la droite $x=1$; par conséquent leur milieu est indéterminé sur cette droite.

Le vrai lieu de I est la première bissectrice, $x-y=0$.

**2.** L'enveloppe de la droite BD s'obtient en adjoignant à l'équation

$$(2-a^2)x+2(a^2-1)y+a=0,$$

sa dérivée par rapport à $a$, c'est-à-dire l'équation

$$-2ax+4ay+1=0.$$

L'abscisse du point limite, c'est-à-dire du point de rencontre de ces deux droites, est

$$x=-\frac{a^2+1}{2a};$$

et il n'y a plus qu'à vérifier la relation harmonique

$$2xx_1+2x'x''-(x+x_1)(x'+x'')=0,$$

ce qui se fait immédiatement.

Les équations paramétriques de l'enveloppe sont

$$x=-\frac{a^2+1}{2a}, \qquad y=-\frac{a^2+2}{4a},$$

elles représentent une conique, une hyperbole qui a pour équation cartésienne

$$8(x-y)(x-2y)+1=0.$$

**3.** Le point G, centre de gravité du triangle ABD, a pour coordonnées

$$x=\frac{a+x'+x''}{3},$$

$$y=\frac{b+y'+y''}{3}.$$

Si l'on se rappelle que

$$x'+x''=y'+y''=-\frac{2}{a},$$

les valeurs de $x$ et de $y$ en fonction de $a$ se trouvent immédiatement ; ce sont :

$$(2) \qquad x=\frac{a^2-2}{3a}, \qquad y=\frac{a^4-2a^2-2}{3a(a^2-1)}.$$

L'équation cartésienne de cette courbe s'obtiendrait aisément, par un calcul d'ailleurs dénué d'intérêt. Il n'y a plus qu'à la construire.

Nous remarquons à cet effet que, si on change $a$ en $-a$, $x$ et $y$ changent de signes seulement; donc la courbe admet l'origine pour centre, et, en tenant compte de cette symétrie, il suffit de faire varier $a$ de 0 à $+\infty$. Les valeurs remarquables de $a$ sont alors 0, 1, $\sqrt{2}$ et $+\infty$.

Pour $a=0$ ou $+\varepsilon$, $x$ et $y$ sont infinis et négatifs, chacun d'eux a pour valeur approchée $-\frac{2}{3a}$ et l'on a $\lim\frac{y}{x}=1$; la branche infinie correspondante a donc pour direction asymptotique la direction de la première bissectrice.

Pour $a = 1 - \varepsilon$, $y$ redevient égal à $-\infty$ et $x$ prend la valeur $-\frac{1}{3}$; la droite $x = -\frac{1}{3}$ est une asymptote. Pour $a = 1 + \varepsilon$, $y$ est égal à $+\infty$, la courbe est asymptote à l'autre extrémité de la même droite $x = -\frac{1}{3}$. En formant la quantité $x + \frac{1}{3}$, $x + \frac{1}{3} = \frac{a^2 + a - 2}{3a} = \frac{(a-1)(a+2)}{3a}$, on voit qu'elle est négative avant 1 et positive après; donc le premier arc est à gauche et le second est à droite de la droite $x = -\frac{1}{3}$.

Pour $a = \sqrt{2}$, $x$ devient nul et passe du négatif au positif, $y$ prend la valeur $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Enfin, pour $a = +\infty$, $x$ et $y$ sont infinis et positifs, leurs valeurs approchées sont égales à $\frac{a}{3}$; par suite, la limite de $\frac{y}{x}$ est encore égale à 1 et la branche correspondante a même direction asymptotique que la première.

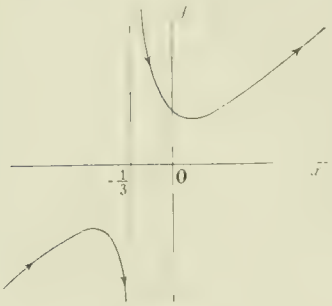


Fig. 2.

Nous avons donc obtenu le schéma placé à côté (*fig.* 2). Il reste à chercher les asymptotes des deux branches infinies parallèles à $y = x$ et à compléter la courbe par symétrie.

Or nous trouvons aisément

$$y - x = \frac{a}{3(a^2 - 1)}.$$

Les limites pour $a = 0$ et $a = +\infty$ sont toutes deux nulles; donc les deux asymptotes sont confondues avec la première bissectrice.

En remarquant enfin que la courbe est du quatrième ordre, on achève sans peine la construction de cette ligne (*fig.* 3).

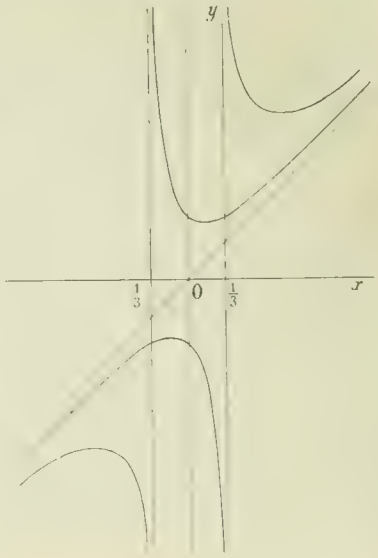


Fig. 3.

J. RODA, à Toulouse.

Bonnes solutions : MM. J. Haag, à Pont-à-Mousson ; E.-N. Barisien ; Parrod, à Vesoul.
Assez bonnes solutions : MM. A. Sainte-Laguë, élève de l'École normale supérieure ; A. Dupont, à Saumur ; R. Bouvaist.

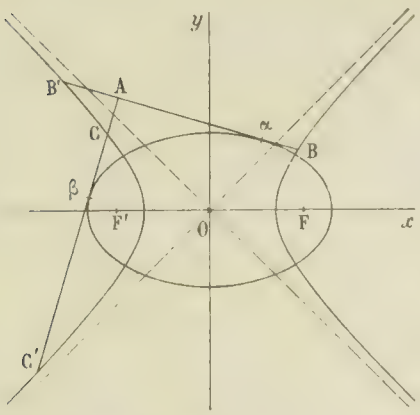
---

**1194.** — *Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse donnée intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales.*

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse donnée; celle de l'hyperbole équilatère homofocale est

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} = \frac{c^2}{2}.$$

Soient en outre $x_0$ et $y_0$ les coordonnées du point A d'où l'on mène des tangentes rectangulaires




à l'ellipse, et $\varphi$ l'angle que l'une des directions de AB, par exemple, fait avec $Ox$; une des directions de l'autre fera l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$ avec $Ox$.

Cela posé, en appelant $M(x, y)$ le point courant de AB et $\rho$ la valeur algébrique du segment AM, nous aurons

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi, \qquad y = y_0 + \rho \sin \varphi,$$

et les $\rho$ des points de rencontre de l'hyperbole avec AM seront donnés par l'équation du second degré

$$\rho^2 \cos 2\varphi + 2\rho(x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi) + H_0 = 0,$$

en posant

$$H_0 = x_0^2 - y_0^2 - \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Il résulte de là que

$$\overline{BB'}^2 = (\rho' - \rho'')^2 = 4\frac{(x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)^2 - H_0 \cos 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}$$

ou

$$\overline{BB'}^2 = 4\frac{(x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)^2 - \frac{c^2}{2} \cos 2\varphi}{\cos^2 2\varphi};$$

pour la tangente perpendiculaire, changeons $\varphi$ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$, nous aurons

$$\overline{CC'}^2 = 4\frac{(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)^2 - \frac{c^2}{2} \cos 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}.$$

Il s'agit de montrer que

$$\overline{BB'}^2 = \overline{CC'}^2.$$

c'est-à-dire que

$$(x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)^2 + c^2 \cos 2\varphi = (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)^2.$$

Or en exprimant que la première droite est tangente à l'ellipse, on est conduit à écrire que l'équation suivante

$$\rho^2\left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right) + 2\rho\left(\frac{x_0 \cos \varphi}{a^2} - \frac{y_0 \sin \varphi}{b^2}\right) + E_0 = 0$$

a une racine double; ce calcul donne

$$(x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi;$$

on a de même

$$(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi,$$

et l'on a bien la relation annoncée

$$(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)^2 - (x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)^2 = c^2 \cos 2\varphi.$$

M. T. Lemoyne donne de ce théorème la démonstration suivante : on sait que les cordes d'une conique qui touchent une conique homofocale sont proportionnelles aux carrés des diamètres de la première qui leur sont parallèles; or ici les diamètres parallèles à AB et AC sont rectangulaires, donc leurs carrés sont égaux et de signes contraires. Le théorème s'en suit immédiatement.

M. É. Foucart, qui nous a envoyé une bonne solution de cette question, signale que le théorème est dû à M. Mannheim et a paru dans les Nouvelles Annales.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist et E. Barisien.
Solutions satisfaisantes : MM. J. Haag, à Nancy; R. Javelot, à Givet.

**1200.** — *Etant données deux coniques* S *et* S′ *de centres* O *et* O′, *une tangente à* S *parallèle à* OO′ *est rencontrée par les quatre tangentes communes aux deux coniques aux points* $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. *Montrer que si* M *est le point de contact de la tangente et si* $a$ *est la longueur du demi-diamètre de* S *dirigé suivant* OO′, *on a*

$$MA_1 . MA_2 . MA_3 . MA_4 = a^4.$$

Prenons pour axe des $x$ la tangente à (S) au point M, et, pour axe des $y$, le diamètre OM.

Les équations tangentielles des deux coniques sont

$$(S) \qquad \varepsilon a^2 u^2 + 2bvw + w^2 = 0,$$

$$(S') \qquad \alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2\beta' wu + 2\beta'' uv = 0,$$

$\varepsilon$ étant égal à $\mp 1$ suivant que (S) est une ellipse ou une hyperbole, et avec la condition $\frac{\beta}{\alpha''} = b$, qui exprime que la droite OO′ est parallèle à M$x$.

L'équation d'une tangente commune, $uX + vY + w = 0$, peut également s'écrire $Y = m(X - x)$, $x$ désignant l'abscisse de son point de rencontre avec M$x$.

On a ainsi
$$\frac{u}{m} = \frac{v}{-1} = \frac{w}{-mx}.$$

et, par suite, en portant dans les équations de (S) et (S′),

$$(\varepsilon x^2 + \varepsilon a^2)m^2 + 2bx = 0.$$

$$(\alpha'' x^2 - 2\beta' x + \alpha)m^2 + 2(\beta x - \beta'')m + \alpha' = 0.$$

L'élimination de $m$ donne l'équation aux abscisses des points $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ :

$$(4b^2\alpha'' - 4b\beta + \alpha')x^4 + \cdots + \alpha' a^4 = 0,$$

ou
$$\alpha' x^4 + \cdots + \alpha' a^4 = 0,$$

en vertu de l'hypothèse $\beta = b\alpha''$. On a donc $x_1 x_2 x_3 x_4 = a^4$, ce qui démontre la proposition annoncée.

VASNIER.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist ; A. Sto Lagüe, élève de l'Ecole normale supérieure ; Parrod, à Vesoul ; J. Haag, à Nancy ; T. Lemoyne, à Troyes ; Dulimbert, à Grenoble.

---

**1201.** — *Etant donnée une hypocycloïde à trois rebroussements, on mène par chaque point* A *de la courbe la droite* Δ *qui fait avec la tangente en* A *un angle donné* θ. *Par un point* M *du plan passent trois droites* Δ *auxquelles correspondent trois points* $A_1$, $A_2$, *et* $A_3$.

1° *Trouver le lieu* S *des points* M *tels que les trois points* $A_1$, $A_2$, $A_3$, *soient sur une même droite* D *et montrer que ce lieu ne dépend pas de* θ.

2° *Trouver l'enveloppe des droites* D *correspondant à l'angle* θ *et étudier les variations de cette enveloppe quand* θ *varie.*

3° *Trouver l'enveloppe des droites* D *correspondant à un même point* M *de* S *et étudier les variations de cette enveloppe quand* M *se déplace sur* S.

1. Soient

$$x \cos\omega + y \sin\omega = \cos 3\omega,$$
$$-x \sin\omega + y \cos\omega = -3 \sin 3\omega$$

les équations d'une tangente à H et de la normale correspondante.

Posons $\qquad x + iy = \xi, \qquad x - iy = \eta, \qquad e^{2i\omega} = z;$

les équations ci-dessus deviennent

$$(T) \qquad \xi + z\eta = \frac{z+1}{z},$$

$$(N) \qquad \xi - z\eta = 3\,\frac{1-z}{z};$$

d'où les coordonnées d'un point de la courbe

$$(1)\qquad \xi_0 = \frac{2 - z^3}{z}, \qquad \eta_0 = \frac{2z^3 - 1}{z^2}.$$

Posons $e^{2i\omega} = \theta$. La droite $\Delta$ a pour équation

$$(\Delta)\qquad \xi + z\theta\eta = \xi_0 + z\theta\eta_0 = \frac{(2\theta - 1)z^3 + (2 - \theta)}{z}.$$

Écrivons que cette droite passe par un point $(p, q)$ et ordonnons :

$$(2)\qquad (2\theta - 1)z^3 - \theta q z^2 - pz + (2 - \theta) = 0.$$

Soit maintenant

$$uz + v\eta + 1 = 0,$$

une droite D : l'équation aux $z$ de rencontre de D et de H est

$$(3)\qquad uz^3 - 2vz^2 - z^2 - 2uz + v = 0.$$

Ecrivons que le premier membre de cette équation est divisible par le premier membre de l'équation (2).

Le quotient ne peut être, à priori, que

$$\frac{u}{2\theta - 1} = \frac{v}{2 - \theta}.$$

d'où, par identification, les conditions

$$(4)\qquad \frac{\theta q u}{2\theta - 1} = \frac{3v}{2 - \theta}, \qquad \frac{pv}{2 - \theta} = \frac{3\theta u}{2\theta - 1}, \qquad \frac{pu}{2\theta - 1} - \frac{\theta q v}{2 - \theta} = 1.$$

Pour éliminer $u$ et $v$ entre ces trois équations, il suffit de multiplier les deux premières membre à membre, d'où

$$pq = 9, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x^2 + y^2 = 9 : \qquad (S)$$

tel est le lieu du point M ; c'est la circonférence qui passe aux trois points de rebroussement de H. Ce lieu est donc indépendant de $\theta$.

2. L'élimination de $(p, q)$ entre les équations (4) donne

$$(5)\qquad 3\theta(2 - \theta)^3 u^3 - 3(2\theta - 1)^3 v^3 = (2\theta - 1)^2(2 - \theta)^2 uv,$$

telle est l'équation tangentielle de l'enveloppe H′ de D.

On peut écrire cette équation

$$\left(\frac{3\theta^{\frac{2}{3}}}{2\theta - 1}u\right)^3 + \left(\frac{3\theta^{\frac{1}{3}}}{2 - \theta}v\right)^3 = \left(\frac{3\theta^{\frac{2}{3}}}{2\theta - 1}u\right)\left(\frac{3\theta^{\frac{1}{3}}}{2 - \theta}v\right).$$

Or il est aisé de reconnaître que l'équation tangentielle de H est

$$u^3 + v^3 = uv ;$$

si donc $u, v$ sont les coordonnées d'une tangente à H et $u', v'$ celles d'une tangente à H′ on pourra poser

$$u' = \frac{2\theta - 1}{3\theta^{\frac{2}{3}}}u, \qquad v' = \frac{2 - \theta}{3\theta^{\frac{1}{3}}}v.$$

D'ailleurs posons provisoirement $\theta = z^3$,

et soient $\xi, \eta$ les coordonnées du point d'argument $z$ $\left(\omega = \frac{\theta}{3}\right)$ de la courbe H. Il vient, d'après les

formules (1)

$$u' = \frac{\eta}{3} u,$$

(6)

$$v' = \frac{\xi}{3} v.$$

Ceci posé, soient en coordonnées ordinaires

$$x \cos \omega + y \sin \omega = \rho, \qquad x \cos \omega' + y \sin \omega' = \rho',$$

les équations de nos deux droites : on a

$$u = \frac{e^{-i\omega}}{-2\rho}, \qquad u' = \frac{e^{-i\omega'}}{-2\rho'},$$

$$v = \frac{e^{i\omega}}{-2\rho}, \qquad v' = \frac{e^{i\omega'}}{-2\rho'},$$

$$uv = \frac{1}{4\rho^2}, \qquad u'v' = \frac{1}{4\rho'^2},$$

$$\frac{v}{u} = e^{2i\omega}; \qquad \frac{v'}{u'} = e^{2i\omega'}.$$

Les équations (6) donnent

$$u'v' = \frac{\eta\xi}{9} uv,$$

$$\frac{v'}{u'} = \frac{\xi}{\eta} \frac{v}{u}.$$

Soient $3\alpha$ et $\varphi$ les coordonnées polaires du point $(\xi, \eta)$, on a

$$\xi = 3\alpha e^{i\varphi}, \qquad \eta = 3\alpha e^{-i\varphi},$$

$$\xi\eta = 9\alpha^2, \qquad \frac{\xi}{\eta} = e^{2i\varphi},$$

d'où enfin

$$\frac{1}{\rho'^2} = \frac{\alpha^2}{\rho^2},$$

$$e^{2i\omega'} = e^{2i\varphi} e^{2i\omega},$$

d'où

(7)

$$\rho' = \frac{\rho}{\alpha},$$

$$\omega' = \omega + \varphi.$$

Il suit de là que la courbe H′ se déduit de la courbe H par une homothétie autour de l'origine dans le rapport $\frac{1}{\alpha}$ suivie d'une rotation de l'angle $\varphi$ autour de l'origine. C'est donc également une hypocycloïde.

Nous allons maintenant chercher son enveloppe quand $\theta$ varie.

Posons à cet effet

$$\frac{\theta - 2}{2\theta - 1} = \lambda,$$

l'équation de H′ devient

$$\lambda^3(\lambda - 2)u^3 + (1 - 2\lambda)v^3 = \lambda uv.$$

Dérivons par rapport à $\lambda$, il vient

$$\lambda^2(2\lambda - 3)u^3 - v^3 = \lambda uv.$$

En divisant les deux membres de chacune de ces équations par $uv$, on a deux équations linéaires en $\frac{u^2}{v}$ et $\frac{v^2}{u}$ qui donnent

$$\frac{u^2}{v} = \frac{1}{3\lambda(\lambda - 1)},$$

$$\frac{v^2}{u} = \frac{-\lambda^2}{3(\lambda - 1)}.$$

L'élimination de $\lambda$ entre ces deux équations du 2e degré est alors très simple et conduit à l'équation

$$27(u^3 + v^3) + 27uv - 1,$$

que l'on met aisément sous la forme

$$\left(u + v - \frac{1}{3}\right)\left[\left(u - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(u - \frac{1}{3}\right)\left(v + \frac{1}{3}\right) + \left(v + \frac{1}{3}\right)^2\right] = 0;$$

L'enveloppe se décompose donc en trois points ; on reconnaît aisément que ces trois points sont les trois rebroussements de H.

On se rend compte de ce fait en appliquant la transformation (7) aux symétriques du point P ($\xi$, $\eta$) par rapport aux tangentes de rebroussement de H.

On peut faire sur la droite D une dernière remarque ; posons, dans les équations (4)

$$p = \frac{-3\theta}{z}, \qquad q = \frac{3z}{\theta},$$

formes légitimées par $pq = 9$.

Il vient

$$\frac{uz}{2\theta - 1} + \frac{v}{2 - \theta} = 0,$$

$$\frac{3\theta u}{z(2\theta - 1)} + \frac{3zv}{2 - \theta} + 1 = 0,$$

équations d'où l'on déduit $u$ et $v$ et l'équation de D

$$\text{(D)} \qquad \xi - \frac{\theta - 2}{2\theta - 1} z\eta + 3\frac{z^3 - \theta}{(2\theta - 1)z} = 0.$$

On peut identifier cette équation avec l'équation de la droite $\Delta$ en posant $\frac{\theta - 2}{2\theta - 1} = \lambda$ et vérifier que la droite D passe bien au point d'argument $z$ de H. Donc la droite D fait avec H un angle constant $\theta'$ défini par

$$e^{2i\theta'} = \frac{e^{2i\theta} - 2}{ze^{2i\theta} - 1},$$

relation qu'on transforme aisément en

$$\operatorname{cotg}\theta \operatorname{cotg}\theta' = 3.$$

**3** Les droites D correspondant à un même point M de S s'obtiendront en remplaçant dans l'équation de D, $z$ par une expression de la forme $k\theta$, le point M ayant pour coordonnées

$$p = \frac{-3}{k}, \qquad q = 3k.$$

L'équation de D prend alors la forme

$$(3k + \eta)(k\theta)^2 + 2(\xi - k\eta)(k\theta) - (k\xi + 3) = 0,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'enveloppe demandée

$$(\xi - k\eta)^2 - (k\xi + 3)(\eta + 3k) = 0.$$

Cette enveloppe est donc une conique C.

On peut écrire son équation sous la forme

$$\text{(C)} \qquad (\eta^2 + 3\xi)k^2 - (\eta\xi - 9)k + (\xi^2 + 3\eta) = 0.$$

Il est très facile de vérifier que les trois coniques

$$\eta^2 + 3\xi = 0, \quad \eta\xi - 9 = 0, \quad \xi^2 + 3\eta = 0$$

ont 3 points communs qui sont précisément les 3 rebroussements de H.

De plus l'équation (C) donne immédiatement pour enveloppe de C

$$(\eta\xi - 9)^2 = 4(\eta^2 + 3\xi)(\xi^2 + 3\eta)$$

équation qui est précisément celle de H.

Donc enfin la conique C touche la courbe H et passe en ses trois points de rebroussement.

Nous allons montrer que toutes les coniques C, qui sont des hyperboles, sont semblables entre elles : leurs asymptotes forment un angle constant de 60°.

En effet, les directions asymptotiques sont données par

$$\xi^2 - k\eta\xi + k^2\eta^2 = 0.$$

Soient $\xi = \rho e^{i\varphi}$, $\eta = \rho e^{-i\varphi}$, $k = -e^{-i\alpha}$,

$\alpha$ sera l'argument du point M. Il vient

$$\rho^{2i(2\varphi+\alpha)} + \rho^{i(2\varphi+\alpha)} + 1 = 0,$$

relation qu'on transforme aisément en

$$\cos(2\varphi + \alpha) + \frac{1}{2} = 0,$$

ou

$$\cos(2\varphi + \alpha) = \cos\frac{2\pi}{3}.$$

d'où

$$2\varphi' + \alpha = \frac{2\pi}{3}, \qquad \varphi'' = \frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}.$$

ou

$$2\varphi'' + \alpha = \frac{4\pi}{3}, \qquad \varphi' = \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$\varphi'' - \varphi' = \frac{\pi}{3}.$$

Enfin, on peut vérifier que le $z$ de contact de C avec H est égal à K et que l'origine a pour polaire par rapport à C la tangente en M au cercle S.

L. BICKART.

Autre solution M. J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1276.** On considère deux points M et M′ d'une ellipse situés aux extrémités de deux diamètres conjugués et les deux droites Δ et Δ′ symétriques du grand axe par rapport aux tangentes en M et M′.

Trouver le lieu du point de rencontre de ces droites quand le point M se déplace sur l'ellipse donnée.

Même question en remplaçant la tangente en M et la tangente en M′ par les normales.

E.-N. Barisien.

**1277.** On considère une équation du quatrième degré

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$$

et on envisage les quatre racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ comme étant les abscisses de quatre points A, B, C, D de $Ox$.

Trouver l'équation qui admet pour racines les abscisses des points P tels que PA.PB = PC.PD.

Voir ce qui se passe quand cette nouvelle équation admet une racine nulle, une racine infinie ou une racine double.

Montrer que, dans le cas général, il suffit de connaître une racine de cette équation pour pouvoir calculer celles de la première.

E. H.

**1278.** — Dans la machine de Linde, l'air, qu'on supposera puisé dans l'atmosphère à la température de 0°, est comprimé à 200 atmosphères, puis détendu à 20 atmosphères. Dans cette opération, une fraction $x$ de l'air se liquéfie.

L'air non liquéfié et supposé à 0° par échange de chaleur avec le courant d'air inverse est comprimé de nou-

veau, à température constante, de 20 à 200 atmosphères, et on lui ajoute de l'air atmosphérique, que l'on porte également à 200 atmosphères, pour compenser le départ de celui qui s'est liquéfié ; puis on détend, et ainsi de suite.

Sachant que la machine fournit un demi-kilogramme par cheval-heure, on demande de déterminer $x$.

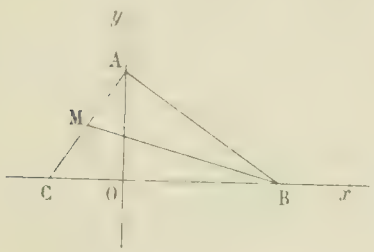
J. Lemoine.

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1198.** — *On donne deux axes rectangulaires $x'x$, $y'y$ se coupant au point O et sur Oy un point A* (OA $= h$). *Un angle droit tourne autour du point A et détermine avec $x'x$ un triangle rectangle* ABC. *Étudier comment varie la longueur $y$ de la médiane* BM *de ce triangle quand le point* B *parcourt la demi-droite* O$x$ (OB $= x$). *Tracer la courbe qui représente les variations de cette fonction.*

*Chercher pour quelles valeurs de $x$ la fonction $y$ prend une valeur donnée $l$ et mettre ces valeurs sous la forme d'une somme ou d'une différence de deux radicaux simples. En déduire une construction de la courbe par points.*




Dans le triangle rectangle ABC nous avons

$$\overline{OB}\,.\,\overline{OC} = \overline{OA}^2$$

ou

$$\overline{OC} = -\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}} = -\frac{h^2}{x};$$

l'abscisse du point C est donc $-\frac{h^2}{x}$, et comme l'ordonnée du point A est $h$, les coordonnées du point M sont $-\frac{h^2}{2x}$ et $\frac{h}{2}$, et par suite la longueur $y$ de la médiane BM est donnée par la relation

$$(1) \qquad y^2 = \left(x + \frac{h^2}{2x}\right)^2 + \frac{h^2}{4}.$$

ou

$$y^2 = x^2 + \frac{3h^2}{4} + \frac{h^4}{4x^2}.$$

ou enfin

$$y = +\sqrt{x^2 + \frac{3h^2}{4} + \frac{h^4}{4x^2}}.$$

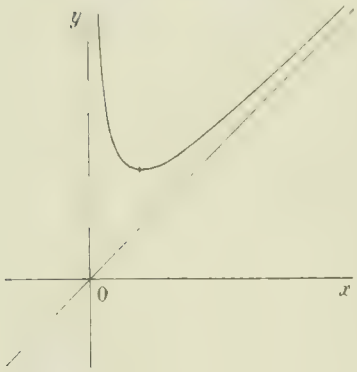
$y$ est une fonction continue pour toutes les valeurs de $x$, excepté pour $x = 0$. A deux valeurs de $x$ égales et de signes contraires correspond la même valeur de $y$. Nous ferons varier $x$ de 0 à $+\infty$.

La dérivée de $y$ par rapport à $x$ est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - \frac{2h^4}{4x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{3h^2}{4} + \frac{h^4}{4x^2}}},$$

ou
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^4 - h^4}{4x^2\sqrt{x^2 + \frac{5h^2}{4} + \frac{h^4}{4x^2}}}.$$

Elle est positive si $x$ est plus grand que $\frac{h}{\sqrt{2}}$, et négative si $x$ est plus petit que $\frac{h}{\sqrt{2}}$. Nous pouvons donc dresser le tableau de variations suivant :




| $x$ | $0$ | croît | $\frac{h}{\sqrt{2}}$ | croît | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dy}{dx}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | décroît | $\frac{3h}{2}$ | croît | $+\infty$ |

ce qui permet de construire la courbe correspondante.

On voit aisément que la droite $Y = x$ est asymptote à la courbe, car la différence

$$y - Y = \sqrt{x^2 + \frac{5h^2}{4} + \frac{h^4}{4x^2}} - x$$

peut s'écrire

$$y - Y = \frac{\frac{5h^2}{4} - \frac{h^4}{4x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{5h^2}{4} + \frac{h^4}{4x^2}} + x}$$

et a pour limite zéro quand $x$ croît indéfiniment. De plus on voit que $y - Y$ est positif pour $x > 0$, par suite la courbe est au-dessus de son asymptote.

En prenant la symétrique de cette courbe par rapport aux deux axes on obtient une courbe du quatrième degré qui a pour équation

$$y^2 = x^2 + \frac{5h^2}{4} + \frac{h^4}{4x^2}$$

ou
$$4x^2(x^2 - y^2) + 5h^2x^2 + h^4 = 0.$$

Revenons à l'équation (1) et écrivons que $y$ prend la valeur $l$, nous avons

$$l^2 = \left(x + \frac{h^2}{2x}\right)^2 + \frac{h^2}{4}$$

ou
$$x + \frac{h^2}{2x} = \pm\sqrt{l^2 - \frac{h^2}{4}}$$

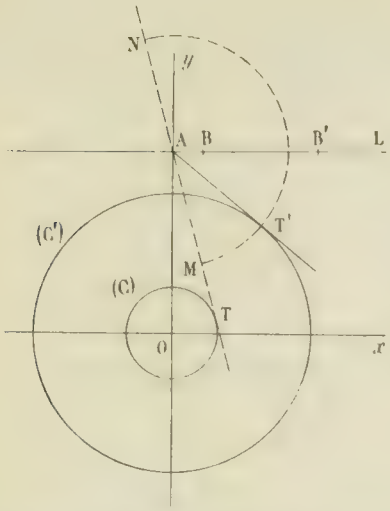
ou encore
$$2x^2 \pm 2x\sqrt{l^2 - \frac{h^2}{4}} + h^2 = 0;$$

et, en résolvant cette équation par rapport à $x$,

$$x = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{l^2 - \frac{h^2}{4}} \pm \sqrt{l^2 - \frac{9h^2}{4}}\right].$$

Prenons seulement les valeurs positives de $x$

$$x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{l^2 - \frac{h^2}{4}} \pm \sqrt{l_2 - \frac{9h^2}{4}}\right].$$




Ces valeurs ne sont réelles que si $l$ est supérieur à $\frac{3h}{2}$, ce qui résulte d'ailleurs de la discussion qui précède.

Pour déduire de là une construction de la courbe par points, traçons les cercles C et C′ ayant pour centre le point O et pour rayons respectivement $\frac{h}{2}$ et $\frac{3h}{2}$, et du point A de $Oy$ d'ordonnée $l$, menons les tangentes AT et AT′ à ces deux cercles. Nous avons $AT = \sqrt{l^2 - \frac{h^2}{4}}$, $AT' = \sqrt{l^2 - \frac{9h^2}{4}}$. Le cercle de centre A et de rayon AT′ rencontre AT en deux points M et N tels que

$$TM = \sqrt{l^2 - \frac{h^2}{4}} - \sqrt{l^2 - \frac{9h^2}{4}},$$

$$TN = \sqrt{l^2 - \frac{h^2}{4}} + \sqrt{l^2 - \frac{9h^2}{4}};$$

en prenant les moitiés de ces longueurs nous aurons les abscisses des points de la courbe correspondant à l'ordonnée $l$. Il suffira donc de porter sur la droite AL parallèle à $Ox$ des longueurs AB et AB égales à $\frac{TM}{2}$ et $\frac{TN}{2}$ pour avoir des points de la courbe.

J. HAAG, à Nancy.

Bonnes solutions par MM. René Javelot, à Givet, et A. Ste Laguë, élève de l'école normale supérieure.

---

**1210**. — *Une droite de longueur constante a ses extrémités* A *et* B *qui glissent sur les deux droites rectangulaires* $Ox$, $Oy$. *Trouver le lieu des points de rencontre des deux courbes suivantes : 1° l'hyperbole tangente à* AB *et ayant* $Ox$ *et* $Oy$ *pour asymptotes ; 2° la parabole tangente à* $Ox$ *et* $Oy$ *en* A *et* B.

Désignons par $a$ l'abscisse du point A, par $b$ l'ordonnée du point B, nous avons

(1) $$a^2 + b^2 = l^2,$$

$l$ étant la longueur constante donnée.

Une hyperbole admettant $Ox$ et $Oy$ pour asymptotes a pour équation $xy = \lambda$ ; elle sera tangente à AB si elle passe par le milieu $I\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ du segment AB. On a ainsi la condition $\frac{ab}{4} = \lambda$, et par suite l'équation de l'hyperbole est

(H) $$4xy - ab = 0.$$

D'autre part, toute conique touchant les axes en A et B a une équation de la forme $(bx + ay - ab)^2 + 2\lambda xy = 0$. En écrivant que cette conique est une parabole, on trouve $\lambda = -2ab$, et par suite, l'équation de la parabole est

(P) $$(bx + ay - ab)^2 - 4abxy = 0.$$

Nous avons à chercher le lieu des points communs aux coniques (H) et (P), quand $a$ et $b$ varient en vérifiant la relation (1).

Ajoutons à l'équation de (P) celle de (H) multipliée par $ab$, nous obtenons

$$(bx + ay - ab)^2 - a^2b^2 = 0$$

ou

$$(bx + ay)(bx + ay - 2ab) = 0 ;$$

nous avons ainsi en évidence un couple de sécantes communes aux deux coniques, et pour avoir les points communs aux deux courbes, nous remplacerons l'une d'elles, la parabole par exemple, par les deux sécantes communes.

Il est aisé de voir que la droite $bx + ay = 0$ ne rencontre pas l'hyperbole en des points réels.

Considérons maintenant la sécante $bx + ay - 2ab = 0$, et déterminons les coordonnées des points de rencontre de cette droite et de l'hyperbole $4xy - ab = 0$. En éliminant $y$ entre ces deux équations, on forme l'équation aux abscisses

$$4x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

qui a pour racines
$$x = \frac{a(2 + \varepsilon\sqrt{3})}{2}, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

A chaque valeur de $x$ correspond une valeur de $y$, $y = \frac{ab}{4x}$, ou

$$y = \frac{b}{2(2 + \varepsilon\sqrt{3})} = \frac{b(2 - \varepsilon\sqrt{3})}{2};$$

par suite, l'hyperbole et la parabole se rencontrent en deux points réels seulement, et ces points ont pour coordonnées

$$x = \frac{a(2 + \varepsilon\sqrt{3})}{2}, \qquad y = \frac{b(2 - \varepsilon\sqrt{3})}{2}, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Nous aurons le lieu de ces points en éliminant $a$ et $b$ entre ces équations et la relation (1), c'est-à-dire en remplaçant dans celle-ci $a$ par $\frac{2x}{2 + \varepsilon\sqrt{3}}$, $b$ par $\frac{2y}{2 - \varepsilon\sqrt{3}}$, et nous avons ainsi

$$\frac{4x^2}{(2 + \varepsilon\sqrt{3})^2} + \frac{4y^2}{(2 - \varepsilon\sqrt{3})^2} - l^2 = 0.$$

Le lieu se compose de deux ellipses rapportées à leurs axes et symétriques l'une de l'autre par rapport à la bissectrice de l'angle $xOy$.

**Solution géométrique.** — Désignons par $x$, $y$ les points à l'infini sur les axes et par L le point à l'infini sur AB, et projetons coniquement la figure de façon que les points O et L soient deux points rejetés à l'infini dans des directions rectangulaires. On obtient alors le rectangle AB$xy$ (*fig.* 1); la parabole se transforme en une ellipse dont l'un des axes est AB et dont l'autre a pour longueur A$x$, et l'hyperbole en une ellipse dont l'un des axes est $xy$ et dont l'autre a pour longueur A$x$. Par suite ces deux ellipses sont homothétiques, elles admettent comme cordes communes la droite de l'infini OL et une droite parallèle à AB équidistante de AB et de $xy$, et qui est par suite conjuguée harmonique de OL par rapport à AB et $xy$.

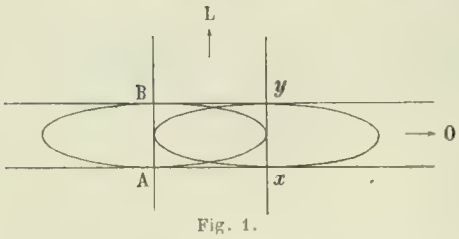


Fig. 1.

En revenant à la première figure, on voit que si l'on mène par le point O une parallèle OL à AB, puis si l'on construit A'B' parallèle à AB, telle que OA' = 2OA, OB' = 2OB, les droites OL et A'B' constituent un système de sécantes communes à la parabole et à l'hyperbole.

La parallèle OL à AB ne rencontre pas l'hyperbole; la droite A'B' la rencontre en deux points M et N. Cherchons le lieu de ces deux points.

D'après une propriété bien connue de l'hyperbole, on a

$$MA'.MB' = \overline{IA}^2 = \frac{l^2}{4},$$

d'ailleurs $\qquad MA' + MB' = A'B' = 2AB = 2l,$

donc MA' et MB' sont racines de l'équation

$$u^2 - 2lu + \frac{l^2}{4} = 0.$$

Les longueurs MA' et MB' étant constantes, le lieu de M est une ellipse ayant pour axes O$x$ et O$y$, les longueurs de ces axes étant respectivement MB' et MA'.

On voit de même que le lieu de N est une ellipse symétrique de la première par rapport à la bissectrice de l'angle $xOy$.

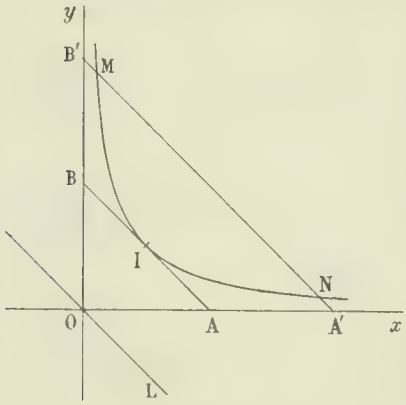


Fig. 2.

A. Ste-LAGUE, élève de l'école normale supérieure.

Bonne solution par M. J. Haag.

## PHYSIQUE

**1199**. - *Une cloche cylindrique a une hauteur extérieure $a$, une hauteur intérieure $b$, une section extérieure $s$, une section intérieure $\sigma$, un poids $m$. On la place verticalement, l'ouverture en bas, sur l'eau et on suppose qu'elle flotte d'abord en équilibre stable. L'eau est contenue dans une éprouvette de section $S$ qu'on ferme, à une certaine distance au dessus de la cloche, par un piston sans frottement. Quelle charge* M *doit-on mettre sur ce piston, poids du piston compris, pour faire couler la cloche au fond de l'eau?*

*Application numérique:* $a = 20^{cm}$, $b = 19^{cm}$, $s = 18^{cq}$, $\sigma = 16^{cq}$, $m = 248^{gr}$, $S = 30^{cq}$.

*La température est* 0°, *la hauteur barométrique* $H = 75^{cm}$, *la masse spécifique du mercure* $\mu = 13{,}6$, *celle de l'eau* $e = 1$ *et celle de l'air négligeable.*

Dès que la cloche sera complètement immergée, la moindre augmentation de pression la fera couler. Considérons-la donc dans cette position et soit $x$ la hauteur à laquelle l'eau est montée à l'intérieur.

L'équilibre de la cloche exige que le poids de la cloche, augmenté du poids de l'eau qui y est entrée, soit égal au poids de l'eau déplacée, ce qui donne

$$(1) \qquad m + \sigma x e = S a e.$$

Appliquons la loi de Mariotte à l'air emprisonné sous la cloche. Au moment où l'on pose la cloche sur l'eau, son volume est $\sigma b$ et sa pression $H\mu g$. La cloche une fois enfoncée, son volume est réduit à $\sigma(b - x)$ et sa pression se compose :

1° de la pression atmosphérique, transmise par le piston, l'air de l'éprouvette et l'eau, $H\mu g$ ; 2° de la pression due au poids du piston, transmise par l'air de l'éprouvette et l'eau, $\frac{Mg}{S}$ ; 3° de la pression due à la différence des niveaux de l'eau à l'intérieur et à l'extérieur de la cloche, $(a - x)eg$. On aura donc

$$(2) \qquad \sigma b . H\mu g = \sigma(b - x)\left[H\mu g + \frac{Mg}{S} + (a - x)eg\right].$$

Remplacons les lettres par leurs valeurs : (1) donne

$$x = 7. \qquad \text{d'où} \qquad b - x = 12 \qquad \text{et} \qquad a - x = 13.$$

L'équation (1) devient

$$19 \times 75 \times 13{,}6 = 12\left(75 \times 13.6 + \frac{M}{S} + 13\right),$$

d'où l'on tire $$\frac{M}{S} = 582,$$

et enfin, pour $S = 30$, $$M = 17\,460^{gr}.$$

## GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

**1160**. — *On donne dans le plan horizontal de projection le triangle équilatéral* ABC *de* $160^{mm}$ *de côté. Ce triangle est la trace horizontale d'un trièdre trirectangle* SABC *dont le sommet s est situé en dessous du plan horizontal.*

*On déterminera la projection des* 3 *arêtes de ce trièdre.*

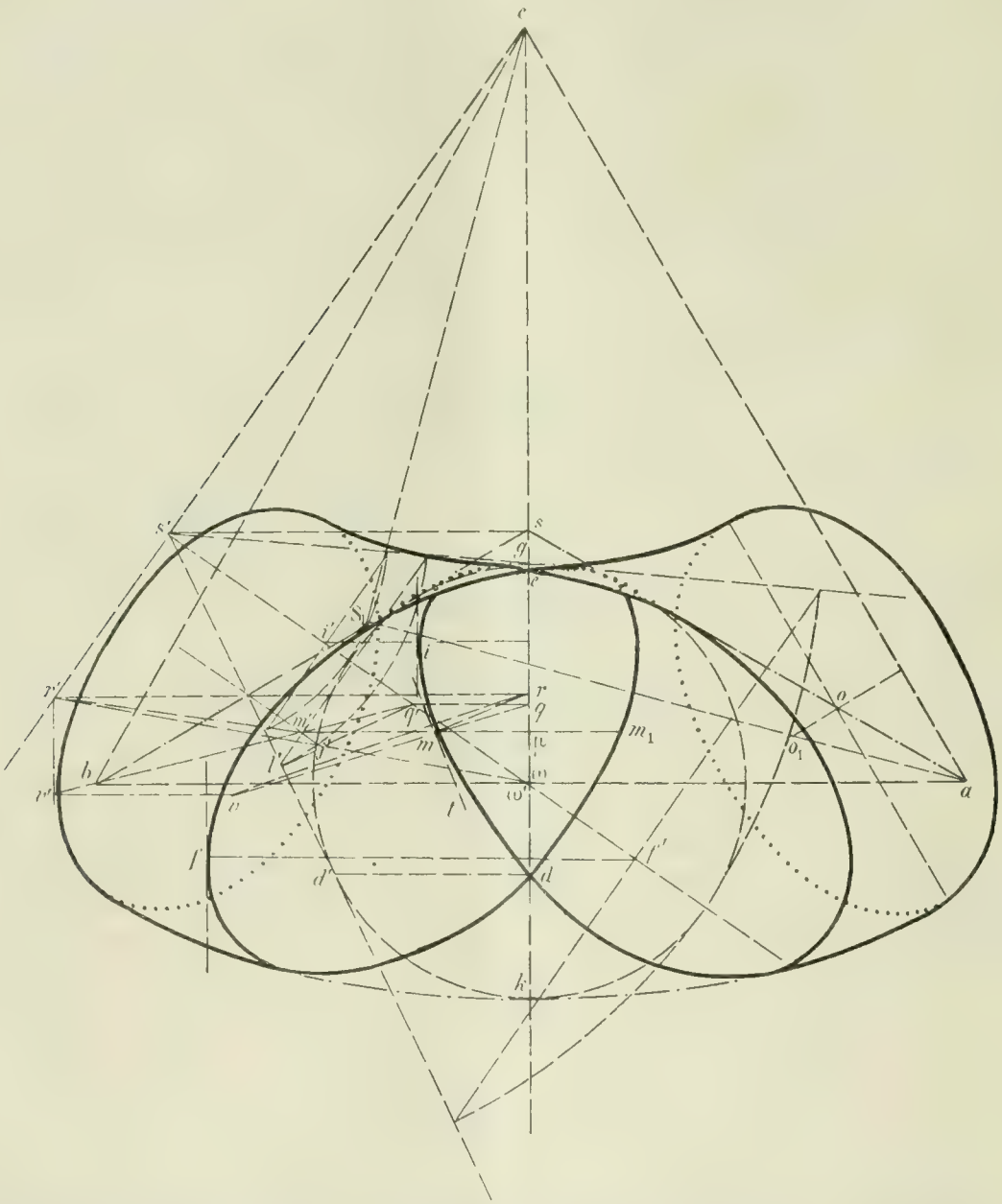
*On considère une sphère dont le centre* $\omega$ *est au milieu de la droite* AB ; *le rayon de cette sphère est de*

*40mm. Le grand cercle vertical* GK *de cette sphère, en tournant autour de l'arête* SC *du trièdre, engendre un tore dont on déterminera l'intersection avec le cône de sommet* S *circonscrit à la sphère.*

*On représentera le tore avec l'entaille conique en limitant la surface du tore aux deux faces* ASC *et* BSC *du trièdre donné.*

*Cadre de* 27cm *sur* 45. C *à égale distance des petits côtés et à* 50mm *du bord supérieur.*

(*Ecole centrale, 2e session, 1902.*)




Le tétraèdre SABC ayant son angle trièdre S trirectangle, le point $s$ est le point de concours des hauteurs du triangle $abc$; la cote de S est donnée par $ss_1$, hauteur du triangle rectangle $\omega s'c$.

*Construction du tore.* — Nous prendrons pour plan vertical de projection auxiliaire le plan vertical $sc$;

l'axe du tore est alors $(sc, s'c')$. Le cercle générateur du tore a sa projection verticale confondue avec le contour apparent vertical de la sphère donnée de centre $(\omega, \omega')$.

Pour déterminer la projection horizontale du contour apparent horizontal du tore nous avons pris l'ellipse projection horizontale du cercle de centre $(s, s')$, de rayon $s'\omega'$ et situé dans le plan de bout $a\omega s'$, puis nous avons construit la courbe parallèle en portant sur la normale en chaque point de cette ellipse, de part et d'autre de ce point, une longueur constante égale au rayon du cercle generateur du tore. Le lieu des extrémités ainsi obtenues est la courbe projection horizontale du contour apparent horizontal.

*Intersection du cône et du tore.* — Le plan vertical de projection choisi contient les axes des deux surfaces ; nous emploierons des sphères auxiliaires ayant pour centre commun le point de rencontre $(s, s')$ des axes. L'une de ces sphères, de rayon arbitraire $s'l'$, coupe le cône suivant deux parallèles dont l'un est $l'm'$ et le tore suivant deux parallèles dont l'un est $j'm'$, ce qui donne le point $m'$ de la projection verticale de l'intersection. On en déduit la projection horizontale $m$ en considérant le point $(m, m')$ comme situé sur la sphère auxiliaire employée. Faisant varier le rayon de cette sphère on aura autant de points que l'on voudra de l'intersection, en remarquant d'abord qu'à $m'$ correspondent deux points $m$ et $m_1$ symétriques l'un de l'autre par rapport à $s\omega$ qui sera axe de symétrie de la projection horizontale de l'intersection du cône et du tore, et ensuite qu'en ne considérant qu'une nappe du cône, chaque sphère auxiliaire donne quatre points de l'intersection.

Comme points importants nous avons obtenu les deux points doubles réels de l'intersection ; ils sont projetés horizontalement en $d$ et $e$ ; puis nous avons déterminé les points fournis par les sphères limites et qui sont projetés horizontalement en $f$ et $i$.

D'autres points remarquables sont ceux situés sur les génératrices de contour apparent horizontal du cône ; on les obtient en prenant l'intersection du tore avec chacune de ces génératrices. Une de ces génératrices rencontre l'axe du tore en $(s, s')$ ; on rabat sur le plan vertical de projection le plan de cet axe et de cette génératrice et les points de rencontre de la méridienne du tore et de la génératrice considérée sont les rabattements des points cherchés. Un relèvement donne ces points.

Nous avons obtenu la tangente en $(m, m')$ par la méthode des normales. Les normales en ces points sont $(mr, m'r')$ pour le tore et $(mq, m'q')$ pour le cone ; elles rencontrent le plan horizontal de $(r, r')$ aux points $(r, r')$ et $(v, v')$ et alors $mt$ est perpendiculaire à $rv$.

*Sections du tore par les plans* SAC *et* SBC. — Ces deux plans passant par l'axe du tore coupent la surface suivant des cercles méridiens. Pour la section par le plan SAC nous avons rabattu ce plan sur le plan horizontal en $S_1ac$ ; sur la perpendiculaire en $S_1$ à $S_1c$ nous avons pris $S_1o_1 = s'\omega'$ et nous avions en $o_1$ le centre du cercle rabattu. Nous l'avons relevé en $o$ et avons construit l'ellipse correspondante.

*Représentation du solide.* — Nous enlevons ce qui est dans le cône et par suite les parties de contour apparent horizontal du cône comprises entre les points de contact avec la courbe d'intersection. Nous conservons les portions de génératrices de contour apparent horizontal du cône comprises entre les points de contact avec la courbe.

Alors, négligeant la présence du plan horizontal de projection, nous avons immédiatement la visibilité. Tout est vu sur la courbe d'intersection sauf les petits arcs situés au-dessous du tore restant.

N. C.

## CONCOURS DE 1903 (*suite*)

### ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE

#### Section d'Artillerie et Génie.

ARITHMÉTIQUE.

**1.** Démontrer que tout nombre premier qui divise un produit de plusieurs facteurs divise nécessairement l'un d'eux.

**2.** Déterminer tous les couples de nombres $p$ et $q$ tels que les nombres $p^2 - q^2$ et $p^3 - q^3$ soient premiers entre eux.

Parmi les couples précédents, déterminer ceux pour lesquels le nombre $p^3 - q^3$ est un multiple de 210 augmenté d'une unité.

### Algèbre.

**1.** *a*) Énoncer et démontrer la loi de formation des réduites des fractions continues.

*b*) Démontrer que toute fraction qui s'approche plus de la valeur de la fraction continue totale qu'une réduite donnée, aura ses deux termes supérieurs aux termes correspondants de cette réduite.

**2.** *a*) Déterminer les valeurs de $x$, $y$ et $z$ à l'aide du système d'équations :

$$x + y - z = 2a, \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = z^2, \qquad (2)$$
$$m(x+y) = xy. \qquad (3)$$

*b*) Sachant que $a$ est une quantité réelle et positive, déterminer les limites de $m$, en fonction de $a$, de manière que les valeurs de $x$, $y$, $z$ soient réelles et positives.

### Géométrie.

**1.** *a*) Énoncer et démontrer la proposition qui donne la mesure de l'aire d'un triangle sphérique.

*b*) Énoncer et démontrer les propositions sur lesquelles s'appuie cette démonstration et dans lesquelles intervient la considération d'un fuseau.

**2.** Un point mobile P parcourt un arc de cercle ASB. On mène les droites PA, PB et l'on porte sur PB un segment PM égal au tiers de PA. Quel est le lieu décrit par le point M lorsque le point P va de A en B?

### Trigonométrie.

**1.** *a*) Résoudre un triangle sphérique connaissant deux côtés et l'angle compris. Les éléments inconnus seront donnés par des formules appropriées au calcul logarithmique.

*b*) Étant données les longitudes et les latitudes de deux points de la surface de la terre, calculer la distance de ces deux points.

**2.** *a*) Dans un triangle rectangle en A, on donne :

le côté $AB = c$ ;

la longueur $BP = l$ de la perpendiculaire abaissée de B sur une droite CP, divisant l'angle C en deux parties dont les sinus sont entre eux comme les nombres $m$ et $n$.

Calculer cos C.

*b*) Déterminer les limites du rapport $\frac{c}{l}$ en fonction de $\frac{m}{n}$, de manière que le problème soit possible.

### Géométrie analytique.

**1.** Qu'entend-on par asymptote d'une courbe ?

Les axes coordonnés étant quelconques, on demande de rechercher l'équation générale des asymptotes aux courbes du second degré. Dire quand ces asymptotes existeront et quand elles seront perpendiculaires entre elles.

Appliquer cette théorie à la courbe

$$y^2 - xy - 2x^2 + 3x + 1 = 0.$$

**2.** Par un point O pris sur une circonférence OMN de diamètre $d$, on mène trois cordes quelconques OA, OB, OC, faisant avec le diamètre OD des angles $\alpha$, $\alpha'$ et $\alpha''$, puis, sur chacune de ces cordes comme diamètre, on décrit une circonférence.

Démontrer que les trois circonférences ainsi obtenues se coupent en des points P, Q, R situés en ligne droite.

N. B. — On fera usage de coordonnées polaires en prenant le point O comme pôle et la droite OD comme axe polaire.

### Calcul logarithmique.

On donne les angles :

$$A = 26^\circ\, 11'\, 40'', \qquad B = 38^\circ\, 54'\, 20'', \qquad C = 14^\circ\, 34'\, 10''.$$

Trouver la valeur de X comprise entre 0 et 90° qui vérifie l'équation

$$(\operatorname{tg} X)^4 = \frac{\sin A \cos B}{\operatorname{tg} C}.$$

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

On donne les droites $a$, $b$, $c$.

On demande :

1° De trouver les projections d'une droite $d$ parallèle à $a$ et qui s'appuie sur $b$ et $c$.

Le point d'appui sur $b$ sera désigné par A ; le point d'appui sur $c$ sera désigné par B.

2° De construire les projections des arêtes d'un parallélépipède sachant :

α) qu'une première arête se termine d'une part au point A, d'autre part au point G situé sur la droite $b$, à droite de A et à 80 millimètres de ce dernier point.

β) qu'une seconde arête est la droite AB.

γ) qu'une troisième arête se termine d'une part au point B et d'autre part à un point D situé sur la droite $c$, à droite du point B et à $86^{mm}$ de ce dernier point.

3° De représenter le parallélépipède en le considérant comme un corps plein et opaque.

4° De chercher, par un rabattement, la vraie grandeur du parallélogramme diagonal passant par l'arête BD.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1279.**— On considère une parabole (P) de foyer F et un cercle (C). Soit M un point variable situé sur la parabole.

Le lieu des centres de similitude du cercle (C) et du cercle de centre M et de rayon MF, se compose de deux coniques (Γ) et (Γ').

Sur quelle courbe doit être situé le centre du cercle (C) pour que les coniques (Γ) et (Γ') soient des cercles ?

E.-N. BARISIEN.

**1280.** — Soient MM' et $M_1M_1'$ deux diamètres conjugués variables d'une ellipse. La tangente en M rencontre les normales en $M_1$ et $M_1'$ aux points P et Q.

1° Chacune des courbes lieux de P et Q est une quartique. Construire ces courbes.

2° Le lieu du milieu de PQ est une ellipse.

E.-N. BARISIEN.

**1281.** — La distance d'un point M d'une ellipse au point de Frégier correspondant est dans un rapport constant avec la longueur du diamètre conjugué à celui qui passe par M.

E.-N. BARISIEN.

## BIBLIOGRAPHIE

**Traité de géométrie**, par C. GUICHARD, professeur de l'Université de Clermont. — Deuxième partie : Compléments. — Paris, Librairie Vuibert et Nony, 63, boulevard Saint-Germain.

L'ouvrage de M. Guichard était attendu avec impatience par tous ses amis et par ceux qui, plus nombreux encore, sont renseignés sur le talent de l'auteur et sur ses hautes connaissances en géométrie.

Cette attente n'a pas été déçue : Ce nouveau volume est composé de manière à satisfaire les plus exigeants. Une analyse succincte suffira à convaincre nos lecteurs.

M. Guichard a divisé son livre en cinq sections.

La première renferme tous les compléments usuels relatifs à la géométrie plane : d'abord, les segments en ligne droite, le rapport anharmonique, les séries et faisceaux homographiques et l'involution ; puis, un chapitre sur les transversales, un sur les pôles et polaires par rapport à un cercle et un autre sur les faisceaux de cercles ; viennent ensuite un chapitre sur l'inversion, un autre sur les applications des théories précédentes au

tracé des cercles tangents à des droites et à des cercles et un dernier chapitre où sont exposées diverses propriétés, notamment celles qui concernent la droite de Simson et le cercle des neuf points.

Toute cette partie, présentée dans un ordre réfléchi, est rédigée sobrement, avec une grande clarté et une grande simplicité.

La deuxième section renferme des compléments qui se rattachent aux livres V et VI du traité de géométrie élémentaire du même auteur. M. Guichard y parle d'abord des polygones gauches et des faisceaux de plans ; ensuite il étend aux trièdres et aux tétraèdres les propriétés qu'il a déjà exposées sur les triangles dans le chapitre relatif aux transversales ; il s'arrête un instant sur les systèmes de quatre droites qui ont une infinité de sécantes communes, en montre les divers caractères et signale les cas principaux qui se présentent dans la géométrie du tétraèdre.

L'auteur traite ensuite, avec détail et avec une précision élégante, cette théorie des vecteurs que les programmes nouveaux ont mise au début de la mécanique et qui n'est pas autre chose en définitive que l'étude des lois de composition, de décomposition et d'équivalence des systèmes de forces appliquées à un corps solide.

Je trouve très bon que dans un ouvrage comme celui-ci, destiné aux meilleurs élèves de nos lycées et à ceux surtout qui ont en vue des études plus élevées, l'auteur ait développé cette théorie. Je ne pense pas, au contraire, qu'il convienne d'enseigner de pareilles abstractions dans les lycées. — J'ai lu avec attention les quelque quarante pages que M. Guichard leur a consacrées ; j'ai beaucoup goûté l'habileté qu'il a déployée dans l'exposition de ce symbolisme ; mais il m'a paru évident que tout cela est hors de la portée des élèves ordinaires de nos lycées, et que l'enseignement de pareilles abstractions contribuera puissamment à rebuter la plupart d'entre eux et à leur inspirer le dégoût des sciences mathématiques. Il était si simple de garder toutes ces choses pour l'enseignement de la statique, où elles sont alors à leur place et peuvent être présentées aux élèves d'une façon compréhensible! Quelques mots eussent suffi plus tard pour en généraliser le sens et pour en faire une théorie purement géométrique.

Je prie l'auteur d'excuser cette digression que m'a inspirée tout naturellement la lecture de son livre et l'influence que les nouveaux programmes ont eue sur sa composition et je reviens à l'analyse que j'ai commencée.

Le dernier chapitre de cette deuxième section est consacré aux projections centrales et renferme en particulier une étude très intéressante de la correspondance homologique dans un plan, présentée d'une façon neuve et originale.

La troisième section est tout entière consacrée à la sphère ; pôles et plans polaires dans la sphère, inversion dans l'espace, sphères orthogonales, sphères tangentes à des plans et à des sphères et enfin géométrie sur la sphère.

Dans la quatrième section, l'auteur s'occupe des sections coniques : il y a d'abord une étude assez détaillée de l'hyperbole par les procédés habituellement employés en géométrie élémentaire, puis un chapitre sur les directrices des coniques et les propriétés correspondantes, un autre sur les sections planes du cône de révolution, et, enfin, pour terminer, une belle application de la théorie des projections centrales à l'étude des principales propriétés projectives des coniques.

La cinquième section renferme une extension de l'idée de polygone plan et de l'idée de polyèdre, quelques mots sur la représentation d'un polyèdre sur un plan et, comme conséquence, une démonstration très élégante et très simple du théorème d'Euler sur les polyèdres convexes. Cette section se termine par l'étude des aires planes les plus simples et la démonstration de leur existence au moyen du *carrelage* que l'auteur emploie pour la définition et le calcul des aires. Je trouve ceci tout à fait inutile dans un ouvrage de géométrie élémentaire. C'est la seule critique que j'aie à faire du livre que je viens d'analyser.

Tel est, dans ses traits essentiels, le volume de compléments que M. Guichard vient de publier. Cet ouvrage si original à tant de points de vue, devrait être dans les mains, non-seulement des meilleurs élèves de nos lycées, mais encore des élèves des grandes écoles qui se proposent de poursuivre l'étude des sciences mathématiques et aussi de tous les professeurs de mathématiques dans les lycées et collèges.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

14e Année. N° 5 Février 1904.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LES CONIQUES CONSIDÉRÉES COMME COURBES UNICURSALES

par M. **Ch. Michel**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

**1**. Je poserai d'abord la notion du *rapport anharmonique* de quatre points d'une courbe unicursale. Il est possible, d'une infinité de manières, de déterminer un paramètre $\lambda$, de façon qu'à toute valeur de ce paramètre, il corresponde un point et un seul d'une courbe unicursale et, inversement, qu'à tout point de cette courbe il corresponde une valeur et une seule du paramètre. On dit alors que le paramètre $\lambda$ représente *proprement* un point de la courbe. On démontre, et je n'insiste pas sur ce résultat très connu, que, si $\lambda$ et $\mu$ sont deux paramètres représentant proprement un même point variable d'une courbe unicursale, il existe entre $\lambda$ et $\mu$ une relation homographique. Inversement, si $\lambda$ représente proprement un point d'une courbe unicursale et si $\mu$ est un nouveau paramètre lié à $\lambda$ par une relation homographique, $\mu$ représente proprement aussi un point de la courbe. Il résulte de là que, si l'on prend quatre points d'une courbe unicursale, le rapport anharmonique des paramètres de ces quatre points dans une représentation propre quelconque est indépendant de cette représentation. C'est la valeur constante de ce rapport anharmonique que nous appellerons le *rapport anharmonique* des quatre points sur la courbe unicursale.

Cette notion généralise celle du rapport anharmonique de quatre points sur une droite. D'ailleurs, il est possible de définir, sur une courbe unicursale quelconque comme sur une droite, la correspondance homographique entre deux points variables de cette courbe, et aussi la correspondance involutive. En particulier, les résultats que nous avons établis dans un précédent article relativement à l'involution sur une droite subsistent entièrement relativement à l'involution sur une courbe unicursale quelconque. Il convient toutefois de modifier et de présenter sous une forme plus générale la méthode qui conduit à la distinction entre les involutions à points doubles réels et les involutions à points doubles imaginaires conjugués. Pour cela, adoptons la définition suivante : étant donnés quatre points $M_1$ et $M_2$, $M_3$ et $M_4$, d'une courbe unicursale, ayant pour paramètres, dans une représentation propre, $\lambda_1$ et $\lambda_2$, $\lambda_3$ et $\lambda_4$, nous dirons que les deux premiers points *s'enchevêtrent* avec les deux seconds si l'on a l'inégalité

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4) > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} > 0,$$

et que les deux premiers points ne s'enchevêtrent pas avec les deux seconds, si l'on a les inégalités de sens contraire. Pour que cette définition soit acceptable, il faut qu'elle soit indépendante de la représentation propre choisie. Or la première ou la seconde inégalité peut s'écrire

$$\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2} > 0,$$

et elle exprime alors que le rapport anharmonique des quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ sur la courbe uni-

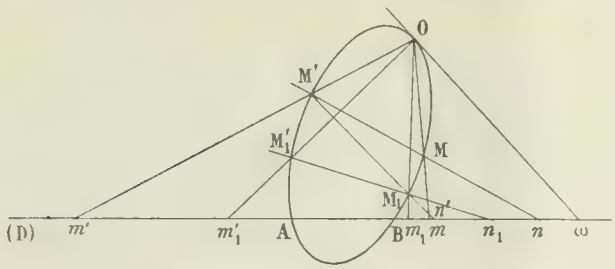
cursale est positif. C'est une condition qui est bien indépendante de la représentation paramétrique. La définition est donc acceptable; grâce à elle, la distinction établie entre les involutions à points doubles réels et les involutions à points doubles imaginaires conjugués sur une droite subsiste sur toute courbe unicursale.

Les coordonnées tangentielles d'une tangente à une courbe unicursale sont des fonctions rationnelles du paramètre du point de contact. Réciproquement, l'enveloppe d'une droite dont les coordonnées tangentielles sont des fonctions rationnelles d'un paramètre est une courbe unicursale. Nous définissons par suite, par application du principe de dualité, le rapport anharmonique de quatre tangentes à une courbe unicursale, qui se présente comme la généralisation du rapport anharmonique de quatre droites passant par un même point. Le rapport anharmonique de quatre tangentes à une courbe unicursale est égal au rapport anharmonique de leurs quatre points de contact.

2. Cela posé, arrivons aux coniques. Toute conique indécomposable est une courbe unicursale. En effet, toute droite variable passant par un point fixe d'une conique rencontre la conique en un point variable et un seul. Il s'ensuit que les coordonnées de ce point variable sont des fonctions rationnelles du paramètre dont dépend la droite autour du point fixe. Si, en outre, le paramètre représente proprement la droite autour du point fixe, il représente proprement aussi le point variable sur la conique.

D'après ce qui précède, il est possible de définir le rapport anharmonique de quatre points sur une conique. C'est, en particulier, le rapport anharmonique des quatre droites qui joignent un point quelconque de la conique à ces quatre points. Il en résulte que le rapport anharmonique des quatre droites qui joignent un point variable de la conique à quatre points fixes de cette conique est constant ; c'est le théorème de Chasles. On voit bien que c'est dans l'existence du rapport anharmonique de quatre points sur une conique que consiste justement le théorème dont Chasles a déduit toute la théorie des coniques. Du même coup, on obtient, par dualité, le théorème qui lui est corrélatif.

3. Soit une conique (C) et considérons une droite (D) la rencontrant en deux points A et B que nous supposerons d'abord distincts. Soient O un point fixe de la conique, M un point variable de cette courbe et $m$ le point où la droite OM rencontre la droite (D). A tout point M de la conique, il correspond un et un seul point $m$ de la droite, et inversement. Le paramètre $\lambda$, qui représente proprement le point $m$ sur (D), représente proprement aussi le point M sur (C).




Soient en outre M′ un point de la conique et $n$ le point de rencontre de MM′ avec (D). Si M′ reste fixe et si M varie sur (C), le rapport anharmonique de quatre positions du point $m$ est égal à celui des quatre positions correspondantes du point $n$. Or, quand $m$ vient en A ou en B, $n$ vient aussi en A ou en B. Par suite, le rapport anharmonique de deux positions du point $m$ et des deux points A et B est égal à celui des positions correspondantes du point $n$ et des points A et B. Si $\alpha$ et $\beta$ sont les paramètres des points A et B sur la droite (D) et aussi sur la conique (C) et si $\mu$ est le paramètre du point $n$, on voit que, lorsque MM′ tourne autour de M′, le rapport anharmonique

$$\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta} : \frac{\mu-\alpha}{\mu-\beta}$$

reste constant. Posons, d'une manière générale, $\varphi(x) = \dfrac{x-\alpha}{x-\beta}$. Le rapport anharmonique précédent s'écrit alors $\dfrac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\mu)}$. Si $\lambda'$ désigne le paramètre du point M′ sur la conique (C), on voit que la quantité

$$\frac{\varphi(\lambda)\varphi(\lambda')}{\varphi(\mu)}$$

reste invariable, quand la droite MM′ tourne autour du point M′, supposé fixe.

Je dis qu'elle conserve encore la même valeur, quand la sécante MM′ varie d'une façon quelconque. Soient en effet $M_1M_1'$ une autre position de la sécante, et $n_1$ le point de rencontre avec (D). Menons la droite $M'M_1$, qui coupe (D) en $n'$. Les deux droites M′M et $M'M_1$ passant par le point M′, on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{\varphi(\lambda)\varphi(\lambda')}{\varphi(\mu)} = \frac{\varphi(\lambda')\varphi(\lambda_1)}{\varphi(\mu')}.$$

Mais les droites $M'M_1$ et $M_1M_1'$ passent toutes deux par le point $M_1$ ; on a donc

$$\frac{\varphi(\lambda')\varphi(\lambda_1)}{\varphi(\mu')} = \frac{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_1')}{\varphi(\mu_1)},$$

et, par comparaison,

$$\frac{\varphi(\lambda)\varphi(\lambda')}{\varphi(\mu)} = \frac{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_1')}{\varphi(\mu_1)},$$

ce qui démontre le théorème.

Soit $\omega$ le point où la tangente en O rencontre (D), et désignons par $\gamma$ le paramètre commun des points O et $\omega$. On a la relation

$$\frac{\varphi(\lambda)\varphi(\lambda')}{\varphi(\mu)} = \varphi(\gamma),$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\gamma)} \cdot \frac{\varphi(\lambda')}{\varphi(\gamma)} = \frac{\varphi(\mu)}{\varphi(\gamma)}.$$

Or, $\frac{\varphi(\lambda}{\varphi(\gamma)}$ est le rapport anharmonique des quatre points M, O, A, B sur la conique (C), $\frac{\varphi(\mu)}{\varphi(\gamma)}$ est celui des quatre points $n$, $\omega$, A, B sur la droite (D). D'une manière générale, désignons par R le rapport anharmonique (M, O, A, B) et par $r$ le rapport anharmonique ($n$, $\omega$, A, B). La relation précédente prend une forme indépendante des représentations paramétriques choisies sur la conique et sur la droite,

$$RR' = r.$$

*C'est la condition nécessaire et suffisante pour que deux points donnés* M *et* M′ *de la conique* (C) *et un point donné n de la droite* (D) *soient en ligne droite.*

**4.** Soient quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ de la conique (C), de paramètres $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$, et désignons par $\mu_{12}$ le paramètre du point $n_{12}$ de rencontre avec la droite (D) de la droite $M_1M_2$, . . . On a, d'après ce qui précède, $k$ étant une quantité indépendante de la sécante,

$$\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2) = k\varphi(\mu_{12}), \qquad \varphi(\lambda_3)\varphi(\lambda_4) = k\varphi(\mu_{34}),$$

d'où, par multiplication membre à membre,

$$\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)\varphi(\lambda_3)\varphi(\lambda_4) = k^2\varphi(\mu_{12})\varphi(\mu_{34}).$$

On a, par suite, par symétrie,

$$\varphi(\mu_{12})\varphi(\mu_{34}) = \varphi(\mu_{13})\varphi(\mu_{42}) = \varphi(\mu_{14})\varphi(\mu_{23}).$$

Ces relations expriment (Voir *Une leçon sur l'involution*) que les trois couples de points $n_{12}$ et $n_{34}$, $n_{13}$ et $n_{42}$, $n_{14}$ et $n_{23}$ appartiennent à une même involution qui contient le couple (A,B). Or, si la conique (C) varie en passant par les quatre points fixes $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$, cette involution qui contient trois couples fixes est fixe, et, par suite, le couple (A,B) varie en involution. *C'est le théorème de Desargues.*

Cela posé, considérons une conique quelconque rencontrant la conique (C) aux quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ et la droite (D) aux deux points $n$ et $n'$. On a

$$r_{12} = R_1R_2, \qquad r_{34} = R_3R_4,$$

d'où, par multiplication,

$$r_{12}.r_{34} = R_1R_2R_3R_4.$$

Or, le couple $(n, n')$ appartenant à l'involution qui contient le couple (A, B) et le couple $(n_{12}, n_{34})$, on a

$$rr' = r_{12}r_{34},$$

et, par suite,

$$rr' = R_1R_2R_3R_4.$$

*C'est la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de la conique* (C) *et deux points de la droite* (D) *soient sur une même conique.*

**5.** Je n'insisterai pas longuement sur les applications de la relation qui existe entre les points de rencontre de la conique (C) et de la droite (D) avec une droite variable.

1° Soit $\rho$ le rapport anharmonique (P, O, A, B) du point de contact P d'une tangente à la conique menée par le point $n$ de la droite (D); si $r$ est le rapport anharmonique $(r, \omega, A, B)$, on a l'égalité

$$\rho^2 = r,$$

qui est du second degré en $\rho$ et admet deux racines $\rho$ et $\rho'$, égales et de signes contraires. Ce sont les rapports anharmoniques qui correspondent aux points de contact P et P′ des deux tangentes menées du point $n$ à la conique. On a la relation

$$\rho\rho' = -r,$$

ce qui montre que la droite PP′ rencontre (D) en un point $n'$, tel que le rapport anharmonique $(n', \omega, A, B)$ soit égal à $-r$, qui, par suite, est conjugué harmonique du point $n$ par rapport aux deux points A et B. C'est la propriété de la polaire d'un point par rapport à une conique.

2° Soit une sécante variable passant par le point fixe $n$ de la droite (D) et rencontrant la conique aux deux points variables M et M′. Le produit RR′ des rapports anharmoniques (M, O, A, B) et (M′, O, A, B) conserve une valeur constante, et, par suite, le couple des points M et M′ varie en involution, et aussi, le couple des droites qui joignent les points M et M′ à un point fixe de (C). C'est la réciproque du théorème de Frégier, d'où l'on déduit le théorème de Frégier lui-même.

**6.** Passons aux applications de la relation qui existe entre les points de rencontre de la conique (C) et de la droite (D) avec une conique variable.

1° Les points $n$ et $n'$ de rencontre avec (D) étant donnés, cherchons s'il existe des coniques passant par ces deux points et rencontrant la conique (C) en quatre points confondus en un seul. On a, pour déterminer le rapport anharmonique $\rho$ relatif à ce point, l'équation

$$\rho^4 = rr',$$

qui est du quatrième degré. Par suite, *il existe quatre coniques passant par deux points donnés et ayant avec une conique donnée un contact du troisième ordre.* Il reste entendu que la droite qui joint les points donnés rencontre la conique donnée en deux points distincts.

L'équation du quatrième degré précédente se décompose en deux équations du second degré

$$\rho^2 = +\sqrt{rr'}, \qquad \rho^2 = -\sqrt{rr'}.$$

Les deux points $P_1$ et $P_2$, dont les $\rho$ sont racines de la première sont sur la polaire du point $h$ de la droite (D), tel que $(h, \omega, A, B)$ soit égal à $+\sqrt{rr'}$; les deux points $P_3$ et $P_4$, dont les $\rho$ sont racines de la seconde sont sur la polaire du point $h'$ de la droite (D), tel que $(h', \omega, A, B)$ soit égal à $-\sqrt{rr'}$. Les points $h$ et $h'$ sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B; il sont aussi conjugués harmoniques par rapport aux points $n$ et $n'$.

Si l'on suppose que les points donnés $n$ et $n'$ soient les points cycliques, on voit qu'il existe quatre circonférences ayant avec une ellipse ou une hyperbole un contact du troisième ordre, et que les quatre points de contact sont les sommets de la conique.

2° Les points $n$ et $n'$ étant encore donnés, ainsi qu'un point M sur la conique (C), cherchons s'il existe des coniques passant par ces trois points et rencontrant la conique (C) en trois autres points confondus en un seul. On a, pour déterminer le rapport anharmonique $\rho$ relatif à ce point, l'équation

$$\rho^3 = \frac{rr'}{R},$$

qui est du troisième degré. Il existe ainsi trois coniques satisfaisant aux conditions. Si $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ sont les racines de l'équation précédente, on a l'égalité

$$\rho_1\rho_2\rho_3 R = rr',$$

qui exprime que les trois points de contact $P_1, P_2, P_3$ sont sur une même conique avec le point M et les points $n$ et $n'$.

Si l'on suppose que les points $n$ et $n'$ soient les points cycliques, on voit qu'*il existe trois cercles osculateurs à une ellipse ou à une hyperbole passant par un point de cette conique, et que les trois points de contact sont sur un cercle qui passe aussi par ce point.*

(*A suivre.*)

## ALGÈBRE

**1203.** — *L'équation*

$$x^n + \frac{n^2}{1!\,n}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!\,n^2}x^{n-2} + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!\,n^3}x^{n-3} + \cdots = 0$$

*a toutes ses racines réelles.*

*Montrer que si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation*

$$[f(x)]^n + \frac{n^2}{1!\,n}f(x)^{n-1}f'(x) + \frac{n^2(n-1)^2}{2!\,n^2}f(x)^{n-2}[f'(x)]^2 + \cdots = 0.$$

Avant de vérifier la propriété énoncée, proposons-nous de démontrer le théorème suivant :

Si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de celle-ci :

(1) $$[f(x)]^n + A_1[f(x)]^{n-1}f'(x) + A_2[f(x)]^{n-2}f'^2(x) + \cdots = 0;$$

les constantes $A_1, A_2, \ldots$ étant telles que l'équation

(2) $$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdots = 0$$

n'ait que des racines réelles.

Supposons que l'équation (2) ait toutes ses racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ réelles.

Si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, l'équation $f(x) - a_1f'(x) = 0$ a ses racines réelles. En effet l'équation $e^{-\frac{x}{a_1}}f(x) = 0$ n'ayant que des racines réelles, il en est de même de sa dérivée :

$$-\frac{e^{-\frac{x}{a_1}}}{a_1}[f(x) - a_1f'(x)] = 0;$$

donc l'équation $f(x) - a_1f'(x) = 0$ a ses racines réelles ; de même les équations :

$$f(x) - a_2f'(x) = 0,$$
$$f(x) - a_3f'(x) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x) - a_nf'(x) = 0,$$

ont leurs racines réelles, donc le produit

$$[f(x) - a_1f'(x)][f(x) - a_2f'(x)]\ldots[f(x) - a_nf'(x)] \equiv f(x)^n - \Sigma a_1[f(x)]^{n-1}f'(x) + \Sigma a_1a_2[f(x)]^{n-2}f'(x)]^2 - \cdots = 0$$

a ses racines réelles. Mais l'équation (2) donne :

$$-\Sigma a_1 = A_1, \qquad \Sigma a_1a_2 = A_2, \ldots$$

donc l'équation

$$[f(x)]^n + A_1[f(x)]^{n-1}f'(x) + A_2[f(x)]^{n-2}[f'(x)]^2 + \cdots = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Les équations (1) et la proposée étant de la même forme, il nous reste à démontrer que l'équation

$$x^n + \frac{n^2}{1!\,n} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!\,n^2} x^{n-2} + \cdots = 0$$

ou ce qui revient au même que l'équation

$$\text{(3)} \qquad P_n = n^n x^n + n^{n-1} \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + n^{n-2} \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \cdots = 0$$

a ses racines réelles.

Considérons à cet effet la fonction

$$\varphi(x) = e^{nx} x^n.$$

Nous avons

$$\varphi(x+h) = e^{nx}.e^{nh}(x+h)^n,$$

$$\begin{cases} e^{nh} = 1 + \dfrac{n}{1!} h + \dfrac{n^2}{2!} h^2 + \dfrac{n^3}{3!} h^3 + \cdots + \dfrac{n^n}{n!} h^n + \cdots, \\ (x+h)^n = x^n + \dfrac{n}{1!} x^{n-1} h + \dfrac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h^2 + \cdots + \dfrac{n!}{n!} h^n. \end{cases}$$

Faisons le produit des deux dernières égalités et observons la formule

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1!} \varphi'(x) + \frac{h^2}{2!} \varphi''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} \varphi^{(n)}(x) + \cdots$$

Cherchant le coefficient de $\dfrac{h^n}{n!}$ du deuxième membre, on trouve, après la multiplication par $e^{nx}$,

$$\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} = e^{nx}\left[n^n x^n + n^{n-1} \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + n^{n-2} \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \cdots + n!\right].$$

Ainsi les dérivées successives de $\varphi(x)$ sont :

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = e^{nx} x^{n-1}(nx+n) = e^{nx} x^{n-1} P_1,$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = e^{nx} x^{n-2}[n^2x^2 + 2n^2x + n(n-1)] = e^{nx} x^{n-2} P_2,$$

. . . . . .

$$\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} = e^{nx}\left[n^n x^n + n^{n-1} \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + n^{n-2} \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \cdots\right] = e^{nx} P_n.$$

Remarquons d'abord que $e^{nx}x^n$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ sont des fonctions continues, qui sont toutes nulles pour $x = -\infty$ et $x = 0$ ; cela posé, $x$ allant de $-\infty$ à $0$, $e^{nx}x^n$ va de $0$ à $0$ sans s'annuler pour d'autres valeurs, donc sa dérivée passe au moins une fois par zéro, pour une valeur de $x$, comprise entre $-\infty$ et $0$, racine de $P_1 = 0$.

De même la fonction $e^{nx}x^{n-1}P_1$, lorsque $x$ va de $-\infty$ à $0$, va de $0$ à $0$ en passant une fois par zéro ; on en déduit que $e^{nx}x^{n-1}P_2$ passe au moins deux fois par zéro ; ainsi $P_2 = 0$ a ses deux racines réelles.

De proche en proche, on voit que $P_n = 0$, équation de degré $n$, a ses racines réelles ; donc l'équation proposée

$$f(x)]^n + \frac{n^2}{1!\,n} [f(x)]^{n-1} f''(x) + \frac{n^2(n-1)^2}{2!\,n^2} [f(x)]^{n-2} [f'(x)]^2 + \cdots = 0$$

a ses racines réelles.

N. ABRAMESCU, étudiant à Bucarest.

Bonne solution différente de M. J. Haag.

# GÉOMÉTRIE

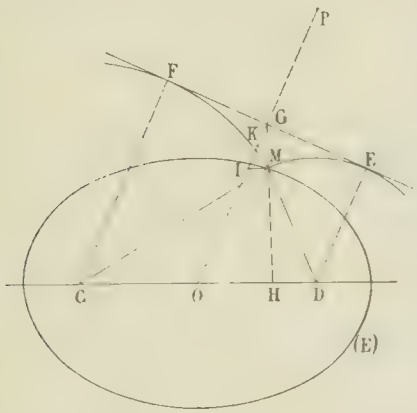
**1213.** — *On considère un quadrilatère fixe* ABCD, *dont* A, B *et* C, D *sont deux couples de sommets opposés et on envisage une conique* (E) *inscrite dans ce quadrilatère, puis la conique variable* (C) *passant par les points* C *et* D, *tangente à la diagonale* AB *et aux deux droites* MA *et* MB, *qui joignent un point* M *variable sur la conique* (E) *aux points* A *et* B.

1° *Montrer que la polaire de* M *par rapport à la conique* (C) *enveloppe une conique* (Γ) *qui passe aux points* A *et* B, *qui est tangente en ces points aux droites* KA, KB, K *étant le pôle de* AB *par rapport à la conique* (E), *et qui est bitangente à cette conique aux deux points où elle rencontre* CD.

2° *Le lieu du pôle de* CD *par rapport à la conique* (C) *est une conique* (Γ') *qui touche aussi les droites* KA, KB *aux points* A *et* B.

3° *Quand* (E) *varie, toutes les coniques* (Γ) *et* (Γ') *sont homologiques entre elles, l'axe d'homologie étant* AB *et le centre d'homologie étant* K.

Transformons homographiquement la figure de façon que les deux points A et B soient rejetés aux points cycliques. La conique (E) devient une conique ayant pour foyers les points C et D; la conique variable (C) devient une parabole passant aux foyers de celle-ci et ayant pour foyer un point M de cette conique; la polaire du point M par rapport à la conique (C) est la directrice de cette parabole, elle est tangente aux deux cercles ayant pour centres respectifs C et D et pour rayons CM et DM. Soient EF cette directrice, CF et DE les perpendiculaires abaissées de C et D sur cette droite. La droite OG menée par le centre parallèlement à CF et DE est parallèle à l'axe et passe au milieu de la corde CD, c'est donc le diamètre de CD; d'autre part




$$OG = \frac{CF + DE}{2} = \frac{CM + DM}{2} = a.$$

La droite EF enveloppe donc le cercle principal de l'ellipse.

Par suite, dans la première figure, l'enveloppe de la polaire de M par rapport à (C) est une conique qui passe aux points A et B et qui y touche les droites KA et KB qui joignent ces points au pôle de AB par rapport à (E); cette conique est de plus bitangente à (E) aux deux points où CD la rencontre.

La droite OG étant le diamètre conjugué de CD dans la parabole, le pôle P de CD est sur cette droite. Menons MH perpendiculaire à CD; c'est l'axe radical des deux cercles que touche la directrice, il passe donc au milieu G de EF. La polaire de G passe au foyer et est perpendiculaire sur GM, c'est la parallèle à CD menée par le point M; elle coupe OG en I, et, comme la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact, le point K, milieu de IG, est le point de rencontre de OG avec la parabole.

Par conséquent, $OP = 2OK,$

or $$OK = \frac{OI + OG}{2};$$

d'autre part, $$\frac{OI}{OG} = \frac{HM}{HG} = \frac{b}{a};$$

par suite $$OI = b.$$

On a donc $OK = \dfrac{a+b}{2}$; par conséquent le lieu du point P, pôle de CD, est un cercle

concentrique à l'ellipse et de rayon $a+b$. Dans la première figure, le lieu du pôle de CD est donc une conique qui passe aux points A et B et qui y touche les droites KA et KB.

La troisième partie est évidente d'après les propriétés les plus élémentaires de l'homologie.

J. HAAG et G. GOURDEL.

Solution semblable : P. M., lycée Janson-de-Sailly.
Autre solution : M. R. Bouvaist.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1202.** — *Étant données deux droites rectangulaires* $Ox$ *et* $Oy$ *et une circonférence touchant ces deux droites, démontrer que le foyer d'une parabole touchant* $Ox$, $Oy$ *et la circonférence donnée décrit une circonférence tangente à* $Ox$ *et* $Oy$.

*Démontrer que la corde de contact de la parabole avec l'angle* $xOy$ *enveloppe une hyperbole équilatère ayant pour foyer le point* O.

Nous pouvons toujours représenter par $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$ l'équation du cercle tangent aux deux axes. L'équation de la parabole sera

$$(ux+vy+w)^2-4uvxy=0,$$

et, si nous écrivons celle du cercle sous la forme

$$(x+y-a)^2-2xy=0,$$

les deux sécantes communes associées à l'ombilic O auront pour équation quadratique

$$(ux+vy+w)^2-2uv(x+y-a)^2=0,$$

et l'une d'elles sera représentée par

$$(u-\sqrt{2uv})x+(v-\sqrt{2uv})y+w+a\sqrt{2uv}=0.$$

En exprimant qu'elle vérifie l'équation tangentielle du cercle,

$$a^2(u^2+v^2)-(au+av+w)^2=0,$$

nous aurons la condition pour que la parabole et le cercle se touchent; cette condition est

$$a^2[(u-\sqrt{2uv})^2+(v-\sqrt{2uv})^2]-[a(u-\sqrt{2uv})+a(v-\sqrt{2uv})+w+a\sqrt{2uv}]^2=0,$$

ou

$$2w(u+v-\sqrt{2uv})a+w^2=0.$$

Supprimons la solution $w=0$ qui correspond à une parabole impropre, il reste

$$2a(u+v)+w=2a\sqrt{2uv},$$

ou enfin

$$(1)\qquad [2a(u+v)+w]^2-8a^2uv=0.$$

Cette équation est l'équation tangentielle de l'enveloppe de la corde des contacts de la parabole avec les axes. Cette enveloppe est une conique qui a pour centre le point

$$2a(u+v)+w=0,$$

c'est-à-dire le point dont les coordonnées sont $2a$ et $2a$; les tangentes issues de ce point sont parallèles aux axes, la conique est donc une hyperbole équilatère; d'autre part, l'équation simplifiée s'écrit

$$4a^2(u^2+v^2)+4aw(u+v)+w^2=0,$$

les deux foyers sont donc l'origine, $w=0$, et le point $4a(u+v)+w=0$, c'est-à-dire le point $(4a, 4a)$; il résulte en outre de là que la première bissectrice est l'axe transverse de cette hyperbole. Rien n'est donc plus aisé maintenant que de placer cette hyperbole.

Quant au lieu du foyer, il s'obtiendra sans peine, en remarquant que le point O étant un point de la directrice, sa polaire passe par le foyer; nous aurons celui-ci en abaissant du point O une perpendi-

culaire sur la droite $ux + vy + w = 0$, et éliminant $u, v, w$ entre les équations des deux droites et la relation trouvée antérieurement. Nous avons d'abord

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v},$$

$$ux + vy + w = 0,$$

puis,

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{-(x^2 + y^2)};$$

portons dans

$$4a^2(u^2 + v^2) - 4aw(u + v) - w^2 = 0,$$

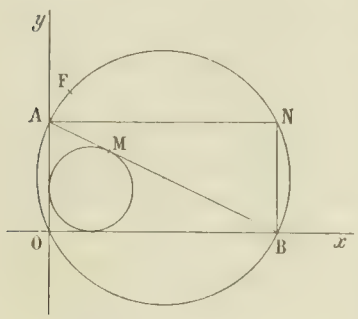
il viendra

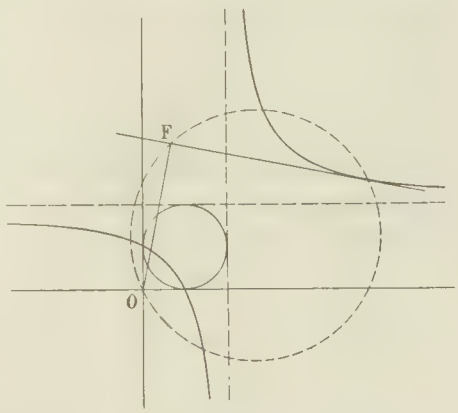
$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 4a(x + y) + 4a^2 = 0.$$

Cette équation représente un cercle tangent à $Ox$ et à $Oy$ aux points d'abscisse et d'ordonnée égales à $2a$ et du même système que le cercle proposé. Ce cercle est le cercle principal de l'hyperbole. La relation qui existe entre le cercle et l'hyperbole est manifeste, évidente d'après les propriétés des coniques les plus élémentaires, et il suffit de résoudre une des questions demandées pour apercevoir immédiatement la solution de l'autre.

Bonnes solutions : MM. A. Sainte-Laguë, élève de l'École normale supérieure ; J. Haag, à Nancy ; J. Roda, à Toulouse ; Parrod, à Vesoul ; G. Dulimbert, à Grenoble ; R. Bouvaist ; J.-G. Nicolescu, à Bucarest ; Blanchot, à Aurillac ; Mlle Eugénie Grecescu, à Bucarest ; A. Dupont, à Saumur.

**Solution géométrique.** — Cherchons le foyer F de la parabole tangente au cercle donné en M ; en considérant la tangente AB à la parabole en M, droite qui est également tangente au cercle, on a un premier lieu de F en traçant le cercle circonscrit au triangle AOB. En considérant la tangente au cercle donné infiniment voisine de AB, on voit que le lieu de F est l'enveloppe du cercle OAB. Or l'enveloppe d'un cercle passant par un point fixe est la podaire du point fixe par rapport à la courbe lieu du point diamétralement opposé au point fixe dans ce cercle. On est donc ramené ici à chercher la podaire du lieu du point N, quatrième sommet du rectangle OANB. La correspondance homographique qui existe entre les points A et B montre que ce lieu est une hyperbole équilatère H. En remarquant que ses asymptotes sont les tangentes au cercle donné parallèles à $Ox$ et $Oy$ et qu'elle coupe $Ox$ et $Oy$ aux points de contact des axes avec le cercle donné, on voit qu'elle admet l'origine pour foyer. La podaire de l'origine est donc le cercle principal de H, et le lieu cherché est un cercle homothétique du cercle donné dans le rapport 2.




Étant donné un foyer F de parabole, cherchons la corde de contact de cette parabole avec les tangentes rectangulaires $Ox$, $Oy$. C'est la perpendiculaire à OF en F, et d'après ce qui précède, c'est une tangente à l'hyperbole équilatère définie antérieurement.

A. SAINTE-LAGÜE, élève de l'École Normale Supérieure.

Autre solution : M. J. Haag, à Nancy.

---

**1212.** — *On considère une parabole et un point* A ; *par le point* A *on mène les tangentes à la parabole qui touchent cette courbe en* B *et* C.

1° *Trouver le lieu du sommet du trièdre trirectangle ayant pour trace sur le plan de la parabole le tri-*

*angle* ABC. *On trouve une surface cubique dont on demande la trace sur le plan de la parabole. Montrer que cette surface cubique a quatre points doubles ; étudier les droites de cette surface.*

2° *Trouver le lieu des points* A *qui correspondent aux points de la surface situés dans un plan parallèle au plan de la parabole. Voir en particulier ce qui se passe quand le plan coïncide avec celui de la parabole.*

Prenons pour axe des $x$ l'axe de la parabole, pour axe des $y$, la tangente au sommet et pour axe des $z$ une perpendiculaire au plan de la parabole et désignons par $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole dans le plan des $xy$, par $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point A.

1. La polaire du point A par rapport à la parabole a pour équation

$$px - \beta y + p\alpha = 0,$$

et en ajoutant cette équation à celle de la parabole, on obtient une conique

$$y^2 - px - \beta y + p\alpha = 0,$$

qui passe par les trois sommets du triangle ABC.

Soient alors $x, y, z$ les coordonnées du sommet du trièdre trirectangle ayant pour trace le triangle ABC sur le plan des $xy$ ; nous aurons à écrire que le cône ayant ce point pour sommet et ayant pour base la conique précédente est capable d'un trièdre trirectangle inscrit, et de plus, que la droite joignant le point $(x, y, z)$ au point A est perpendiculaire au plan qui joint ce même point à la polaire du point A. Or une génératrice du cône est

$$\frac{X - x}{u} = \frac{Y - y}{v} = \frac{Z - z}{w},$$

elle perce le plan des $xy$ au point

$$x - \frac{uz}{w}, \qquad y - \frac{vz}{w}, \qquad 0;$$

en exprimant que ce point est sur la conique

$$y^2 - px - \beta y + p\alpha = 0,$$

on trouve

$$(wy - vz)^2 - pw(wx - uz) - \beta w(wy - vz) + p\alpha w^2 = 0.$$

Telle est l'équation du cône parallèle au cône donné et ayant son sommet à l'origine, quand on y regarde $u, v, w$ comme coordonnées courantes; en écrivant qu'il est équilatère, nous avons la relation

$$(1) \qquad y^2 + z^2 - px - \beta y + p\alpha = 0.$$

D'autre part, le plan qui joint le point $(x, y, z)$ à la polaire du point A a pour équation

$$pX - \beta Y + p\alpha + \lambda Z = 0,$$

$\lambda$ étant donné par la relation

$$px - \beta y + p\alpha + \lambda z = 0.$$

La droite dont les paramètres directeurs sont $x - \alpha$, $y - \beta$, $z$, doit être perpendiculaire à ce plan ; nous avons donc aussi

$$\frac{x - \alpha}{p} = \frac{y - \beta}{-\beta} = \frac{z}{\lambda},$$

ou

$$(2) \qquad \frac{x - \alpha}{p} = \frac{y - \beta}{-\beta} = \frac{z^2}{\beta y - px - p\alpha}.$$

Telles sont les relations qui, à l'aide de (1), donnent les coordonnées du point $(x, y, z)$ en fonction de celles du point $(\alpha, \beta, 0)$ et inversement.

Multiplions le second rapport, haut et bas, par $y$ et ajoutons-le terme à terme au troisième ; nous aurons

$$\frac{x - \alpha}{p} = \frac{y - \beta}{-\beta} = \frac{y^2 + z^2 - \beta y}{-p(x + \alpha)};$$

or $y^2 + z^2 - \beta y = p(x - \alpha)$, d'après l'équation (1) ; donc le dernier rapport devient $\frac{\alpha - x}{\alpha + x}$, et, en

l'égalant au premier, nous avons

$$x + \alpha + p = 0,$$

qui donne $x$ en fonction de $\alpha$, ou $\alpha$ en fonction de $x$.

En égalant le premier rapport au dernier, nous avons $y = \frac{\beta(\alpha + p - x)}{p}$ ou $y = \frac{2\beta(\alpha + p)}{p}$, qui donne $y$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$ ; nous avons aussi $\beta = -\frac{py}{2x}$, qui donne $\beta$ en fonction de $x$ et $y$.

Pour avoir le lieu du point $(x, y, z)$, nous remplacerons $\alpha$ et $\beta$ par leurs valeurs en fonction de $x, y, z$ dans l'équation (1) et nous aurons

$$y^2 + z^2 - px - \frac{py^2}{2x} - p(x + p) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad 2xy^2 + z^2 - 2px - p^2x + py^2 = 0.$$

C'est bien l'équation d'une surface du troisième degré, ayant pour plans de symétrie le plan des $zx$ et le plan des $xy$. La section de cette surface par le plan des $xy$, $z = 0$, se compose de la parabole, $y^2 - 2px = 0$, et de sa directrice, $2x + p = 0$. Ce résultat était évident *a priori*, car le point $(x, y, z)$ ne peut être dans le plan des $xy$ que lorsque le triangle ABC est rectangle et cela arrive ou bien quand le point A est sur la directrice ou bien quand la droite BC est normale à la parabole en B ou C.

Les dérivées partielles de l'équation (3), égalées à 0, donnent les équations

$$y^2 + z^2 - 4px - p^2 = 0, \qquad y(2x + p) = 0, \qquad xz = 0, \qquad y^2 - 4px - 4x^2 = 0,$$

et nous voyons qu'elles sont vérifiées pour $z = 0$, $2x + p = 0$, $y^2 - 2px = 0$ ; donc les deux points de rencontre de la parabole avec sa directrice sont des points doubles imaginaires conjugués de la surface. Ces équations admettent encore les solutions $x = 0$, $y = 0$ et $z = \pm p$ ; il y a donc deux autres points doubles situés sur $Oz$.

Parmi les droites de la surface il y a déjà l'axe des $z$ et la directrice de la parabole. Voyons s'il y en a d'autres ; pour cela, considérons les directions asymptotiques de la surface $x = 0$ et $y^2 + z^2 = 0$ ; celles qui sont réelles sont parallèles au plan des $yz$ ou à l'axe des $z$. Or parallèlement à $Oz$ il n'y a que l'axe des $z$ qui appartienne à la surface. Il nous reste à étudier les droites qui sont parallèles au plan des $yz$. Coupons la surface par des plans $x = \lambda$ parallèles au plan $x = 0$ et exprimons que les coniques d'intersection

$$2\lambda(y^2 + z^2 - 2p\lambda) + py^2 - 2p^2\lambda = 0$$

se décomposent ; nous aurons

$$4p\lambda^2 + 2p^2\lambda = 0, \qquad \text{ou} \qquad \lambda = 0, \qquad \lambda = -\frac{p}{2}.$$

Pour $\lambda = 0$, la conique se réduit à deux droites confondues avec $y = 0$, c'est-à-dire avec $Oz$ ; le plan $x = 0$ est donc tangent à la surface tout le long de $Oz$. Pour $\lambda = -\frac{p}{2}$, la conique se réduit à $z^2 = 0$, c'est-à-dire à deux droites confondues avec la directrice de la parabole ; le plan $x = -\frac{p}{2}$ est donc tangent à la surface tout le long de cette droite. Il n'y a pas d'autre droite sur la surface que les deux que nous venons de signaler.

Si l'on fait $x = -\frac{p}{2}$ dans les expressions des coordonnées $\alpha$ et $\beta$ du point A, on a $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = y$, le point A coïncide avec le point $(x, y, z)$ et décrit la directrice de la parabole ; nous retombons sur un résultat déjà prévu et évident géométriquement.

Si l'on fait $x = 0$, $y = 0$ dans les mêmes expressions, on obtient $\alpha = -p$, et $\beta = \frac{0}{0}$ ; le lieu du point A est donc la droite $x = -p$, et l'on arrive à ce curieux théorème qu'il est d'ailleurs facile d'établir directement : *quand un point se meut sur la parallèle à la directrice d'une parabole menée*

*au delà de cette droite à une distance égale à la moitié du paramètre, le point de concours des hauteurs du triangle formé par ce point et par les tangentes issues de ce point est toujours au sommet de la parabole.*

**2.** Si nous coupons la surface par le plan $z = h$, nous obtenons la courbe

$$y^2(2x+p) - 4px^2 + 2h^2x - 2p^2x = 0.$$

Il nous suffit de remplacer $x$ par $-\alpha - p$, $y$ par $\frac{\beta(2\alpha+p)}{p}$ pour avoir le lieu du point A qui correspond à cette section ; nous trouvons ainsi

$$2\beta^2(\alpha+p)(2\alpha+p) + 2p^3(\alpha+p) - p^2(p^2-h^2) = 0,$$

avec

$$\alpha + p = 0.$$

La droite $\alpha + p = 0$ correspond au point $x = 0$, $y = 0$ de la section.

Pour $h = 0$, la courbe se décompose en $2\alpha + p = 0$, qui représente la directrice de la parabole et

$$2\beta^2(\alpha+p) + p^3 = 0,$$

qui est le lieu des pôles des normales à la parabole. Ces résultats étaient déjà prévus.

Très bonnes solutions : MM. G. Dulimbert, à Grenoble ; R. Bouvaist ; A. Sainte Laguë ; C. Pellion, à Rennes ; A. Dupont, à Saumur ; J. Haag, à Nancy.

---

**1214.** — *Démontrer que :*

1° *Les perpendiculaires abaissées de l'extrémité* A *du grand axe d'une ellipse sur les quatre normales issues d'un point* M *rencontrent la courbe en quatre points qui sont sur un même cercle.*

2° *Si du sommet* A *on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre* OM, *la tangente à l'ellipse au point* N *où cette droite la rencontre est l'axe radical du cercle précédent et du cercle principal.*

**1.** Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation habituelle de l'ellipse. Portons les axes au sommet de droite, c'est-à-dire changeons $x$ en $x + a$, cette équation deviendra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2x}{a} = 0.$$

La méthode consiste alors à prendre un cercle quelconque,

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

à former l'équation aux coefficients angulaires des rayons qui joignent l'origine aux points de rencontre, à chercher la relation qui existe entre eux et à vérifier que cette relation existe aussi entre les coefficients angulaires des directions perpendiculaires aux quatre normales issues d'un point.

Or, si l'on élimine la variable d'homogénéité entre les deux équations, on obtient l'équation nouvelle

$$\frac{4x^2}{a^2}(x^2+y^2) + \frac{4x}{a}(\alpha x + \beta y)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \gamma\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = 0,$$

qui donne les coefficients angulaires des rayons qui joignent le point A aux points de rencontre de l'ellipse et du cercle ; en posant $m = \frac{y}{x}$, cette équation s'écrit

$$(1) \qquad \frac{\gamma m^4}{b^4} + \frac{4\beta}{ab^2}m^3 + 2\left(\frac{\gamma}{a^2b^2} + \frac{2\alpha}{ab^2} + \frac{2}{a^2}\right)m^2 + \frac{4\beta}{a^3}m + \frac{\gamma}{a^4} + \frac{4\alpha}{a^3} + \frac{4}{a^2} = 0,$$

et l'on aperçoit immédiatement la relation

$$(2) \qquad \frac{\Sigma mm'm''}{\Sigma m} = \frac{b^2}{a^2},$$

qui existe entre les racines de cette équation, quel que soit le cercle envisagé.

Cela posé, remarquons que pour avoir l'équation aux coefficients angulaires des normales issues

d'un point, on peut se servir des anciens axes, puisque l'idée de direction intervient seule. Or, dans le système formé par les axes de l'ellipse, l'équation de la normale en fonction du coefficient angulaire est

$$y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}};$$

l'équation aux coefficients angulaires des normales issues du point $(x, y)$ est donc

$$(y - mx)^2(a^2 + b^2m^2) - c^4m^2 = 0,$$

ou

$$b^2x^2m^4 - 2b^2xym^3 + (a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)m^2 - 2a^2xym + a^2y^2 = 0;$$

changeons-y $m$ en $-\frac{1}{m}$, nous aurons alors la nouvelle équation

$$(3) \qquad a^2y^2m^4 + 2a^2xym^3 + (a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)m^2 + 2b^2xym + b^2x^2 = 0,$$

entre les racines de laquelle existe aussi la relation

$$\frac{\Sigma mm'm''}{\Sigma m} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Cela prouve la première partie.

**2.** Pour établir la seconde, identifions les équations (1) et (3), nous aurons

$$\frac{\gamma}{b^4} = \lambda a^2y^2, \qquad \frac{2\beta}{ab^2} = \lambda a^2xy, \qquad \frac{2\gamma}{a^2b^2} - \frac{4\alpha}{ab^2} + \frac{4}{a^2} = \lambda(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4),$$

$$\frac{2\beta}{a^3} = \lambda b^2xy, \qquad \frac{\gamma}{a^4} + \frac{4\alpha}{a^3} + \frac{4}{a^2} = \lambda b^2x^2.$$

La première donne $\gamma$, $\gamma = \lambda a^2b^4y^2$, la seconde ou la quatrième donne $\beta$, $2\beta = \lambda a^3b^2xy$, la dernière donne $\alpha$,

$$4\alpha = -4a + \lambda a^3b^2x^2 - \lambda ab^4y^2;$$

portons $\gamma$ et $\alpha$ dans la troisième, nous aurons $\lambda$, $\lambda = \frac{4}{a^2b^2c^4}$; donc, définitivement

$$\alpha = -a + \frac{a^2x^2 - b^2y^2}{ac^2},$$

$$\beta = \frac{2axy}{c^2},$$

$$\gamma = \frac{4b^2y^2}{c^2}.$$

Par conséquent, le cercle indiqué a pour équation

$$(4) \qquad X^2 + Y^2 - \frac{2X}{ac^2}(a^2x^2 - b^2y^2 - a^2c^2) - \frac{4axyY}{c^2} - \frac{4b^2y^2}{c^2} = 0;$$

l'axe radical de ce cercle et du cercle principal de l'ellipse,

$$X^2 + Y^2 + 2aX = 0,$$

s'obtient immédiatement ; c'est la droite

$$(a^2x^2 - b^2y^2)X + 2a^2xyY - 2ab^2y^2 = 0.$$

Si nous revenons maintenant aux axes de l'ellipse, système dans lequel ont été évaluées les coordonnées $x$, $y$, du point par lequel on a mené des normales à l'ellipse, nous aurons à changer X en $X - a$ et l'équation de la droite deviendra

$$(a^2x^2 - b^2y^2)X + 2a^2xyY - a(a^2x^2 + b^2y^2) = 0.$$

Rien n'est plus facile dès lors que de vérifier que cette droite est tangente à l'ellipse, c'est-à-dire satisfait à la relation $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$. En outre les coordonnées du point de contact sont

$$-\frac{a^2u}{w}, \qquad -\frac{b^2v}{w},$$

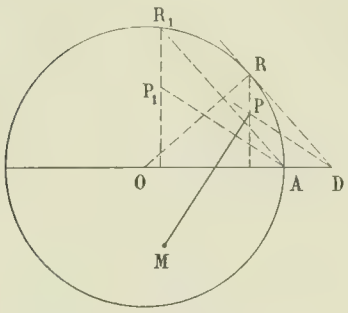
ou ici,

$$X = a\,\frac{a^2x^2 - b^2y^2}{a^2x^2 + b^2y^2},$$

$$Y = \frac{2ab^2xy}{a^2x^2 + b^2y^2};$$

par conséquent le coefficient angulaire de la droite qui joint ce point au point A, $\frac{Y}{X - a}$, a pour valeur $-\frac{x}{y}$, ce qui démontre définitivement la deuxième partie.

**Solution géométrique**. — La solution géométrique repose sur ce théorème que *la somme des quatre angles excentriques relatifs aux points de rencontre d'une ellipse et d'un cercle est un multiple de* $2\pi$. Pour se convaincre de ce fait il suffit de remarquer cet autre fait évident que la somme des angles excentriques relatifs aux extrémités d'une corde est la même pour deux cordes parallèles ; ceci résulte de ce que deux cordes parallèles dans l'ellipse ont pour correspondantes deux cordes parallèles dans le cercle homographique ; les deux sommes des arguments relatifs aux extrémités sont donc égales ou ne diffèrent entre elles que par le nombre $2\pi$, ce qui revient au même.




Cela posé, appuyons-nous sur ce fait que les quatre points de rencontre d'un cercle et d'une ellipse sont sur deux cordes également inclinées sur les axes ; nous voyons de suite que les quatre arguments dans le cercle homographique ont même somme que ceux relatifs aux extrémités de deux diamètres également inclinés sur les axes ; leur somme est donc égale à $2\pi$ ou à $4\pi$, et, si l'on ne précise pas la valeur exacte de chaque angle excentrique, à un multiple de $2\pi$.

La réciproque est évidente, c'est-à-dire que si la somme des angles excentriques de quatre points d'une ellipse est un multiple de $2\pi$, ces quatre points sont sur un cercle; il suffit en effet de faire passer un cercle par trois d'entre eux et d'appliquer la proposition directe pour voir que ce cercle doit passer au quatrième.

Cela posé, considérons les pieds des quatre normales issues d'un point et appliquons le théorème de Joachimstal ; nous verrons de suite que la somme des quatre angles excentriques est un multiple impair de $\pi$. Soient alors MP une normale abaissée de M sur l'ellipse et P son pied, R le point correspondant du cercle homographique ; la perpendiculaire abaissée de A sur la normale MP est parallèle à la tangente DP à l'ellipse en P, elle est donc la projection d'une parallèle à la tangente au cercle en R ; soit $AR_1$ cette parallèle ; l'angle excentrique du point $R_1$ est le double de celui du point R ; par conséquent la somme des angles excentriques des quatre points tels que $P_1$ est un multiple de $2\pi$, donc ces quatre points sont sur un même cercle, ce qui démontre la première partie.

T. LEMOYNE, à Troyes.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1282**. — On considère un système de forces dont les six nombres fondamentaux sont $p$, $q$, $r$, 0, 0, $h$, et une droite D menée par le point O dans le plan des $xy$. La réduction en un point quelconque, M, de cette droite donne un couple ayant un certain axe MG et une force équipollente à la force $(p, q, r)$.

1° Trouver le lieu de la droite MG, quand le point M décrit la droite D et le lieu du point G.

2° Le premier lieu est un paraboloïde droit. On demande les enveloppes des plans directeurs menés par l'origine et le lieu de la parallèle à l'axe quand la droite D décrit le plan des $xy$.

3° Le paraboloïde est tangent au plan des $xy$ ; on demande le lieu du point de contact et l'enveloppe de la seconde génératrice autre que D et située dans le plan des $xy$.

4° Trouver les génératrices qui passent au sommet de ce paraboloïde et le lieu de ce point dans les mêmes conditions.

**1283**. — Un voyageur pesant $70^{kg}$ et de chaleur spécifique égale à 1 gravit une montagne en s'élevant de $600^m$ en une heure dans un air sec à 0° et à la pression moyenne de $700^{mm}$. Il fait 18 inspirations par minute et rejette à chaque expiration 1 litre d'air. Cet air expiré est à la température du corps (38° en moyenne), et à moitié saturé de vapeur d'eau ($d = \frac{5}{8}$; $F_{38} = 50^{mm}$) et renferme 4°/₀, en volume, de gaz carbonique ($d' = 1,53$). On admettra que la formation de ces deux corps a produit la même chaleur que si elle avait eu lieu par combustion d'hydrogène et de carbone libres, soit 59 grandes calories par molécule de vapeur d'eau et 94 par molécule de gaz carbonique. Enfin, pour le calcul de l'échange de chaleur résultant de la différence des températures de l'air inspiré et de l'air expiré, on négligera leur différence de masse et de composition. Chaleur spécifique de l'air : 0,237.

De combien varierait en une heure la température du voyageur si ses vêtements le protégeaient contre tout échange de chaleur avec le milieu extérieur ?

On négligera toute production d'énergie étrangère aux phénomènes mentionnés.

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1206**. — *On considère une ellipse fixe et un cercle variable tangent aux deux axes de cette ellipse. Soit* A *un des sommets du grand axe de cette ellipse.*

1° *Trouver le lieu du point de contact de la tangente menée au cercle variable par le point* A.

2° *Le cercle envisagé et le point* A *assimilé à un cercle de rayon nul définissent un faisceau linéaire de cercles qui renferment un autre cercle de rayon nul. On demande le lieu du centre de ce cercle.*

3° *On associe les cercles deux à deux de façon que leur axe radical passe au point* A, *et on mène par les centres de l'un des couples deux parallèles au petit axe qui rencontrent l'ellipse en* PP′ *et* QQ′. *Trouver l'enveloppe des droites* PQ, PQ′, P′Q, P′Q′ *et le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point* A *sur ces droites.*

En prenant pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse, celle-ci a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et le cercle variable,

$$x^2 + y^2 - 2\lambda(x+y) + \lambda^2 = 0,$$

en supposant toutefois que son centre se meuve sur la première bissectrice. Il y a un autre système de cercles tangents aux deux axes : ce second système est symétrique par rapport aux axes de coordonnées. Quand nous aurons trouvé les lieux qui correspondent au premier système, il n'y aura qu'à prendre leurs symétriques par rapport à $Ox$ pour avoir ceux qui correspondent au second.

**1**. La polaire du point A par rapport au cercle variable $\lambda$ a pour équation

$$af'_x + f'_y = 0,$$

ou

$$a(x-\lambda) - \lambda(x+y) + \lambda^2 = 0;$$

nous aurons le lieu demandé, toutefois avec l'axe des $x$ en plus, en éliminant $\lambda$ entre l'équation du cercle et celle de la polaire ; or la différence entre les deux équations nous donne d'abord

$$x^2 + y^2 - \lambda(x+y) - a(x-\lambda) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \frac{x^2 + y^2 - ax}{x + y - a};$$

puis l'équation du cercle s'écrit

$$(\lambda - x - y)^2 = 2xy;$$

la substitution de $\lambda$ s'y fait immédiatement et l'on obtient

$$(ay - 2xy)^2 - 2xy(x + y - a)^2 = 0.$$

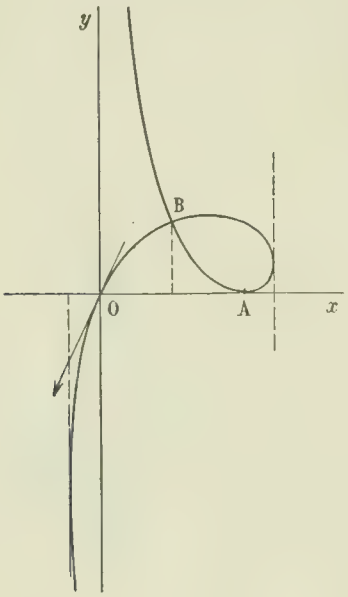
La solution $y = 0$ est en évidence ; une fois supprimée, il reste l'équation proprement dite du lieu

$$2x(x + y - a)^2 - y(2x - a)^2 = 0,$$

ou enfin

$$(1) \qquad 2x(x^2 + y^2) - 4ax^2 + a^2(2x - y) = 0.$$

Cette équation représente une cubique circulaire, ayant l'axe des $y$ pour asymptote, passant à l'origine et y admettant la droite $y = 2x$ pour tangente ; il est facile de voir qu'elle admet le point $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ pour point double : si on porte les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, l'équation devient




$$2x(x^2 + y^2) - a(x^2 - 2xy - y^2) = 0 ;$$

elle montre non seulement que la nouvelle origine est un point double, ce qui se voit très aisément en annulant les dérivées partielles de la première équation, mais encore que les tangentes en ce point double sont les deux droites rectangulaires $x^2 - 2xy - y^2 = 0$, qui sont les bissectrices de l'angle formé par $Oy$ et par la seconde bissectrice. La cubique est donc une strophoïde que toutes ces remarques suffisent à placer déjà avec beaucoup d'approximation.

Il est aisé de préciser encore la forme et la position du lieu en discutant l'équation par rapport à $y$ : cette équation ordonnée par rapport à $y$ s'écrit

$$(1) \qquad 2xy^2 - a^2y + 2x(x - a)^2 = 0 ;$$

la condition de réalité est

$$a^4 - 16x^2(x - a)^2 > 0,$$

$$(2x - a)^2(-4x^2 + 4ax + a^2) > 0 ;$$

le facteur $(2x - a)^2$ qui est positif et qui correspond au point double B, étant mis à part, nous voyons que $x$ doit être compris entre les racines du trinome $4x^2 - 4ax - a^2$, c'est-à-dire entre $-\frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$ et $\frac{a}{2}(\sqrt{2} + 1)$. Le produit des racines est $(x - a)^2$, il est toujours positif, les deux racines ont toujours le même signe.

Enfin la somme des racines a le signe de $x$ et la discussion est achevée. Une dernière remarque évidente : si on coupe par l'axe de $x$, $y = 0$, on trouve les solutions $x = 0$ et $(x - a)^2 = 0$, la courbe est tangente à $Ox$ au point A.

**2.** Un cercle quelconque du système

$$x^2 + y^2 - 2\lambda(x + y) + \lambda^2 = 0,$$

et le cercle-point

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = 0,$$

ont pour axe radical

$$2(a - \lambda)x - 2\lambda y + \lambda^2 - a^2 = 0.$$

L'autre cercle-point est le symétrique du point A par rapport à cette droite. Soient $x$ et $y$ ses coordonnées ; il faut écrire que le milieu des deux points, $\left(\frac{a + x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, est sur l'axe radical et que la droite qui les joint est perpendiculaire à cet axe radical. Cela donne successivement

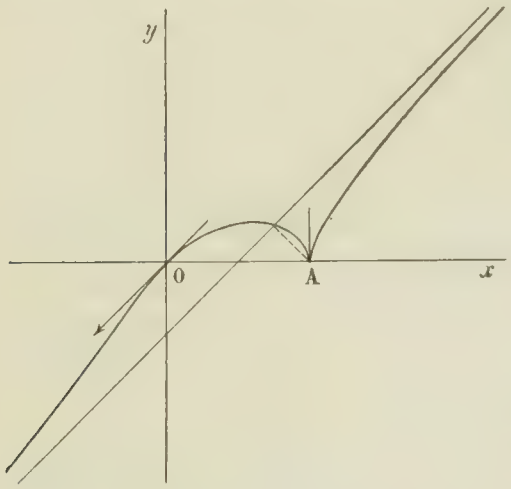
$$(a - \lambda)(a + x) - \lambda y - (a - \lambda)(a + \lambda) = 0$$

et
$$\frac{y}{x-a}\cdot\frac{a-\lambda}{\lambda}=-1,$$
ou
$$\frac{a-\lambda}{a-x}=\frac{\lambda}{y}.$$

Il faut maintenant éliminer $\lambda$ entre ces deux équations; or, en remplaçant déjà dans la première $a-\lambda$ et $\lambda$ par les quantités proportionnelles $a-x$ et $y$, on obtient
$$a^2-x^2-y^2-(a+\lambda)(a-x)=0\,;$$
cette équation est du premier degré en $\lambda$ comme la seconde des deux équations précédentes ; par conséquent l'élimination est achevée. On trouve ainsi pour équation du lieu

(2) $$(y-x)(x^2+y^2)+a(2x^2-2xy+y^2)+a^2(y-x)=0.$$

C'est encore une cubique circulaire unicursale, passant à l'origine, y admettant comme tangente la première bissectrice et ayant cette bissectrice pour direction asymptotique. Pour mettre le point double en évidence, il suffit d'ordonner l'équation par rapport à $y$ : on trouve ainsi
$$y^3-y^2(x-a)+y(x-a)^2-x(x-a)^2=0,$$
et cette équation montre que le point double est le point A $(a, 0)$. En portant les axes en ce point, l'équation devient
$$(y-x)(x^2+y^2)-ax^2=0.$$




La nouvelle origine est un point de rebroussement où la tangente est $Oy$. L'asymptote a pour équation
$$y-x=\frac{a}{2},$$
dans le nouveau système ; elle passe au milieu de OA. Elle rencontre la courbe en un point situé sur la deuxième bissectrice.

Rien n'est plus aisé maintenant que de figurer la courbe.

**3.** L'axe radical de deux cercles du système, $\lambda$ et $\lambda'$, a pour équation
$$2(\lambda'-\lambda)(x+y)+\lambda^2-\lambda'^2=0,$$
ou
$$2(x+y)-(\lambda+\lambda')=0.$$

En écrivant qu'il passe au point A, on a la relation $\lambda+\lambda'=2a$. Nous écrirons donc que la droite $ux+vy+w=0$ est l'une des droites envisagées en formant l'équation aux abscisses des points de rencontre de cette droite avec l'ellipse et en exprimant que la somme des racines de cette équation est égale à $2a$. Ce calcul nous donne d'abord
$$b^2v^2x^2+a^2(ux+w)^2-a^2b^2v^2=0,$$
puis
$$x+x'=\frac{-2a^2uw}{a^2u^2+b^2v^2},$$
et enfin
$$a^2u^2+b^2v^2+auw=0.$$

C'est l'équation tangentielle de l'enveloppe ; mais cette idée nous est inutile : bornons-nous à tirer $w$ de la relation précédente et à porter dans l'équation de la droite ; elle ne contiendra plus qu'un paramètre variable, le rapport $\frac{u}{v}$ ou $\frac{v}{u}$, et nous aurons l'enveloppe de cette droite en écrivant que cette équation a une racine double. Nous aurons d'abord
$$au(ux+vy)-a^2u^2-b^2v^2=0.$$
ou
$$u^2(ax-a^2)+uv.ay-v^2b^2=0,$$

puis, (3) $$4b^2(x-a)+ay^2=0.$$

C'est l'équation d'une parabole aisée à placer : elle passe au point A, y touche l'ellipse, tourne sa concavité vers les $x$ négatifs et coupe l'axe des $y$ aux deux points d'ordonnée $\pm 2b$. Cette parabole admet pour axe l'axe des $x$ et pour sommet le point A.

Le dernier lieu demandé est la podaire de cette parabole par rapport à son sommet, c'est une cissoïde droite, dont il est facile de trouver l'équation en revenant à la relation qui existe entre $u$, $v$, $w$.

La perpendiculaire abaissée du point A sur la droite $ux+vy+w=0$ a pour équation

$$\frac{x-a}{u}=\frac{y}{v};$$

nous avons donc à éliminer $u$, $v$, $w$ entre les équations

$$\frac{u}{x-a}=\frac{v}{y};$$

$$ux+vy+w=0,$$

et $$a^2u^2+b^2v^2+auw=0.$$

Les deux premières donnent

$$\frac{u}{x-a}=\frac{v}{y}=\frac{-w}{x(x-a)+y^2};$$

le lieu s'obtient en portant ces valeurs dans la troisième et l'on trouve ainsi

(4) $$a(x-a)[x(x-a)+y^2]-a^2(x-a)^2-b^2y^2=0.$$

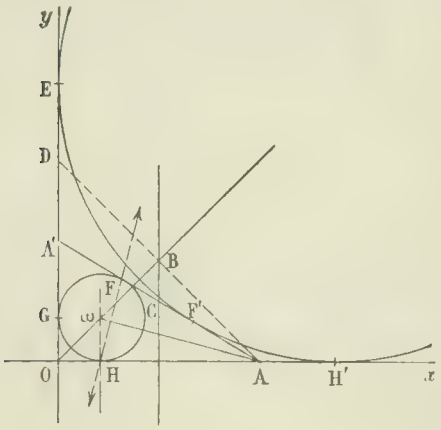
Le point A est visiblement un point double ; en portant les axes en ce point, l'équation se simplifie et devient $$ax(x^2+y^2)-b^2y^2=0.$$

Rien n'est plus simple que de construire cette courbe ; c'est un problème classique.

A. SAINTE-LAGUE, élève de l'Ecole normale supérieure et J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

Assez bonnes solutions : MM. Louin, élève au lycée de Toulouse ; R. Bouvaist.

**Solution géométrique.** — **1.** Sur chaque droite AA′ passant par le point A, il y a deux points du lieu autres que le point A, les points F et F′ où cette droite est touchée par le cercle inscrit dans le triangle AOA′ et par le cercle exinscrit situé dans l'angle $xOy$. Il suffit de se reporter au théorème de Dandelin relatif aux sections planes du cône de révolution pour voir que le milieu de FF′ coïncide avec le milieu de AA′ et que ce point décrit une droite BC parallèle à $Oy$, l'homothétique de $Oy$ par rapport au point A dans le rapport $\frac{1}{2}$. D'autre part, $A'D = FF'$ (la droite AD est parallèle à la seconde bissectrice), et comme $BC=\frac{DA'}{2}$, il en résulte que $BC = CF = CF'$. Le point F et le point F′ décrivent donc une strophoïde dont le point B est le point double et dont l'asymptote réelle est parallèle à $Oy$ ; les tangentes au point B sont les bissectrices des deux droites BC et BA. Toutes les autres particularités que présente cette courbe dans le cas actuel s'aperçoivent sans aucune peine.




**2.** Le second point limite du faisceau linéaire formé par le cercle GFH et par le cercle-point A s'obtient en abaissant du point A une perpendiculaire sur la polaire de A par rapport au cercle ; soit HF cette droite ; nous sommes conduits à chercher l'enveloppe de cette droite. Or la droite HF est perpendiculaire à la droite Aω qui joint le point A au centre du cercle ; ces deux droites tracent donc deux divisions homographiques en involution sur la droite de l'infini, ayant pour points doubles les points I et J ; retenons seulement qu'elles sont homographiques : alors la série décrite par le point ω sur la première bissectrice est homographique à la série que décrit la droite HF sur la droite de l'infini ; mais si on projette ω sur $Ox$ la projection se fait en un point H qui trace aussi sur $Ox$ une division homographique à celle que décrit le point ω. La droite HF qui

joint les points homologues de deux divisions homographiques tracées sur $Ox$, et sur la droite de l'infini, enveloppe donc une parabole. Il est facile de voir que cette parabole touche $Ox$ au point A et la droite de l'infini sur la deuxième bissectrice. Les autres particularités s'aperçoivent sans peine.

Le second lieu que l'on cherche est alors la podaire du point A par rapport à cette parabole ; c'est donc une cissoïde ayant son point de rebroussement en A et son asymptote parallèle à la première bissectrice, etc.

**3.** Soient H et H′ les points de contact de deux cercles du système avec $Ox$ ; si l'axe radical de ces deux cercles doit passer au point A, ce point sera le milieu de HH′.

Nous avons donc à trouver l'enveloppe d'une sécante réelle ou imaginaire de l'ellipse dont le milieu décrit la parallèle à $Oy$ menée par le point A. Il est facile de montrer que l'enveloppe de cette droite est une parabole, etc.

A. SAINTE-LAGÜE, élève de l'Ecole normale supérieure, et J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

---

**1207.** — *On considère un cercle et deux points* F *et* F′ *symétriques par rapport au centre de ce cercle. On joint un point variable* M *de la circonférence aux deux points* F *et* F′ *et on prend les points de rencontre* N *et* N′ *de* MF, MF′ *avec cette circonférence. Trouver l'enveloppe de la corde* NN′.

Prenons pour axe des $x$ la droite FF′ et pour axe des $y$ une perpendiculaire à cette droite passant par le centre du cercle; désignons par R le rayon du cercle, et par $a$ et $-a$ les abscisses des points F et F′

L'équation du cercle est alors $x^2+y^2-R^2=0$. Soit M $(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ un point du cercle ; les droites MF et MF′ rencontrent respectivement le cercle en des points N et N′. Nous allons chercher l'enveloppe de la droite NN′ quand l'angle $\varphi$ varie. Soit $ux+vy+w=0$ l'équation de cette droite.

Transportons l'origine des coordonnées au point M. Les équations du cercle et de la droite NN′ deviennent

$$x^2+y^2+2R(x\cos\varphi+y\sin\varphi)=0,$$
$$ux+vy+w+R(u\cos\varphi+v\sin\varphi)=0,$$

et en éliminant la variable d'homogénéité entre ces deux équations, nous obtenons l'équation de l'ensemble des droites MN, MN′:

$$2R(ux+vy)(x\cos\varphi+y\sin\varphi)-(x^2+y^2)[R(u\cos\varphi+v\sin\varphi)+w]=0.$$

En revenant à l'ancien système d'axes, cette équation devient

$$2R\,[ux+vy-R(u\cos\varphi+v\sin\varphi)][x\cos\varphi+y\sin\varphi-R]$$
$$-[x^2+y^2-2R(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+R^2][R(u\cos\varphi+v\sin\varphi)+w]=0.$$

Ecrivons que pour $y=0$, elle se réduit à $x^2-a^2=0$ ; nous obtenons les deux conditions

$$Ru-w\cos\varphi=0,$$
$$Ru\cos\varphi(a^2+R^2)+Rv\sin\varphi(a^2-R^2)-w(a^2+R^2)=0.$$

On en tire

$$\cos\varphi=\frac{Ru}{w},\qquad \sin\varphi=\frac{(a^2+R^2)(R^2u^2-w^2)}{R(a^2-R^2)vw},$$

et en portant ces valeurs dans la relation $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, on obtient

$$(R^2u^2-w^2)[R^2u^2(a^2+R^2)^2+R^2v^2(a^2-R^2)^2-w^2(a^2+R^2)^2]=0.$$

Le facteur $R^2u^2-w^2$ correspond au cas où le point M est à l'une des extrémités du diamètre FF′; dans ce cas N et N′ sont confondus avec l'autre extrémité, et la droite NN′ est une droite quelconque passant par ce point. La véritable enveloppe a donc pour équation tangentielle

$$R^2u^2+R^2\frac{(a^2-R^2)^2}{(a^2+R^2)^2}v^2-w^2=0,$$

et pour équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2(a^2+R^2)^2}{R^2(a^2-R^2)^2}-1=0.$$

Cette équation représente une ellipse rapportée à ses axes. Elle est bitangente au cercle aux extrémités du diamètre FF'.

J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

Solutions analogues par MM. R. Bouvaist et T. Lemoyne.

**Solution géométrique.** — Nous allons résoudre le problème plus général qui suit:

*On donne une conique* (C) *et deux points quelconques* F *et* F'. *On joint un point variable* M *de la conique aux points* F *et* F', *et on prend les points de rencontre de* MF, MF' *avec la conique. Enveloppe de la corde joignant ces deux points.*

Faisons une transformation homographique de manière à ce que les points de rencontre A, A' de la conique (C) et de la droite FF' deviennent les points cycliques du plan. La conique (C) se transforme en un cercle, et la droite FF' devient la droite de l'infini. On est ramené à chercher l'enveloppe du troisième côté d'un triangle inscrit dans un cercle, les deux premiers étant parallèles à des droites fixes. Or cette enveloppe est un cercle, car l'angle opposé au troisième côté est constant.

En revenant à la première figure, on voit que l'enveloppe est une conique bitangente à (C) aux points A et A'.

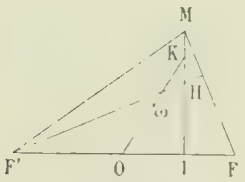
J. G. NICOLESCO, à Bucarest.

---

**1209.** — *On considère une ellipse de foyers* F *et* F', *et un point* M *variable sur l'ellipse. Le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* MFF' *est une quartique que l'on demande de construire.*

Soit H le point de concours des hauteurs du triangle MFF'. Le cercle des neuf points de ce triangle passe par le point O, centre de l'ellipse, par le point K, milieu de MH, et par le pied I de la hauteur issue du point M. Par suite, ce cercle a pour diamètre OK, son centre $\omega$ est le milieu de OK.

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation de l'ellipse, et $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du point M. L'abscisse de H est $\alpha$, calculons son ordonnée. Le coefficient angulaire de MF est $\frac{\beta}{\alpha-c}$, par conséquent, l'équation de la hauteur F'H est




$$\frac{y}{x+c}=-\frac{\alpha-c}{\beta},$$

et en y faisant $x=\alpha$, nous obtenons l'ordonnée du point H

$$y=\frac{c^2-\alpha^2}{\beta};$$

par suite l'ordonnée de K est $\frac{1}{2}\left[\frac{c^2-\alpha^2}{\beta}+\beta\right]$ ou $\frac{c^2-\alpha^2+\beta^2}{2\beta}$

Donc les coordonnées du centre $\omega$ sont

$$x=\frac{\alpha}{2},\qquad y=\frac{c^2-\alpha^2+\beta^2}{4\beta},$$

et nous avons la relation

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1=0.$$

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant $\alpha$ et $\beta$ entre ces trois équations.

La première donne $\alpha=2x$; de la troisième on tire $\beta^2=\frac{(a^2-4x^2)b^2}{a^2}$, et en portant ces valeurs dans la seconde, on a

$$y^2=\frac{[4x^2(a^2+b^2)-a^4]^2}{16a^2b^2(a^2-4x^2)}.$$

C'est l'équation d'une quartique symétrique par rapport aux deux axes.

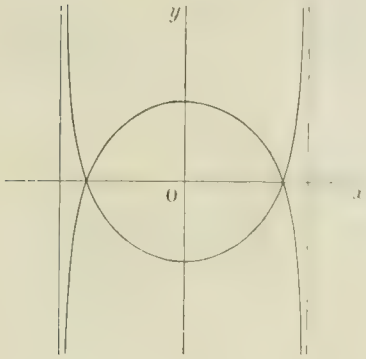
A chaque valeur de $x$ correspondent deux valeurs de $y$, égales et de signes contraires, il suffira de discuter l'une d'elles, par exemple

$$y = \frac{4x^2(a^2+b^2) - a^4}{4ab\sqrt{a^2-4x^2}},$$

le radical étant précédé du signe $+$. De plus, on ne donnera à $x$ que des valeurs positives.

La dérivée de $y$ par rapport à $x$ est

$$y' = \frac{x[4(a^2+b^2)x^2 + a^2(a^2+2b^2)]}{ab(a^2-4x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$




Pour que $y$ soit réel, il faut que $a^2 - 4x^2$ soit positif, nous ferons varier $x$ de $0$ à $\frac{a}{2}$. La dérivée $y'$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x^2 = \frac{a^2(a^2+2b^2)}{4(a^2+b^2)}$. Or cette valeur étant supérieure à $\frac{a^2}{4}$ ne peut être considérée dans le cas actuel ; par suite lorsque $x$ croît de $0$ à $\frac{a}{2}$, $y'$ est sans cesse positif, et la fonction $y$ est croissante.

Pour $x = 0$, $y = -\frac{a^2}{4b}$; $y$ s'annule pour $x = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$, et quand $x$ tend vers $\frac{a}{2}$ $y$ augmente indéfiniment.

En achevant par symétrie, on obtient la courbe ci-contre. Elle admet pour asymptotes les droites $x = \pm\frac{a}{2}$, et elle a deux points doubles réels sur $Ox$, qui ont pour abscisses $\pm\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

R. BOUVAIST.

Bonnes solutions par MM. Blanchot, à Aurillac; R. Javelot, à Givet; J. Haag, à Pont-à-Mousson; R. Manen, étudiant à Toulouse.

---

**1211.** — *Trouver et construire la courbe lieu des centres des cercles qui passent par un des sommets d'une ellipse et qui sont tangents à l'ellipse.*

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes. Supposons que les cercles passent par le sommet $A(a, 0)$ et soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$, les coordonnées du point de contact M de l'un d'eux avec l'ellipse. Outre les points M et A, le cercle rencontre l'ellipse en un autre point N, et la droite AN a un coefficient angulaire égal et de signe contraire à celui de la tangente au point M. Le cercle considéré a donc une équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda\left(\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} - 1\right)\left(\frac{(x-a)\cos\varphi}{a} - \frac{y\sin\varphi}{b}\right) = 0.$$

Cette équation ne renferme pas de terme en $xy$, elle représentera un cercle si les coefficients de $x^2$ et de $y^2$ sont égaux, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{1}{a^2} - \lambda\frac{\cos^2\varphi}{a^2} = \frac{1}{b^2} - \lambda\frac{\sin^2\varphi}{b^2},$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{c^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

En remplaçant $\lambda$ par cette valeur dans l'équation (1), on obtient

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2 x \cos\varphi(1 + \cos\varphi)}{a} + \frac{c^2 y \sin\varphi(1 - \cos\varphi)}{b} - a^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi + c^2 \cos\varphi = 0.$$

Le centre a pour coordonnées

$$(2) \qquad x = \frac{c^2 \cos\varphi(1 + \cos\varphi)}{2a}, \qquad y = -\frac{c^2 \sin\varphi(1 - \cos\varphi)}{2b};$$

on a l'équation du lieu en éliminant $\varphi$ entre ces deux équations. Mais pour construire ce lieu, il est préférable de conserver les équations (2) et de discuter les variations de $x$ et de $y$ quand on fait varier $\varphi$.

Prenons les dérivées de $x$ et de $y$ par rapport à $\varphi$, nous avons

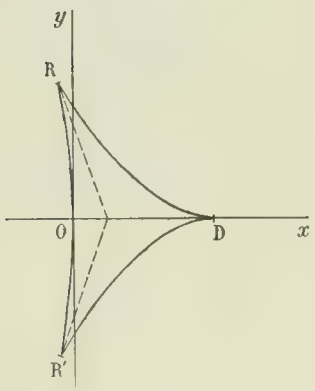
$$x' = -\frac{c^2 \sin\varphi(1 + 2\cos\varphi)}{2a}, \qquad y' = -\frac{c^2(1 - \cos\varphi)(1 + 2\cos\varphi)}{2b},$$

ces deux dérivées s'annulent pour $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, par suite au point correspondant la courbe présente un rebroussement.

Pour obtenir toute la courbe, il faut faire varier $\varphi$ dans un intervalle dont l'étendue soit égale à $2\pi$, par exemple dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$. Mais en changeant $\varphi$ en $-\varphi$, $x$ ne change pas et $y$ change de signe; donc la courbe est symétrique par rapport à $Ox$, et il suffira de faire varier $\varphi$ dans l'intervalle $(0, \pi)$, et de prendre la symétrique de la portion de courbe obtenue par rapport à $Ox$.

En chaque point le coefficient angulaire de la tangente est

$$\frac{y'}{x'} = \frac{a(1 - \cos\varphi)}{b \sin\varphi} = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$




Le tableau suivant donne les variations de $x$ et de $y$ :

| $\varphi$ | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | 0 | $-$ | | $-$ | $+$ | | |
| $y'$ | 0 | $-$ | | $-$ | $+$ | | |
| $x$ | $\frac{c^2}{a}$ | décroît | 0 | décroît | $-\frac{c^2}{8a}$ | croît | 0 |
| $y$ | 0 | décroît | $-\frac{c^2}{2b}$ | décroît | $-\frac{3c^2\sqrt{3}}{8b}$ | croît | 0 |

On en déduit la forme de courbe ci contre.

Au point O correspondant à $\varphi = 0$ la tangente est $Ox$; à l'origine $(\varphi = \pi)$ la tangente est $Oy$. Enfin les tangentes de rebroussement aux points R et R' ont respectivement pour coefficients angulaires $-\frac{a}{b}\sqrt{3}$ et $+\frac{a}{b}\sqrt{3}$.

J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

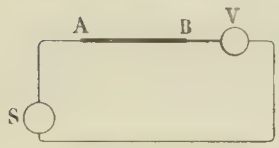
## CONCOURS DE 1903 (*suite*)

### ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

*Physique et chimie.*

I. — **1284**. Soit un circuit électrique alimenté par une source S. Dans ce circuit sont intercalés : 1° Un fil AB en platine dont la longueur est de $1^m$ et le diamètre $1^{mm}$ ; 2° Un voltamètre V.

On fait passer le courant, dont l'intensité reste bien constante, pendant $\frac{1}{2}$ heure. La quantité de chaleur dégagée pendant ce temps dans le conducteur AB est de 200,84 calories (calories-grammes).




On demande :

1° La résistance du conducteur AB exprimée en ohms.

2° L'intensité du courant exprimée en ampères (ampères légaux).

3° Le volume de gaz dégagé dans le voltamètre V mesuré à la température et à la pression du laboratoire.

*Données numériques* : Température du laboratoire : 15° ; Pression barométrique : 722mm,7 ; Force élastique maxima de la vapeur d'eau à 15° : 12mm,7 ; Equivalent mécanique de la calorie : 4,18 joules ; Masse atomique de l'argent : 108 ; Résistivité du platine : 9,158 microhms-centimètres.

II. — L'acétylène. On indiquera *très-brièvement* :

1° Les diverses réactions donnant naissance à l'acétylène.

2° Ses propriétés physiques et chimiques.

3° Ses caractères.

4° Ses usages.

(*Durée* : *3 h. 1/2.*)

*Mathématiques.*

**1285.** — On donne sur l'axe $Ox$ deux points A et C d'abscisses $a$ et $c$, sur l'axe $Oy$ perpendiculaire à $Ox$ un point B d'ordonnée $b$. On considère le triangle ABC. D'un point M pris sur AB, on mène une parallèle à AC qui rencontre BC au point N. De N, on abaisse une perpendiculaire $\Delta$ sur la droite MC. On étudiera la famille des droites $\Delta$ engendrées par le déplacement de M sur la droite AB indéfiniment prolongée.

1° Montrer qu'en tout point du plan passent deux droites $\Delta$. Equation aux coefficients angulaires de ces droites. Discussion.

2° Lieu des points pour lesquels les droites $\Delta$ font un angle donné, un angle droit en particulier.

3° Démontrer que les droites $\Delta$ sont tangentes à une parabole.

4° On cherchera le lieu du foyer de cette parabole :

*a*) Quand, B et C restant fixes, A se déplace sur l'axe des $x$.

*b*) Quand A et B restant fixes, C se déplace sur l'axe des $x$.

*c*) Quand C et A restant fixes, B se déplace sur l'axe des $y$.

5° Lieu du point Q intersection de MC avec la droite $\Delta$ correspondante, quand M se déplace sur AB indéfiniment prolongée. Discuter : Cas où l'angle en B est droit.

(*Durée* : *4 heures*.)

*Calcul trigonométrique.*

**1286.** — Trouver entre 0 et 360° les arcs $x$ satisfaisant à l'équation

$$\sqrt[5]{\pi}\sin^2 x + 2e\pi \sin x \cos x + 2\sqrt[5]{\pi}\cos^2 x = \sqrt[5]{e}$$

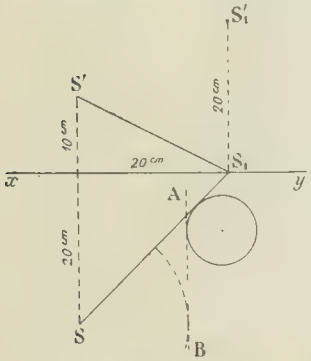
où $\pi = 3{,}141592653\ldots$ et où $e$ représente la base des logarithmes népériens.

N. B. — Toutes les formules auxquelles on sera conduit seront rendues calculables par logarithmes à l'aide d'arcs auxiliaires. Seules les sommes d'arcs seront calculées par addition directe.

(*Durée* : *1 heure*.)

*Géométrie descriptive.*

INTERSECTION DE DEUX CÔNES DE SOMMETS SS′, $S_1S'_1$.




**1287.** — Le premier sommet SS′ est à 10cm au-dessus et à 20cm en avant de la ligne de terre.

Le second sommet $S_1S'_1$ est dans le plan vertical de projection, à 20cm au-dessus de la ligne de terre et à 20cm également à droite du 1er sommet.

Le cône SS′ a pour base un cercle de 4cm de rayon, situé dans le plan de profil de l'autre sommet $S_1S'_1$, tangent à la verticale $S_1S'_1$ et dont le centre, situé dans le 1er dièdre, est à 8cm au-dessus du plan horizontal.

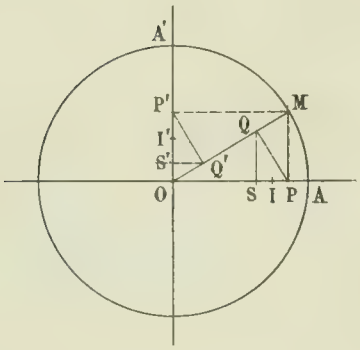
Le cône $S_1S'_1$ a sa base dans le plan de bout de trace verticale $S'S_1$. Cette base se projette horizontalement suivant un cercle de 5cm de rayon, tangent d'une part à $SS_1$ et d'autre part à une ligne de bout AB distante de S d'une longueur égale à $\frac{SS_1}{2}$. Il résulte de cette position des particularités pour les contours apparents, que les constructions mettront facilement en évidence.

On demande de représenter, en faisant la distinction des parties vues et cachées : 1° en projection verticale, la partie de *surface* du cône SS′ comprise à l'intérieur du second : 2° en projection horizontale, ce qui reste du second cône $S_1S_1'$ quand on suppose enlevée la partie comprise à l'intérieur du premier.

On reproduira à l'encre (traits noirs discontinus ou traits continus de couleur) la construction d'un point courant de l'intersection avec la tangente, ainsi que celles de *tous* les points remarquables, avec les tangentes quand elles peuvent être déterminées. — L'emploi du pistolet pour le tracé des courbes est interdit. — Titre : Intersection de cônes. Cadre inutile.

*(Durée : 3 heures.)*

## QUESTIONS PROPOSÉES




**1288.** — Soient OA, OA′ deux rayons rectangulaires fixes d'un cercle, M un point variable de la circonférence. On projette M en P sur OA, puis P en Q sur OM, et Q en S sur OA. On construit sur OA′ les points P′ et S′ analogues à P et S. Trouver le lieu du point de rencontre de la perpendiculaire élevée à OA au milieu I de SP avec la perpendiculaire élevée à OA′ au milieu I′ de S′P′. Construire la courbe et déterminer en particulier ses points d'inflexion.

E.-N. Barisien.

**1289.** — Quand une corde d'une conique tourne autour d'un point fixe, la somme algébrique des inverses des distances de ses extrémités à la polaire du point fixe est constante.

## BIBLIOGRAPHIE

**Précis d'Algèbre et de Trigonométrie**, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales, par G. Papelier, professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Orléans.— Paris, Librairie Vuibert et Nony, 63, boulevard Saint-Germain.

Le nouveau programme de l'Ecole Polytechnique, malgré les imperfections nombreuses qu'il présente tant au point de vue de la rédaction que de la clarté et de l'étendue des matières exigées, présente cependant un avantage très réel sur l'ancien. Il indique nettement que les candidats ne seront plus interrogés sur toutes les chinoiseries qui avaient fini par encombrer l'enseignement et qui trop souvent leur faisaient perdre de vue le véritable but des sciences mathématiques ; il débarrasse élèves et professeurs de toutes considérations métaphysiques sur les fondements de l'analyse et sur la théorie générale des fonctions ; il montre enfin que l'on exigera plutôt des candidats des faits mathématiques utiles et précis, en nombre suffisant, que des dissertations stériles sur des cas singuliers dont plusieurs ne se présenteront même jamais à la plupart d'entre eux

A ce point de vue, on ne saurait donc trop se féliciter du changement. Sans doute, de vieilles habitudes d'enseignement et surtout de vieilles habitudes d'examens, n'ont pas encore permis que le nouveau programme portât tous ses fruits. Mais, à mesure que les examinateurs le connaîtront mieux et interpréteront plus fidèlement son esprit, l'amélioration déjà entrevue grandira plus rapidement.

A un programme nouveau, il faut des livres nouveaux. M. Papelier l'a parfaitement compris et c'est la raison qui sans aucun doute l'a poussé à écrire pour les élèves son *Précis d'Algèbre et de Trigonométrie*.

Je ne veux pas parcourir en entier le livre devant mes lecteurs et énumérer des matières qui sont si bien connues de tous Mais je me hâte de dire que le titre de l'ouvrage n'est pas un mensonge et que c'est véritablement un précis que l'auteur met entre les mains du candidat, un guide fidèle et peu encombrant qui lui montre bien l'ensemble des connaissances qu'il doit posséder et la limite de l'effort qu'il doit faire.

L'auteur s'est attaché partout à la simplicité et à la clarté, aussi bien dans les énoncés que dans les démonstrations. Celles-ci sont rigoureuses, c'est-à-dire qu'elles sont déduites logiquement des définitions et des notions fondamentales que l'auteur admet sans examen.

Une telle rigueur est indispensable en mathématiques, car, seule, elle peut entraîner la certitude et donner aux élèves un jugement sûr et droit.

Toutes ces qualités suffisent amplement à justifier le succès du livre de M. Papelier. Les candidats auront là un memento court, complet et débarrassé de toute inutile digression.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

14e Année. N° 6 Mars 1904.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LES CONIQUES CONSIDÉRÉES COMME COURBES UNICURSALES (*Fin*) (*)

par M. **Ch. Michel**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

**7.** Voici des formes particulières de la relation entre les points de rencontre d'une conique variable avec une conique et une droite fixes qui se coupent en deux points distincts.

1° Supposons que A et B soient les points cycliques du plan. La conique (C) est un cercle et la droite (D) est la droite de l'infini. Si V est l'angle défini, en grandeur et en signe, à un multiple de $\pi$ près, de la tangente en O avec le rayon OM, on a la relation due à Laguerre

$$R = e^{2V}.$$

De même, si W est l'angle de la tangente en O avec le rayon O$n$, on a

$$r = e^{2W}.$$

La relation considérée devient alors

$$W - W' = V_1 - V_2 + V_3 + V_4,$$

à un multiple de $\pi$ près.

2° Supposons que la conique (C) soit une ellipse et que la droite D soit la droite de l'infini. Les points A et B sont alors imaginaires conjugués. Prenons comme point O sur l'ellipse un sommet de l'axe focal et, par suite, comme point $\omega$ le point à l'infini sur l'axe non focal. Si M est un point réel de l'ellipse, le rapport anharmonique R des quatre points M, O, A, B est le quotient de deux quantités imaginaires conjuguées ; c'est donc une imaginaire de module 1, qu'on peut mettre sous la forme $e^{i\varphi}$, $\varphi$ étant une quantité réelle, définie à un multiple de $2\pi$ près. Cette quantité est égale à l'*anomalie excentrique* du point M. Soit en effet $\mu$ le point du cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre, qui est situé sur la perpendiculaire menée par M sur l'axe, du même côté que M par rapport à l'axe. Dans la transformation de $\mu$ en M, le point O se transforme en lui-même, et les points cycliques, en les points A et B. Le rapport anharmonique $R = (M, O, A, B)$ est égal au rapport anharmonique sur le cercle des points $\mu$, O et des points cycliques. Si $\psi$ est l'angle de la tangente en O avec O$\mu$, R est égal à $e^{2i\psi}$ ; par suite, à un multiple de $2\pi$ près, $\varphi$ est égal à $2\psi$. On voit alors bien facilement que, si C est le centre de la conique, $\varphi$ est, à un multiple de $2\pi$ près, l'angle de la demi-droite CO avec la demi-droite C$\mu$. On reconnaît la définition ordinaire de l'anomalie excentrique d'un point d'une ellipse.

Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points d'une ellipse, d'anomalies $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, soient sur une même circonférence. Une circonférence variable rencontrant la droite de l'infini en deux points fixes, il en résulte que $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$ a une valeur constante. En particulier, considérons le cercle tangent à l'ellipse aux deux sommets de l'axe focal. Les anomalies de ces deux points étant 0 et $\pi$, la somme des anomalies des quatre points de rencontre confondus deux à deux avec les sommets est égale à 0, à $2k\pi$ près. Donc, le cercle étant quelconque, on a encore la relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0,$$

à $2k\pi$ près.

(*) Voir le numéro de Février 1904 de la *Revue*.

Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points, d'anomalies $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$, sur l'ellipse, soient sur une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes. Un point de rencontre de l'hyperbole équilatère avec la droite (D) est justement le point $\omega$, point à l'infini de la tangente en O à l'ellipse, pour lequel le rapport anharmonique $r$ est égal à 1. Le rapport anharmonique $r'$, relatif au second point de rencontre, est égal à $-1$. On a, par suite, l'égalité

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)} = -1,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \pi,$$

à $2k\pi$ près.

Considérons une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse ; soient $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ les anomalies des quatre points de rencontre de l'hyperbole avec l'ellipse. Le cercle qui passe par les trois points, d'anomalies $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, rencontre l'ellipse en un quatrième point, d'anomalie $\varphi_4'$. D'après ce qui précède, on a simultanément

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0,$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4' = \pi.$$
$$t_1 t_2 t_3 t_4' = -1.$$

Supposons en même temps que la conique passe par le point à l'infini sur l'axe non focal. Alors, on a

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \pi.$$

Par suite, $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_3}{2} + \frac{\varphi_4}{2}\right)$ est infini, et l'expression de la tangente trigonométrique d'une somme d'arcs en fonction des tangentes trigonométriques de ces arcs montre que l'on a

$$1 - \Sigma t_1 t_2 + t_1 t_2 t_3 t_4 = 0.$$

En tenant compte de l'égalité précédente, on a

$$\Sigma t_1 t_2 = 0.$$

On obtient ainsi deux conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points d'une ellipse soient sur une hyperbole équilatère passant par le centre et les points à l'infini sur les axes, autrement dit, d'après un résultat connu, pour que les normales en quatre points d'une ellipse passent par un même point.

L'équation aux $t$ des pieds des normales menées d'un point à une ellipse est de la forme

$$At^4 + Bt^3 + Ct - A = 0.$$

D'ailleurs, si $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ sont les anomalies de quatre points d'une ellipse situés sur un même cercle, on a

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_3}{2} + \frac{\varphi_4}{2}\right) = 0,$$

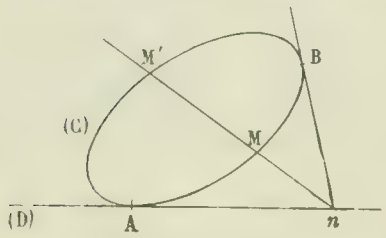
et, par suite,

$$\Sigma t_1 = \Sigma t_1 t_2 t_3.$$

L'équation aux $t$ des points de rencontre d'une ellipse avec un cercle est de la forme

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Bt + D = 0.$$

8. Dans ce qui précède, nous avons supposé essentiellement que la droite (D) rencontre la conique (C) en deux points distincts. Proposons-nous d'établir la relation qui existe entre les six points de rencontre d'une conique variable avec une conique fixe (C) et une droite fixe (D), tangente à cette conique en un point A.




Soit une sécante rencontrant (C) en M et M' et (D) en $n$. Si la sécante tourne autour du point $n$, le couple des points M et M', d'après le théorème de Frégier, varie en involution. L'un des points doubles de l'involution est le point A, l'autre est le point de contact B de la seconde tangente menée de $n$ à la conique. Si $\lambda$ et $\lambda'$ sont les paramètres

des points M et M′, $\alpha$ le paramètre du point A, $\mu$ celui du point B, on a l'égalité

$$\frac{1}{\lambda-\alpha}+\frac{1}{\lambda'-\alpha}=\frac{2}{\mu-\alpha}.$$

Cela posé, considérons une conique quelconque rencontrant (C) aux quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ et (D) aux deux points $n$ et $n'$. Soient $\mu$ et $\mu'$ les paramètres des points de contact B et B′ des secondes tangentes menées de $n$ et de $n'$ à la conique (C). Si $n$ et $n'$ varient dans une involution dont A soit un point double, le point de rencontre des tangentes en B et B′, d'après le théorème corrélatif du théorème de Frégier, décrit une droite, et la droite BB′ passe, par suite, par un point fixe, pôle de cette droite par rapport à (C). Le couple des points B et B′ varie donc en involution sur (C). D'ailleurs, A est un point double de l'involution ; par suite, la somme

$$\frac{1}{\mu-\alpha}+\frac{1}{\mu'-\alpha}$$

est constante.

Soient $n_{12}$ et $n_{34}$ les points de rencontre des droites $M_1M_2$ et $M_3M_4$ avec (D), et désignons par $\mu_{12}$ et $\mu_{34}$ les paramètres des points de contact des secondes tangentes menées de ces deux points à (C). On a

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}=\frac{2}{\mu_{12}-\alpha},\qquad \frac{1}{\lambda_3-\alpha}+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}=\frac{2}{\mu_{34}-\alpha},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}=\frac{2}{\mu_{12}-\alpha}+\frac{2}{\mu_{34}-\alpha}.$$

Or, d'après le théorème de Desargues, les couples $(n, n')$ et $(n_{12}, n_{34})$ définissent une involution dont un point double est le point A. Donc, d'après ce qui précède, on a

$$\frac{1}{\mu_{12}-\alpha}+\frac{1}{\mu_{34}-\alpha}=\frac{1}{\mu-\alpha}+\frac{1}{\mu'-\alpha}.$$

On a enfin la relation

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}=\frac{2}{\mu-\alpha}+\frac{2}{\mu'-\alpha}.$$

Pour interpréter cette relation, nous introduirons une notion nouvelle. D'une manière générale, nous appellerons *pôle harmonique* d'un point, de paramètre $\alpha$ sur une courbe unicursale, par rapport à un système de points $M_1, M_2, \ldots, M_n$, de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sur cette courbe, le point P dont le paramètre $\mu$ est défini, sur cette courbe, par la relation

$$\frac{n}{\mu-\alpha}=\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\cdots+\frac{1}{\lambda_n-\alpha}.$$

Il est nécessaire de montrer que la définition est indépendante de la représentation paramétrique, c'est-à-dire que la relation précédente subsiste, si l'on effectue sur les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, $\mu$ et $\alpha$ une même transformation homographique. Or, comme on sait, une transformation homographique quelconque est le produit de transformations prises parmi les transformations homographiques élémentaires $\lambda'=\lambda+h$, $\lambda'=k\lambda$, $\lambda'=\frac{1}{\lambda}$. On voit immédiatement que la relation précédente subsiste dans chacune des deux premières transformations homographiques élémentaires. Il reste à voir qu'elle subsiste encore dans la dernière. On a, en posant $\lambda_i=\frac{1}{\lambda_i'}$, $\mu=\frac{1}{\mu'}$ et $\alpha=\frac{1}{\alpha'}$,

$$\frac{n}{\frac{1}{\mu'}-\frac{1}{\alpha'}}=\frac{1}{\frac{1}{\lambda_1'}-\frac{1}{\alpha'}}+\cdots+\frac{1}{\frac{1}{\lambda_n'}-\frac{1}{\alpha'}},$$

c'est-à-dire, en simplifiant,

$$\frac{n\mu'}{\mu'-\alpha'}=\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'-\alpha'}+\cdots+\frac{\lambda_n'}{\lambda_n'-\alpha'}.$$

Mais on a

$$\frac{\mu'}{\mu'-\alpha'} = \frac{\alpha'}{\mu'-\alpha'} + 1, \qquad \frac{\lambda'_1}{\lambda'_1-\alpha'} = \frac{\alpha'}{\lambda'_1-\alpha'} + 1, \ldots$$

On voit bien ainsi que la relation se réduit à

$$\frac{n}{\mu'-\alpha'} = \frac{1}{\lambda'_1-\alpha'} + \cdots + \frac{1}{\lambda'_n-\alpha'}.$$

Le raisonnement suppose que $\alpha$ est fini. Si $\alpha$ est infini, il convient de remplacer la relation qui définit le pôle harmonique par la relation

$$n\mu = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n,$$

comme on le reconnaît en faisant, dans ce qui précède, $\alpha' = 0$.

En particulier, si le système des points M se réduit à deux points, le pôle harmonique du point A par rapport au système est le conjugué harmonique du point A par rapport aux deux points du système.

La relation précédemment établie entre les points de rencontre d'une conique variable avec la conique (C) et la droite (D) conduit ainsi au théorème suivant :

*Etant données une conique* (C) *et une droite* (D) *tangentes en* A, *le pôle harmonique du point* A *par rapport au système des quatre points de rencontre de* (C) *avec une conique variable est le conjugué harmonique du point* A *par rapport aux points de contact des tangentes menées à* (C) *par les points où la conique variable rencontre la droite* (D).

Appelons, corrélativement, *polaire harmonique* d'une tangente à une courbe unicursale, de paramètre $\alpha$, par rapport à un système de tangentes à cette courbe, de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, la tangente à la courbe, dont le paramètre $\mu$ est défini par la relation

$$\frac{n}{\mu-\alpha} = \frac{1}{\lambda_1-\alpha} + \frac{1}{\lambda_2-\alpha} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n-\alpha}.$$

D'après cette définition, le point de contact de la polaire harmonique est le pôle harmonique du point de contact de la tangente de paramètre $\alpha$ par rapport au système des points de contact des tangentes de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Faisons, en passant, cette remarque que la définition s'applique à l'ensemble des droites qui passent par un même point. On a, en outre, dans ce cas, le théorème suivant qui est immédiat : soient un système de droites concourantes, une droite (D) passant par le point de concours et la polaire harmonique de la droite (D) par rapport au système. Si on coupe ces droites concourantes par une droite quelconque, le point d'intersection avec la droite (D) a pour pôle harmonique, par rapport aux points d'intersection avec les droites du système, le point d'intersection avec la polaire harmonique de la droite (D).

Cela posé, par dualité, on a le théorème général suivant :

*Etant données une conique* (C) *et une droite* (D) *tangentes en* A, *le pôle harmonique du point* A *par rapport au système des quatre points de contact avec la conique* (C) *des tangentes communes à cette conique et à une conique variable est le conjugué harmonique du point* A *par rapport aux deux points où la conique* (C) *rencontre les tangentes menées de* A *à la conique variable.*

**9.** Passons aux formes particulières intéressantes de ces théorèmes généraux.

1° Remarquons que le pôle harmonique du point à l'infini sur une droite par rapport à un système de points de cette droite est le centre des moyennes distances de ces points. Cela posé, supposons, dans le premier théorème général établi, que les points $n$ et $n'$ soient les points cycliques ; la conique (C) est alors une parabole et la conique variable une circonférence. Le conjugué harmonique du point à l'infini de la parabole par rapport aux points de contact des tangentes isotropes est, par symétrie, le sommet de la parabole. Donc,

*Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une circonférence avec une parabole est situé sur l'axe de la parabole.*

Ce théorème donne la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points d'une parabole soient sur une circonférence.

2° Supposons, dans le second théorème général, que la droite (D) soit la droite de l'infini. On a le théorème suivant :

*Le centre des moyennes distances des points de contact avec une parabole des tangentes communes à une conique et à cette parabole est sur la parallèle à l'axe de la parabole menée par le centre de cette conique.*

**10.** La condition entre les six points de rencontre d'une conique variable avec une conique (C) et une droite (D) est illusoire si la conique variable passe par un point commun à la conique (C) et à la droite (D).

Nous nous bornerons au cas où la conique (C) et la droite (D) sont tangentes en un point A. Considérons une conique variable passant par le point A et y admettant une tangente fixe, distincte de la droite (D). Elle rencontre la conique (C) en trois points variables $M_1$, $M_2$, $M_3$ et la droite (D), en un point variable $n$. Les quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $n$ sont liés par une relation que nous nous proposons d'établir.

Prenons d'abord une conique variable rencontrant la droite (D) en un point $n'$ infiniment voisin de A, et en un autre point $n$, et rencontrant la conique (C) en un point $M_4$, infiniment voisin de A, et en trois autres points $M_1$, $M_2$, $M_3$. Reprenant les notations précédemment définies, on a l'égalité

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}=\frac{2}{\mu-\alpha}+\frac{2}{\mu'-\alpha}.$$

Soit M′ le point de rencontre de la droite $n'M_4$ avec la conique (C). Si $\lambda'$ est son paramètre, on a

$$\frac{1}{\lambda_4-\alpha}+\frac{1}{\lambda'-\alpha}=\frac{2}{\mu'-\alpha}.$$

Par soustraction des deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}-\frac{1}{\lambda'-\alpha}=\frac{2}{\mu-\alpha}.$$

A la limite, quand les points $M_4$ et $n'$ coïncident avec le point A, M′ est le point de rencontre avec (C) de la tangente en A à la conique sécante, et la relation précédente conserve un sens.

Supposons, en particulier, que la droite (D) soit la droite de l'infini ; la conique (C) est alors une parabole. Coupons cette parabole par une hyperbole équilatère variable ayant comme asymptote l'axe de la parabole. M′ est par suite le sommet de la parabole et c'est aussi le point de contact de la tangente menée de $n$ à la parabole. Donc, $\lambda'=\mu$, et la relation devient

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}=\frac{3}{\mu-\alpha}.$$

Elle exprime que le pôle harmonique du point à l'infini de la parabole par rapport au système des trois points de rencontre de la parabole avec l'hyperbole est le sommet de la parabole. Par suite, le centre de gravité du triangle ayant pour sommets ces trois points est sur l'axe de la parabole.

Or, on sait que, pour que les normales en trois points d'une parabole soient concourantes, il faut et il suffit qu'ils soient sur une hyperbole équilatère asymptote à l'axe de la parabole. Par suite,

*Le centre de gravité du triangle ayant pour sommets les pieds des normales à une parabole menées par un point est sur l'axe de la parabole.*

On a aussi le théorème suivant :

*Le cercle qui passe par les pieds des normales menées d'un point à une parabole passe par le sommet de la parabole.*

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Concours de 1903).

### Mathématiques.

**1224.** — *Deux points* P, $P_1$, *rapportés à un système d'axes rectangulaires* $Ox$, $Oy$, $Oz$, *ont pour coordonnées* $a$, $b$, $c$ *et* $a_1$, $b_1$, $c_1$. *De ces points partent respectivement deux droites* D *et* $D_1$ *ayant pour cosinus directeurs* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, *et* $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$. *L'axe des* $z$ *est vertical.*

*Deux points pesants, placés d'abord en* P *et* $P_1$, *sont abandonnés à eux-mêmes, au même instant, et descendent sur les droites* [D] *et* [$D_1$], *sur lesquelles ils occupent, au bout du temps* $t$, *les positions* M *et* $M_1$.

1° *Exprimer les coordonnées des points* M *et* $M_1$ *en fonction du temps.*

*Les masses des deux points étant* $\mu$ *et* $\mu_1$, *déterminer le mouvement de leur centre de gravité* G.

*En supposant* $c_1 = c$, $\gamma_1 = \gamma$, *trouver à quelles conditions doivent satisfaire* $\alpha$, $\alpha_1$, $\beta$, $\beta_1$ *et quelle doit être la valeur du rapport* $\frac{\mu}{\mu_1}$ *pour que* G *décrive une droite verticale.*

2° *Ces dernières conditions étant remplies, former l'équation de la surface lieu de la droite* $MM_1$, *quand le temps varie.*

*Mettre en évidence les génératrices rectilignes de cette surface.*

*Calculer les coordonnées de son sommet.*

3° *Le mètre étant pris pour unité de longueur, on suppose que l'on ait :*

$$a = b = 0,\quad c = 1,\quad a_1 = 0,\quad b_1 = 2,\quad c_1 = 1,\quad \alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \beta = 0,\quad \alpha_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \beta_1 = 0,\quad \gamma_1 = \frac{1}{2}.$$

*Dans ce cas particulier, calculer le rapport* $\frac{\mu}{\mu_1}$ *de telle sorte que* G *parcoure une droite verticale : calculer en outre sa vitesse* $v$ *à l'instant où il vient rencontrer l'axe des* $y$, *ainsi que la durée* T *de sa chute jusqu'à cet instant. Ces valeurs seront calculées en secondes pour le temps, en mètres à la seconde pour la vitesse, en prenant* 9,8 *pour valeur de l'accélération due à la pesanteur.*

*N. B. — Il est bien entendu qu'on ne tient aucun compte du frottement, ni de la résistance de l'air dans le mouvement des points* M *et* $M_1$.

1. Le point M prend sur la droite (D) un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est égale à la projection de l'accélération de la pesanteur sur cette droite ; cette projection est égale à $-g\gamma$, en supposant que la direction positive de $Oz$ soit la verticale ascendante. On a donc au bout du temps $t$, $\overline{PM} = -\frac{1}{2}g\gamma t^2$, et par suite les coordonnées du point M sont

$$x = a - \frac{1}{2}g\alpha\gamma t^2,\qquad y = b - \frac{1}{2}g\beta\gamma t^2,\qquad z = c - \frac{1}{2}g\gamma^2 t^2,$$

et de même, celles du point $M_1$ sont

$$x_1 = a_1 - \frac{1}{2}g\alpha_1\gamma_1 t^2,\qquad y = b_1 - \frac{1}{2}g\beta_1\gamma_1 t^2,\qquad z = c_1 - \frac{1}{2}g\gamma_1^2 t^2.$$

Les coordonnées du centre de gravité sont

$$x' = \frac{\mu x + \mu_1 x_1}{\mu + \mu_1},\qquad y' = \frac{\mu y + \mu_1 y_1}{\mu + \mu_1},\qquad z = \frac{\mu z + \mu_1 z_1}{\mu + \mu_1},$$

ou, en remplaçant $x$, $y$, $z$, $x_1$, $y_1$, $z_1$ par leurs valeurs,

$$(1)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{\mu a + \mu_1 a_1}{\mu + \mu_1} - \dfrac{1}{2}g\,\dfrac{\mu\alpha\gamma + \mu_1\alpha_1\gamma_1}{\mu + \mu_1}t^2, \\[2ex] y' = \dfrac{\mu b + \mu_1 b_1}{\mu + \mu_1} - \dfrac{1}{2}g\,\dfrac{\mu\beta\gamma + \mu_1\beta_1\gamma_1}{\mu + \mu_1}t^2, \\[2ex] z = \dfrac{\mu c + \mu_1 c_1}{\mu + \mu_1} - \dfrac{1}{2}g\,\dfrac{\mu\gamma^2 + \mu_1\gamma_1^2}{\mu + \mu_1}t^2 \end{cases}$$

Il résulte de ces formules que le centre de gravité G décrit une droite ayant pour paramètres directeurs $\mu\alpha\gamma + \mu_1\alpha_1\gamma_1$, $\mu\beta\gamma + \mu_1\beta_1\gamma_1$, et $\mu\gamma^2 + \mu_1\gamma_1^2$ d'un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est égale à

$$\frac{g}{\mu + \mu_1}\sqrt{(\mu\alpha\gamma + \mu_1\alpha_1\gamma_1)^2 + (\mu\beta\gamma + \mu_1\beta_1\gamma_1)^2 + (\mu\gamma^2 + \mu_1\gamma_1^2)^2}.$$

En supposant $c_1 = c$, $\gamma_1 = \gamma$ les formules (1) deviennent

$$x' = \frac{\mu a + \mu_1 a_1}{\mu + \mu_1} - \frac{1}{2} g\gamma \frac{\mu\alpha + \mu_1\alpha_1}{\mu + \mu_1} t^2,$$

$$y' = \frac{\mu b + \mu_1 b_1}{\mu + \mu_1} - \frac{1}{2} g\gamma \frac{\mu\beta + \mu_1\beta_1}{\mu + \mu_1} t^2,$$

$$z' = c - \frac{1}{2} g\gamma^2 t^2.$$

Pour que le point $(x', y', z)$ décrive une verticale, il faut que $x'$ et $y'$ soient indépendants de $t$ : on doit donc avoir

$$\mu\alpha + \mu_1\alpha_1 = 0, \qquad \mu\beta + \mu_1\beta_1 = 0 ;$$

on en déduit

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\alpha_1}{-\alpha} = \frac{\beta_1}{-\beta} = \pm\frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \pm\frac{\sqrt{1 - \gamma_1^2}}{\sqrt{1 - \gamma^2}} = \pm 1.$$

Comme $\mu$ et $\mu_1$ sont positifs, il faut prendre le signe $+$ dans le dernier membre et l'on a

$$\mu_1 = \mu, \qquad \alpha_1 = -\alpha, \qquad \beta_1 = -\beta.$$

Il résulte de là que les points P et $P_1$ sont situés dans un même plan horizontal, qu'ils ont même masse et de plus que si l'on mène par l'origine des parallèles aux droites D et $D_1$, ces parallèles sont symétriques par rapport à Oz. Donc, en particulier les projections orthogonales des droites D et $D_1$ sur le plan des $xy$ sont parallèles.

**2.** Ces conditions étant remplies, les coordonnées des points M et $M_1$ sont

$$x = a - \frac{1}{2} g\alpha\gamma t^2, \qquad y = b - \frac{1}{2} g\beta\gamma t^2, \qquad z = c - \frac{1}{2} g\gamma^2 t^2,$$

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{2} g\alpha\gamma t^2, \qquad y_1 = b_1 + \frac{1}{2} g\beta\gamma t^2, \qquad z_1 = c - \frac{1}{2} g\gamma^2 t^2.$$

La droite joignant ces deux points a pour équations

$$\frac{X - x}{x_1 - x} = \frac{Y - y}{y_1 - y}, \qquad Z = c - \frac{1}{2} g\gamma^2 t^2.$$

On peut remplacer la première par l'équation

$$\frac{X - \dfrac{x_1 + x}{2}}{x_1 - x} = \frac{Y - \dfrac{y_1 + y}{2}}{y_1 - y} \qquad \text{ou} \qquad \frac{X - \dfrac{a + a_1}{2}}{a_1 - a + g\alpha\gamma t^2} = \frac{Y - \dfrac{b + b_1}{2}}{b_1 - b + g\beta\gamma t^2};$$

de sorte que les équations de la droite $MM_1$ peuvent s'écrire

$$\frac{X - \dfrac{a + a_1}{2}}{a_1 - a + g\alpha\gamma t^2} = \frac{Y - \dfrac{b + b_1}{2}}{b - b_1 + g\beta\gamma t^2}, \qquad Z = c - \frac{1}{2} g\gamma^2 t^2.$$

Nous aurons le lieu engendré par cette droite en éliminant $t^2$ entre ces deux équations. Avant de faire l'élimination, transportons l'origine des coordonnées au point $I\left(\dfrac{a + a_1}{2}, \dfrac{b + b_1}{2}, c\right)$, milieu de $PP_1$ ; les équations de la droite $MM_1$ deviennent

$$\frac{X}{a_1 - a + g\alpha\gamma t^2} = \frac{Y}{b_1 - b + g\beta\gamma t^2}, \qquad Z = -\frac{1}{2} g\gamma^2 t^2,$$

l'élimination de $t^2$ est alors immédiate et conduit à l'équation

$$\frac{X}{a_1 - a - \frac{2\alpha Z}{\gamma}} = \frac{Y}{b_1 - b - \frac{2\beta Z}{\gamma}},$$

ou

$$(2) \qquad 2Z(\beta X - \alpha Y) + \gamma[X(b - b_1) - Y(a - a_1)] = 0.$$

Cette équation représente un paraboloïde hyperbolique équilatère dont les plans directeurs sont $Z = 0$, $\beta X - \alpha Y = 0$.

Ce paraboloïde se réduit à deux plans si les deux équations $\beta X - \alpha Y = 0$ et $X(b - b_1) - Y(a - a_1) = 0$ ont leurs coefficients proportionnels, c'est-à-dire si l'on a $\frac{a - a_1}{\alpha} = \frac{b - b_1}{\beta}$. Cette condition exprime que la droite $PP_1$ est parallèle aux projections des droites D et $D_1$ sur le plan des $xy$. Dans ce cas les droites D et $D_1$ sont dans un même plan vertical, et l'équation (2) représente ce plan vertical et le plan horizontal passant par le point de rencontre des deux droites.

Ecartons ce cas particulier ; l'équation (2) représente un paraboloïde, et les deux systèmes de génératrices sont définis par les équations

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \beta X - \alpha Y = \lambda[X(b - b_1) - Y(a - a_1)], \\ 2Z = -\frac{\gamma}{\lambda}, \end{cases}$$

et

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \beta X - \alpha Y = \lambda'\gamma, \\ 2Z = -\frac{1}{\lambda'}[X(b - b_1) - Y(a - a_1)]. \end{cases}$$

Pour déterminer le sommet de ce paraboloïde, nous allons chercher les équations de l'axe. Cette droite est parallèle à l'intersection des plans directeurs $Z = 0$, $\beta X - \alpha Y = 0$ ; ses paramètres directeurs sont $\alpha$, $\beta$, 0. Un plan perpendiculaire à cette droite a pour équation $\alpha X + \beta Y = 0$, et l'axe est le diamètre conjugué de la direction de ce plan. Il en résulte que les équations de l'axe sont

$$\frac{f'_x}{\alpha} = \frac{f'_y}{\beta}, \qquad f'_z = 0,$$

ou

$$(3) \qquad \frac{2\beta Z + \gamma(b - b_1)}{\alpha} = \frac{-2\alpha Z - \gamma(a - a_1)}{\beta},$$

$$(4) \qquad \beta X - \alpha Y = 0.$$

Les coordonnées du sommet sont les solutions communes aux équations (2), (3) et (4). En tenant compte de l'équation (4), l'équation (2) se réduit à $X(b - b_1) - Y(a - a_1) = 0$, et comme par hypothèse $\alpha$ et $\beta$ ne sont pas proportionnels à $a - a_1$ et $b - b_1$, cette dernière équation jointe à (4) nous donne $X = 0$, $Y = 0$. D'autre part, l'équation (3) donne la valeur de Z

$$Z = -\frac{\gamma[\alpha(a - a_1) + \beta(b - b_1)]}{2(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Il en résulte que les coordonnées du sommet sont par rapport au deuxième système d'axes

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -\frac{\gamma[\alpha(a - a_1) + \beta(b - b_1)]}{2(\alpha^2 + \beta^2)},$$

et par rapport au premier

$$X = \frac{a + a_1}{2}, \qquad Y = \frac{b + b_1}{2}, \qquad Z = c - \frac{\gamma[\alpha(a - a_1) + \beta(b - b_1)]}{2(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

3. Si dans les équations (1) on remplace les lettres par les valeurs numériques données, on a

$$x' = -\frac{g(2\mu - \mu_1\sqrt{3})}{8(\mu + \mu_1)}t^2, \qquad y' = \frac{2\mu_1}{\mu + \mu_1}, \qquad z' = 1 - \frac{g(2\mu + \mu_1)}{8(\mu + \mu_1)}t^2.$$

Pour que le centre de gravité $G(x', y', z')$ décrive une droite verticale, il faut que $x'$ soit indépendant de $t$, ce qui donne la condition

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

nous avons alors

$$x' = 0, \qquad y' = \frac{4}{2+\sqrt{3}}, \qquad z' = 1 - \frac{g(\sqrt{3}+1)}{4(2+\sqrt{3})}t^2.$$

Ces formules montrent que le point G décrit une parallèle à $Oz$ située dans le plan des $yz$. Ce point rencontrera $Oy$ quand sa cote $z'$ sera nulle, c'est-à-dire quand on aura

$$(5) \qquad 1 - \frac{g(\sqrt{3}+1)}{4(2+\sqrt{3})}t^2 = 0.$$

ou

$$t = \sqrt{\frac{4(\sqrt{3}+2)}{9{,}8(\sqrt{3}+1)}} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{3}-1)}{9{,}8}} = 0^s{,}746.$$

La vitesse $v$ à cet instant est donnée par la formule

$$v = \frac{dz'}{dt} = -\frac{g(\sqrt{3}-1)}{2(2+\sqrt{3})}t,$$

ou, en utilisant la relation (5),

$$|v| = \frac{2}{t} = \frac{2}{0{,}746} = 2^m{,}678.$$

J. HAAG, à Pont-à-Mousson.

Bonnes solutions par MM. R. Javelot, à Givet ; H. Lefèvre ; M. Treillou.

---

## Géométrie descriptive.

**1225.** — *Un tronc de cône de révolution a son axe VS vertical. Le solide compris entre ses deux bases d'd' et e'f' est évidé en forme de paraboloïde de révolution qui a le même axe que le cône, et dont la parabole méridienne est a'b'c'. La génératrice d'e' du tronc de cône est parallèle a la tangente en c' à la parabole.*

*Ces conditions et les cotes inscrites en millimètres sur le croquis suffisent pour déterminer les données. On suppose que ce solide creux est coupé par le plan méridien de front dsd, et que la moitié située en arrière subsiste seule.*

*Cela posé, on admet que le solide restant est éclairé par des rayons lumineux parallèles entre eux, et à la direction R, R', des projections de l'une des diagonales d'un cube dont deux faces sont parallèles aux plans de projection.*

*On demande :*

*1° de déterminer les ombres portées dans l'intérieur du paraboloïde : 1° par le demi-cercle de base supérieure ac, a'c' ; 2° par l'arc de parabole a'b' ;*

*2° de tracer les ombres portées par le solide sur un mur de front supposé indéfini, et situé à 103 millimètres en arrière de l'axe.*

*On emploiera les traits noirs pour tracer les parties vues ; les points ronds noirs pour les parties cachées ; les traits rouges pour les constructions relatives aux points remarquables qu'on désignera par m, $m_1$..., etc., et aux tangentes qu'on désignera par les lettres t, $t_1$,..., etc. Les parties dans l'ombre seront couvertes par des hachures.*

La tangente à la parabole donnée au point $a'$ est $a't'$ coupant l'axe $b'i'$ au point $t'$ tel que $b'$ est le milieu de $t'i'$ ; cette tangente rencontre en $u'$ la tangente au sommet $b'$ et $u'v'$, perpendiculaire à $a't'$, donne le foyer $v'$ et un point $w'$ de la directrice. Les éléments de la courbe permettent de la construire.

On en déduit le tronc de cône et le solide creux qui reste en arrière du plan méridien de front.

*Ombre portée à l'intérieur du paraboloïde par le demi-cercle de base supérieure ac, a'c'.* — Les rayons lumineux, parallèles à R, R', s'appuyant sur le demi-cercle $ac$, $a'c'$, forment une surface cylindrique qui a ce demi-cercle en commun avec le paraboloïde et par conséquent le coupe suivant une seconde courbe plane qui

est la limite de l'ombre cherchée. Cette courbe, section plane du paraboloïde, est une ellipse dont la projection horizontale est un cercle ; nous n'en conserverons que l'arc utile, c'est-à-dire, la partie qui se trouve sur la portion donnée de paraboloïde.

Pour l'obtenir nous avons amené les rayons lumineux à être de front en $R_1, R'_1$ ; alors le rayon lumineux de $a, a'$ rencontre la parabole méridienne de front au point $j, j'$, ce qui donne un point $j$ du cercle en projection horizontale. D'autre part les deux surfaces sont bitangentes aux points communs aux deux courbes planes ; en chacun de ces points le plan tangent au paraboloïde, qui est aussi tangent au cylindre, est parallèle à $R_1, R'_1$. Ce plan tangent a donc son point de contact sur la courbe de contact du paraboloïde et du cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à $R_1, R'_1$ ; le plan P de cette courbe de contact est le plan diamétral conjugué de cette direction dans le paraboloïde. Par suite il est vertical, et même de profil puisque $R_1 R'_1$ est de front ; nous l'avons en $h'k'$, $h'$ étant le point de contact de la tangente parallèle à $R'_1$. Le point $k, k'$ est un point commun aux deux courbes planes ; la seconde courbe plane a son plan de bout en $k'j'$ et $k$ est un second point du cercle en projection horizontale ; ce cercle, qui est d'ailleurs égal au cercle $ac, a'c'$, est alors défini par les deux points $k$ et $j$ et a pour centre $\omega_1$. La rotation inverse de celle effectuée précédemment amène le centre de ce cercle en $\omega$ qui est le centre cherché de la projection horizontale de la seconde courbe plane commune au paraboloïde et au cylindre des rayons lumineux ; elle amène le point $k, k'$ en $m_2, m'_2$.

De la demi-circonférence $ac, a'c'$, seul l'arc $am_2, a'm'_2$ portera ombre à l'intérieur du paraboloïde ; le point $a, a'$ rencontre la surface au point $m_1, m'_1$ et l'ombre portée est limitée par l'arc $m_1m_2, m'_1m'_2$. On en aurait un point quelconque en prenant sur $am_2, a'm'_2$ un point quelconque, en menant par ce point la parallèle à R, R' et prenant son point d'intersection avec le paraboloïde ; la projection horizontale de ce point est sur le cercle $\omega$ et on en déduit immédiatement sa projection verticale qui sera un point de l'arc d'ellipse $m'_1m'_2$.

La tangente au point $m_1, m'_1$ a sa projection horizontale $m_1t_1$ tangente en $m_1$ au cercle $\omega$ ; sa projection verticale est $a'm'_1t'_1$, génératrice de contour apparent vertical du cylindre.

La tangente au point $m_2, m'_2$ a été obtenue à l'aide de sa projection horizontale $m_2t_2$, tangente en $m_2$ au cercle $\omega$. Cette tangente, située dans le plan de l'ellipse, rencontre la droite $zm_1, z'm'_1$ de ce plan au point $t_2, t'_2$, qui donne $t'_2$ sur $z'm'_1$, d'où la tangente $m_2t_2, m'_2t'_2$.

Le même procédé servirait à obtenir la tangente en un point quelconque de l'ellipse.

*Ombre portée dans l'intérieur du paraboloïde par l'arc de parabole $a'b'$.* — Les rayons lumineux, parallèles à R, R', s'appuyant sur la parabole méridienne $abc, a'b'c'$, forment une surface cylindrique qui a cette parabole commune avec le paraboloïde et par conséquent le coupe suivant une seconde courbe plane, dont l'arc utile est la limite de l'ombre cherchée. Nous en avons déjà un point $m_1, m'_1$.

Ce cylindre et le paraboloïde sont bitangents et leurs points de contact sont les points communs aux deux courbes planes qui constituent leur intersection. Or ces points communs, points de contact du paraboloïde et des plans tangents parallèles à R, R', sont dans le plan diamétral conjugué des cordes parallèles à R, R'. Ce plan est vertical et passe par $m_3, m'_3$, la tangente en $m'_3$ étant parallèle à R' ; il coupe le paraboloïde suivant une parabole qui rencontre la parabole méridienne en $m_3, m'_3$ et en un second point rejeté à l'infini sur la verticale de $m_3, m'_3$. Donc le plan de la seconde courbe plane commune au cylindre et au paraboloïde est vertical ; comme de plus $m'_1$ est sur la ligne de rappel de $m'_3$, le plan de cette seconde courbe plane est le plan de profil $m'_1m'_3$.

L'intersection du cylindre et du paraboloïde est donc une courbe projetée suivant les deux portions de droites $m_3m_1, m'_3m'_1$.

*Ombres portées sur le mur de front donné.* — Soit $xy$ la trace horizontale du mur donné.

Menons au cône les plans tangents parallèles à R, R' ; la génératrice de contact $gg_1, g'g'_1$ est la limite de l'ombre propre sur le demi-tronc de cône. Son ombre sur le mur est $\gamma'\gamma'_1$.

La portion du cercle supérieur $gid$ produit une ombre elliptique $\gamma'\lambda'\delta'$.

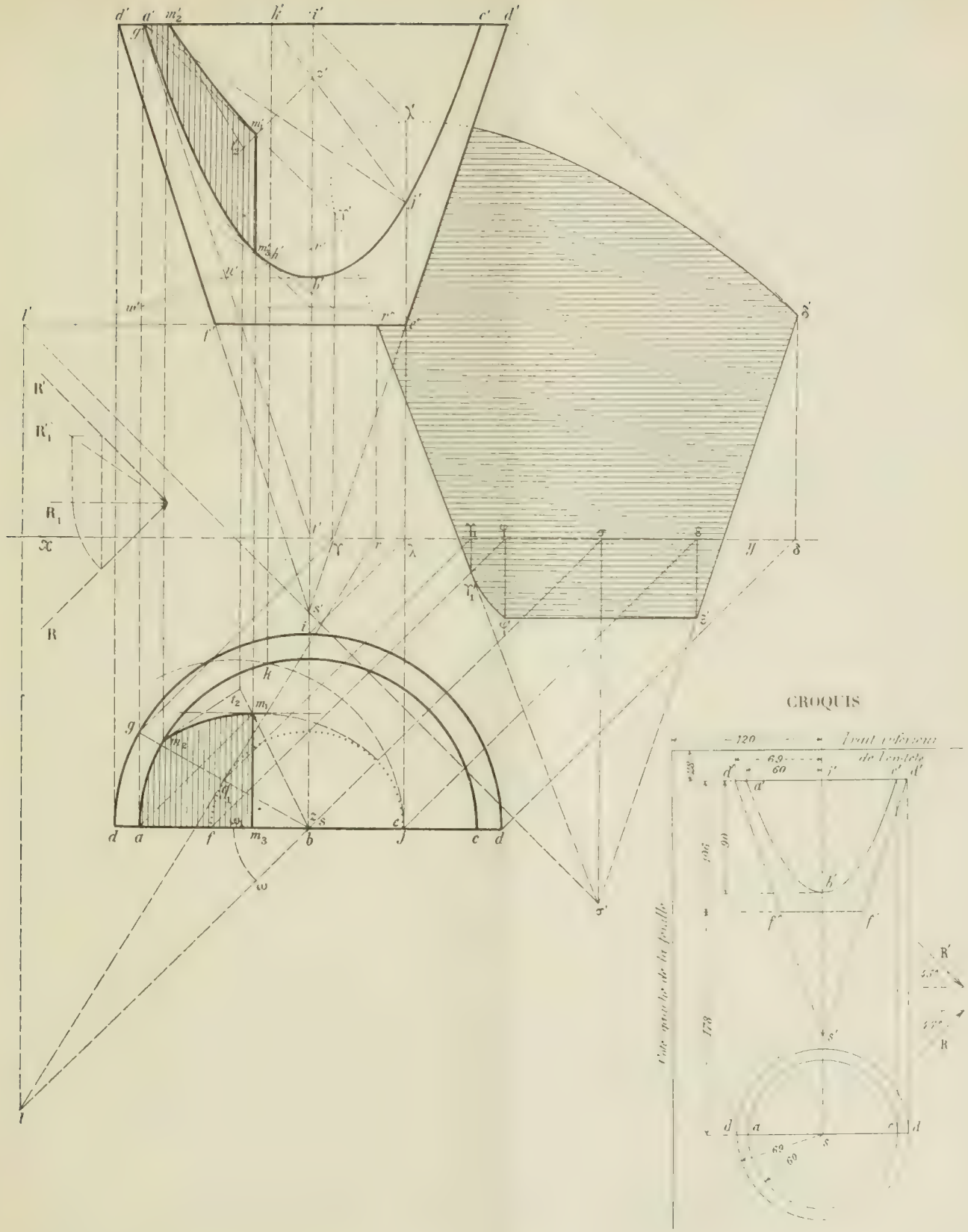
La génératrice $ed, e'd'$ a pour ombre $\varepsilon'\delta'$ ; l'arc de cercle inférieur $fg_1$ donne l'arc d'ellipse $\varphi'\gamma'$, et enfin le diamètre $ef$ du cercle inférieur a comme ombre $\varepsilon'\varphi'$.

Aux points $\delta'$ et $\varphi'$ la tangente est parallèle à R' ; au point $\gamma'$ elle est $\gamma'\gamma'_1$ et enfin au point $\lambda'$ elle est parallèle à $xy$.

*Remarque.* — Nous avons dit que la projection horizontale de l'intersection du paraboloïde et du plan de bout $k'j'$ était un cercle donné égal au cercle $ac, a'c'$.

En effet, prenons pour axe des $z$ la verticale du sommet $b, b'$ du paraboloïde, pour axe des $y$ la droite de bout de ce point et pour axe des $x$ l'horizontale de front passant par ce sommet. L'équation du paraboloïde est alors

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0.$$


CROQUIS
Trait référence de la tête
Côté opposé de la feuille
R'
R
R'1
R1
120
69
60
173
69
60

Si $\varphi$ est l'angle que fait $R_1'$ avec l'axe des $x$, l'équation du cylindre qui a pour directrice le cercle $ac$, $a'c'$ dont la distance à $b$, $b'$ est $d$ et dont les génératrices sont parallèles à $R_1'$ sera :

$$(x - (z - d)\operatorname{cotg}\varphi)^2 + y^2 - 2pd = 0.$$

Si de cette équation nous retranchons la première, il vient

$$x^2 + (z - d)^2\operatorname{cotg}^2\varphi - 2x(z - d)\operatorname{cotg}\varphi + y^2 - 2pd - x^2 - y^2 + 2pz = 0$$

ou

$$2p(z - d) + (z - d)^2\operatorname{cotg}^2\varphi - 2x(z - d)\operatorname{cotg}\varphi = 0$$

qui se décompose en deux

$$\begin{cases} z - d = 0 \\ 2p + (z - d)\operatorname{cotg}^2\varphi - 2x\operatorname{cotg}\varphi = 0. \end{cases}$$

Pour avoir la projection horizontale de la section du paraboloïde et de ce second plan nous éliminons $z$.

On a

$$z = \frac{2x\operatorname{cotg}\varphi + d\operatorname{cotg}^2\varphi - 2p}{\operatorname{cotg}^2\varphi},$$

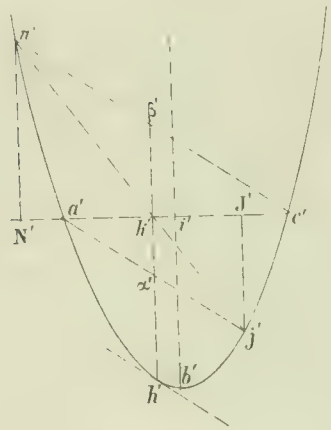


Fig. 1.

d'où

$$x^2 + y^2 - 2p\,\frac{2x\operatorname{cotg}\varphi + d\operatorname{cotg}^2\varphi - 2p}{\operatorname{cotg}^2\varphi} = 0$$

ou

$$\left(x - \frac{2p}{\operatorname{cotg}\varphi}\right)^2 + y^2 - 2pd = 0,$$

cercle de rayon $\sqrt{2pd}$; or le cercle horizontal $ac$, $a'c'$ situé dans le plan $z = d$ a pour équations $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2pd = 0 \\ z = d, \end{cases}$ son rayon est $\sqrt{2pd}$.

Ces deux cercles sont donc égaux.

On aurait pu voir autrement cette propriété, les plans des deux sections du paraboloïde (*fig* 1) sont les plans de bout $a'c'$ et $j'k'n'$ et les droites $a'j'$ et $n'c'$, parallèles à $R_1'$ sont parallèles à la tangente en $k'$ à la parabole, en sorte que $k'k'$, perpendiculaire à $a'c'$, passe par les milieux $\alpha'$ et $\beta'$ de $a'j'$ et de $c'n'$. La section par le plan $j'n'$ est un cercle de diamètre J'N'. Or $J'N' = k'J' + k'N'$ et comme $k'J' = k'a'$ et $kN' = k'c'$, il vient $J'N' = k'a' + k'c' = a'c'$. Les diamètres des deux cercles sont égaux; ces deux cercles sont égaux.

N. C.

---

## CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1903).

### Mathématiques.

Solution par **M. Jean Level** (prix d'honneur).

**1221**. — *On donne une sphère* $\Sigma$ *de centre* P *et un paraboloïde hyperbolique* $\Pi$ *dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est*

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2(x - h) = 0$$

*avec*

$$h = -\frac{p - q}{4}.$$

*Par le point* P *on mène un plan* Q *perpendiculaire à une génératrice rectiligne* G *du paraboloïde* $\Pi$ *et rencontrant cette droite au point* $g$.

*Soit* $\Gamma$ *le cercle situé dans le plan* Q *ayant pour centre le point* $g$ *et coupant à angle droit la sphère* $\Sigma$.

1° *Trouver l'équation de la surface* S *engendrée par le cercle* $\Gamma$ *quand la droite* G *décrit le paraboloïde* $\Pi$.

2° *L'équation de cette surface est de la forme*

$$(x^2 + y^2 + z^2)x + Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

*les coefficients* A, A', A'' *étant liés par une relation.*

3° *Trouver toutes les droites qui peuvent être placées sur la surface* S.

4° *Montrer que la surface* S *admet dix familles de sections circulaires ; les plans des cercles d'une même famille se coupent suivant une même droite.*

**1.** L'équation du paraboloïde peut s'écrire

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2(x - h) :$$

Dès lors, on peut remplacer cette équation par

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{q}} = 2\lambda, \\[2ex] \dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{q}} = \dfrac{(x - h)}{\lambda}. \end{cases}$$

En donnant à $\lambda$ une valeur fixe on obtient ainsi les équations d'une génératrice d'un système du paraboloïde. On aurait celles de l'autre système en changeant $\sqrt{q}$ en $-\sqrt{q}$.

Le centre de la sphère $\Sigma$ ayant pour coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$, son équation sera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + d = 0.$$

Menons par ce centre le plan perpendiculaire à la génératrice (1) ; pour cela cherchons les paramètres directeurs de cette génératrice ou plutôt de la parallèle à l'origine. Nous avons à résoudre les deux équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 0,$$

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{x}{\lambda}.$$

Un point de cette droite est, par exemple, le point de coordonnées

$$x = 2\lambda, \qquad y = \sqrt{p}, \qquad z = \sqrt{q} :$$

alors le plan Q a pour équation

$$2\lambda(x - x_0) + \sqrt{p}(y - y_0) + \sqrt{q}(z - z_0) = 0.$$

On pourra toujours mener une sphère ayant pour centre un point de la génératrice (1) et passant par le cercle cherché. La sphère $\Sigma$ ayant son centre dans le plan Q, sera alors orthogonale à cette nouvelle sphère. Prenons sur la génératrice (1) le point $x = h$, $y = \lambda\sqrt{p}$, $z = -\lambda\sqrt{q}$ ; alors l'équation de la nouvelle sphère est de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2\lambda\sqrt{p}y + 2\lambda\sqrt{q}z + \delta = 0.$$

Écrivons qu'elle est orthogonale à $\Sigma$ ; nous aurons la relation

$$2(hx_0 + \lambda\sqrt{p}.y_0 - \lambda\sqrt{q}z_0) - d - \delta = 0 ; \qquad \text{d'où } \delta,$$

$$\delta = 2(hx_0 + \lambda\sqrt{p}y_0 - \lambda\sqrt{q}z_0) - d.$$

Les équations du cercle $\Gamma$ sont alors

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2h(x - x_0) - 2\lambda\sqrt{p}(y - y_0) + 2\lambda\sqrt{q}(z - z_0) - d = 0,$$

$$2\lambda(x - x_0) + \sqrt{p}(y - y_0) + \sqrt{q}(z - z_0) = 0.$$

Pour avoir la surface, il suffit d'éliminer $\lambda$ entre ces deux équations. Il vient alors

$$2[x^2 + y^2 + z^2 - 2h(x - x_0) - d](x - x_0) + 2[\sqrt{p}(y - y_0) - \sqrt{q}(z - z_0)][\sqrt{p}(y - y_0) + \sqrt{q}(z - z_0)] = 0,$$

ou (2) $$[x^2 + y^2 + z^2 - 2h(x - x_0) - d](x - x_0) + p(y - y_0)^2 - q(z - z_0)^2 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(2') \quad \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)x - x^2(2h + x_0) - y^2(x_0 - p) - z^2(x_0 + q) + x(4hx_0 - d) - 2py_0y + 2qz_0z \\ \qquad\qquad - (2hx_0 - d)x_0 + py_0^2 - qz_0^2 = 0. \end{cases}$$

Si on veut considérer les génératrices du deuxième système, le résultat s'obtiendra en changeant dans le précédent $\sqrt{q}$ en $-\sqrt{q}$ ;

On trouve donc la même surface.

Ces deux générations de la surface mettent en évidence deux séries de cercles de la surface. Considérons le plan de l'un des cercles d'une série,

$$2\lambda(x - x_0) + \sqrt{p}(y - y_0) + \sqrt{q}(z - z_0) = 0,$$

ce plan passe continuellement par la droite

$$x = x_0, \qquad \sqrt{p}(y - y_0) + \sqrt{q}(z - z_0) = 0;$$

cette droite se trouve donc elle-même sur la surface, comme le montre au surplus l'équation (2).

On a donc ainsi deux droites de la surface.

2. On voit immédiatement que l'équation (2') est de la forme demandée : on a

$$A = -(2h + x_0), \qquad A' = -(x_0 - p), \qquad A'' = -(x_0 + q),$$

et, par suite

$$2A - A' - A'' = -4h - p + q = 0.$$

Cherchons alors de combien de façons on peut mettre l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)x + Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

sous la forme (2'). Ces deux formes dépendent en effet de 7 paramètres toutes deux. Pour cela, identifions, nous aurons

$$A = -2h - x_0, \qquad C = 2hx_0 - \frac{d}{2},$$

$$A' = -x_0 + p, \qquad C' = -py_0,$$

$$A'' = -x_0 - q, \qquad C'' = qz_0,$$

$$D = -(2hx_0 - d)x_0 + py_0^2 - qz_0^2.$$

Des premières équations, on tire

$$h = -\frac{A + x_0}{2}, \qquad p = A' + x_0, \qquad q = -(A'' + x_0),$$

$$d = -2C + 4hx_0 = -2C - 2x_0(A + x_0).$$

$$y_0 = -\frac{C'}{p} = -\frac{C'}{A' + x_0}, \qquad z_0 = \frac{C''}{q} = -\frac{C''}{A'' + x_0}.$$

La dernière devient alors

$$D = [x_0(A + x_0) - 2C - 2x_0(A + x_0)]x_0 + \frac{C'^2}{A' + x_0} + \frac{C''^2}{A'' + x_0}.$$

ou (3)

$$x_0^2(A + x_0) + 2Cx_0 + D - \frac{C'^2}{A' + x_0} - \frac{C''^2}{A'' + x_0} = 0.$$

En chassant les dénominateurs, on a une équation du 5e degré, qui donne cinq valeurs pour $x_0$ ; à chacune de ces valeurs correspond un système de valeurs pour $h$, $p$, $q$, $d$, $y_0$, $z_0$.

Donc il y a 5 manières d'engendrer la surface de la façon précédente. Cherchons à quelles conditions, pour une valeur de $x_0$, on obtient une sphère $\Sigma$ de rayon nul.

Le rayon de cette sphère est donné par $R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - d$,

ou

$$R^2 = x_0^2 + \frac{C'^2}{(x_0 + A')^2} + \frac{C''^2}{(x_0 + A'')^2} + 2C + 2x_0(A + x_0).$$

Donc, quand ce rayon sera nul, on a

(4)

$$x_0^2 + 2x_0(A + x_0) + 2C + \frac{C'^2}{(A' + x_0)^2} + \frac{C''^2}{(A'' + x_0)^2} = 0$$

Alors la dérivée du premier membre de l'équation s'annule aussi ; il en résulte que l'équation du 5e degré en $x_0$ admet cette valeur de $x_0$ pour racine double.

On a ainsi mis en évidence 10 droites de la surface et 10 familles de cercles qui sont les droites et les cercles trouvés, comme nous l'avons montré dans le paragraphe (1), pour les diverses valeurs de $x_0$, etc.

3. Cherchons les droites de la surface. On peut les diviser en deux catégories, les droites parallèles au plan $x = 0$, et les droites parallèles aux génératrices du cône isotrope.

Pour avoir les droites parallèles au plan $x = 0$, coupons par le plan $x = x_0$. On trouve une conique
$$y^2(x_0 + A') + z^2(x_0 + A'') + 2C'y + 2C''z + x_0^2 + Ax_0 - 2Cx_0 + D = 0.$$

Cherchons pour quelles valeurs de $x_0$ elle devient un couple de droites. Nous avons
$$\begin{vmatrix} x_0 + A' & 0 & C' \\ 0 & x_0 + A'' & C'' \\ C' & C'' & x_0^2 + Ax_0 + 2Cx_0 + D \end{vmatrix} = 0$$
ou
$$(x_0 + A')(x_0 + A'')(x_0^2 + Ax_0 + 2Cx_0 + D) - C'^2(x_0 + A'') - C''^2(x_0 + A') = 0,$$
équation identique à l'équation (3).

On a donc 10 droites parallèles au plan $x = 0$.

La droite à l'infini de ce plan en forme une 11e.

La surface étant du 3e degré, il doit en rester 16 qui seront alors des droites isotropes. On pourrait montrer directement ces droites.

Revenons à la génération de la surface et cherchons quand le cercle générateur devient un couple de droites isotropes.

Pour cela, il faut et il suffit que son centre soit sur la sphère $\Sigma$, c'est-à-dire que la génératrice G soit tangente à la sphère $\Sigma$.

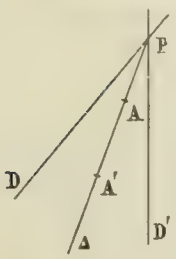
Or il y a 4 génératrices de chaque système du paraboloïde tangentes à la sphère. On trouve donc, en employant les génératrices du premier système, 4 couples de droites isotropes, autant avec les génératrices du deuxième système ; en tout 16 droites. Démontrons alors qu'il y a 4 génératrices de chaque système du paraboloïde tangentes à la sphère ; pour cela cherchons la distance du centre de cette sphère à la génératrice. Considérons une des génératrices
$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\lambda, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{x - h}{\lambda}.$$

Nous avons vu qu'elle passe par le point
$$x = h, \qquad y = \lambda\sqrt{p}, \qquad z = -\lambda\sqrt{q}$$
et a pour paramètres directeurs $2\lambda$, $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ ;
donc, la distance du point $x_0$, $y_0$, $z_0$ à cette droite est
$$(x_0 - h)^2 + (y_0 - \lambda\sqrt{p})^2 + (z_0 + \lambda\sqrt{q})^2 - \frac{[2\lambda(x_0 - h) + \sqrt{p}(y_0 - \lambda\sqrt{p}) - \sqrt{q}(z_0 + \lambda\sqrt{q})]^2}{4\lambda^2 + p + q}.$$

En égalant à une quantité connue $R^2$, on a une équation qui sera en général du quatrième degré en $\lambda$.

4. Comme il y a 10 droites parallèles au plan $x = 0$, un plan passant par une de ces droites coupera la surface encore suivant un cercle. On a donc bien 10 familles de cercles dont les plans passent par une même droite.

Considérons maintenant deux cercles de deux familles correspondant au même paraboloïde. Démontrons que ces deux cercles se coupent en deux points.




Considérons les plans de ces deux cercles. Ils contiennent les droites D et D′ qui se coupent au centre P de la sphère $\Sigma$.

Donc leur intersection passe par le point P. Soit $\Delta$. Alors $\Delta$ rencontre la surface en trois points P, A, A′, si elle rencontre chacun des cercles en deux points, ces cercles ne passent pas par le point P, centre de la sphère $\Sigma$, donc ils passent par A et A′. Donc ils ont deux points communs et sont situés sur une même sphère. On met ainsi en évidence cinq familles de sphères, les sphères de chaque famille dépendant de deux paramètres, qui coupent la surface suivant deux cercles.

Le reste de l'intersection est formé par le cercle imaginaire à l'infini. Considérons le centre d'une de ces sphères.

Son centre se trouve sur la perpendiculaire, au centre du premier cercle, c'est-à-dire sur une génératrice du paraboloïde. Il se trouve donc sur le paraboloïde.

Il est facile de voir qu'un point quelconque du paraboloïde est centre d'une de ces sphères. (Il suffit de prendre les cercles correspondant aux deux génératrices passant par ce point).

Donc, toutes les sphères d'une même famille ont leurs centres sur un paraboloïde. On peut achever de les définir en remarquant qu'elles sont toutes orthogonales à une même sphère.

Considérons en particulier le cas où la sphère $\Sigma$ a un rayon nul. Alors tous les cercles passent par son centre P. Prenons la figure inverse par rapport à ce point.

Les cercles deviennent des droites. On a donc une surface biréglée, c'est-à-dire une quadrique qui passe d'ailleurs par le point P.

Dans ce cas la surface considérée est la surface inverse d'une quadrique par rapport à un point P de cette quadrique.

Aux génératrices de la quadrique correspondent les cercles correspondant à la racine double en $x_0$; aux génératrices passant par P, les deux droites de la surface passant par P.

Aux trois couples de plans cycliques de la quadrique correspondent les trois autres couples de familles de cercles de la surface : aux six cercles passant par le point P, les six autres droites parallèles au plan $x = 0$.

M. J. Haag a envoyé une solution complète de la question et M. R. Bouvaist des remarques géométriques.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1290.** — Une circonférence coupe une hypocycloïde à trois rebroussements en six points. Si les tangentes en trois de ces points concourent en un point M, démontrer que les tangentes aux trois autres points concourent en un autre point M′ et trouver la relation qui existe entre les points M et M′.

L. Bickart.

**1291.** — Par les trois points de retroussement d'une hypocycloïde triangulaire et par son centre on fait passer une conique quelconque qui rencontre la courbe en deux autres points M′ et M″. Démontrer que la droite M′M″ est tangente à l'hypocycloïde.

L. Bickart.

**1292.** — L'objectif d'un microscope a $7^{mm}$ de diamètre et environ $1^{cm}$ de longueur. L'oculaire est un oculaire d'Huyghens de $3^{cm}$ de distance focale, $4^{cm}$ de longueur et $2^{cm}$ de diamètre au verre de champ. La longueur totale de l'instrument est de $22^{cm}$ environ.

Ayant mis ce microscope au point sur un micromètre objectif au centième de millimètre, on trouve, avec la chambre claire, que 20 divisions de l'image occupent une longueur de $50^{mm}$ à une distance de $32^{cm}$. Calculer, autant que le permettent les données:

1° La puissance de l'instrument;

2° Son grossissement;

3° La distance focale de l'objectif;

4° Le champ linéaire;

5° La clarté, en attribuant à la pupille de l'observateur un diamètre de $4^{mm}$;

6° La latitude d'accommodation, en supposant le punctum proximum à $15^{cm}$;

7° Le tirage maximum à donner à l'instrument, après qu'il a servi à une observation directe, pour mettre l'image au point sur une plaque photographique placée à $15^{cm}$ de l'oculaire.

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1219.** — *On considère un cercle fixe et sur ce cercle deux points A et B en lesquels les tangentes $a$ et $b$ sont rectangulaires.*

1° *Trouver l'équation générale des coniques osculatrices au cercle donné en A et tangentes en outre à la droite $b$. Choisir le paramètre variable de façon que l'équation soit rationnelle par rapport à ce paramètre et trouver le lieu des centres de ces coniques.*

2° *Chacune de ces coniques coupe le cercle en un nouveau point M et touche la tangente $b$ en un point N. Lieu du point de rencontre de la normale à la conique en N avec la tangente au cercle en M. Séparer sur ce lieu les arcs qui correspondent à des ellipses de ceux qui correspondent à des hyperboles.*

3° *Lieu des foyers de ces coniques. Construire ce lieu.*

Prenons le point A pour origine, la tangente en A pour axe des $x$ et le diamètre perpendiculaire pour axe des $y$. L'équation du cercle sera

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0,$$

et celle de la droite $b$, $x - R = 0$.

1. Cela posé, chacune des coniques de l'énoncé coupe le cercle en trois points confondus avec le point A et en un autre point M ; par conséquent, les trois systèmes de sécantes communes se réduisent à un seul formé par la tangente en A et par une droite variable passant par ce point. L'équation générale de ces coniques est donc

$$x^2 + y^2 - 2Ry + 2y(\lambda x + \mu y) = 0 ;$$

il faut écrire maintenant que cette conique coupe la droite $x = R$ en deux points confondus, c'est-à-dire que l'équation

$$(1 + 2\mu)y^2 + 2R(\lambda - 1)y + R^2 = 0$$

a une racine double. Ceci donne la condition

$$R^2(\lambda - 1)^2 - R^2(1 + 2\mu) = 0 ;$$

d'où

$$1 + 2\mu = (\lambda - 1)^2.$$

Par suite, l'équation générale des coniques du système indiqué est

$$(1) \qquad x^2 + (\lambda - 1)^2 y^2 + 2\lambda xy - 2Ry = 0 ;$$

elle est rationnelle par rapport à $\lambda$, elle répond donc bien aux conditions imposées.

Nous aurons le lieu des centres en éliminant $\lambda$ entre les deux équations que l'on obtient en annulant les dérivés partielles par rapport à $x$ et à $y$, c'est-à-dire entre

$$x + \lambda y = 0$$

et

$$(\lambda - 1)^2 y + \lambda x - R = 0.$$

La première donne $\lambda = -\dfrac{x}{y}$ et la seconde devient, après suppression de la solution $y = 0$,

$$(x + y)^2 - x^2 - Ry = 0.$$

La solution $y = 0$ correspond à la conique particulière du faisceau, $y^2 = 0$, que l'on obtient en faisant $\lambda = \infty$ : c'est un lieu exceptionnel. Le véritable lieu des centres est donc représenté par l'équation (2) ; cette équation se décompose en deux : $y = 0$, dont l'origine a déjà été expliquée, et

$$(3) \qquad y + 2x - R = 0,$$

qui représente le véritable lieu ; ce lieu est une droite qui passe au centre du cercle donné et au symétrique de B par rapport à $Ox$.

**2.** L'autre point de rencontre du cercle avec la conique (1) est situé sur la droite $\lambda x + \mu y = 0$ ; comme $\mu = \frac{\lambda^2 - 2\lambda}{2}$, cette droite a pour équation

$$2x + (\lambda - 2)y = 0.$$

Or, comme il est facile de s'en rendre compte, l'équation du cercle peut s'écrire

$$[2x + (\lambda - 2)y]^2 - y[(\lambda^2 - 4\lambda)y + 4(\lambda - 2)x + 8R] = 0;$$

donc la tangente au cercle en M a pour équation

$$(4) \qquad 4(\lambda - 2)x + (\lambda^2 - 4\lambda)y + 8R = 0.$$

D'autre part, si l'on prend dans la conique (1) le diamètre conjugué de la direction $Oy$, on obtient une droite qui rencontre la droite $x - R = 0$ au point N ; cette droite a pour équation $f'_y = 0$ ou

$$(\lambda - 1)^2 y + \lambda x - R = 0.$$

Si l'on y fait $x = R$, et que l'on supprime le facteur $\lambda - 1$, on obtient

$$(5) \qquad (\lambda - 1)y + R = 0,$$

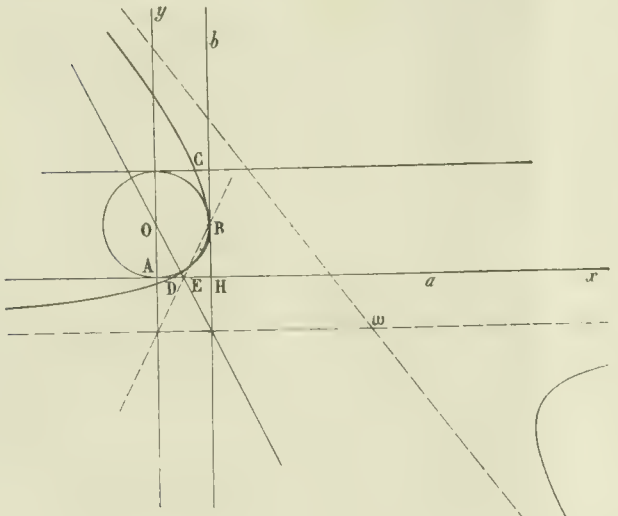
qui donne l'ordonnée du point N et aussi la normale à la conique en ce point. Nous aurons le lieu demandé en éliminant $\lambda$ entre les deux équations (4) et (5). Or l'équation (5) donne $\lambda - 1 = -\frac{R}{y}$, puis, $\lambda - 2 = -\frac{y + R}{y}$ ; en portant cette valeur dans l'équation (4) nous aurons

$$(6) \qquad (y + R - 2x)^2 - 4(x^2 + y^2 - 2Ry) = 0.$$

Cette équation nous montre que le lieu est une conique doublement tangente au cercle aux deux points de rencontre avec la droite

$$y + R - 2x = 0;$$

cette droite passe au point B et au point $x = \frac{R}{2}$, $y = 0$ ; elle est donc très facile à construire. En outre la conique (6) est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux directions $y = 0$ et $4x + 3y = 0$, et dont le centre a pour coordonnées $x = 4R$, $y = -R$. Il est facile dès lors de construire cette courbe et de la placer par rapport aux données.




Pour distinguer maintenant les points fournis par des ellipses de ceux qui proviennent d'hyperboles, il faut d'abord trouver la condition pour que la conique (1) soit une ellipse, puis y remplacer $\lambda$ par $\frac{y - R}{y}$, valeur tirée de l'équation (5). Or pour que la conique (1) soit une ellipse, il faut et il suffit que

$$(\lambda - 1)^2 - \lambda^2 > 0,$$

ou

$$1 - 2\lambda > 0;$$

en y remplaçant $\lambda$ par $\frac{y - R}{y}$, cette condition devient

$$y(2R - y) > 0.$$

Les points qui correspondent à des ellipses sont donc ceux qui sont compris entre les droites $y = 0$ et $y = 2R$, ce sont les points de l'arc CD ; les autres correspondent à des hyperboles.

**3.** Pour obtenir le lieu des foyers, nous formerons l'équation quadratique du faisceau des tangentes

issues d'un point et nous écrirons que ce faisceau se compose de deux droites isotropes, c'est-à-dire que les directions de ces droites sont fournies par une équation de la forme $x^2 + y^2 = 0$. Le faisceau des tangentes issues du point $(\alpha, \beta)$ à la conique $f(x, y) = 0$ a pour équation

$$f(\alpha, \beta)f(x, y) - P^2 = 0,$$

P étant le premier membre de la demi-forme polaire ; donc, dans le cas actuel, les directions des deux tangentes sont fournies par

$$[\alpha^2 + (\lambda - 1)^2\beta^2 + 2\lambda\alpha\beta - 2R\beta][x^2 + (\lambda - 1)^2y^2 + 2\lambda xy] - [x(\alpha + \lambda\beta) + y((\lambda - 1)^2\beta + \lambda\alpha - R)]^2 = 0.$$

En écrivant que les coefficients carrés sont égaux et que le terme en $xy$ a un coefficient nul, nous avons les deux relations suivantes

$$(2\lambda - 1)(\alpha^2 - \beta^2) - 2\lambda R\alpha - 2R\beta + R^2 = 0,$$
$$(2\lambda - 1)\alpha\beta - R\lambda\beta + R\alpha = 0,$$

entre lesquelles il nous reste à éliminer $\lambda$ pour avoir le lieu du foyer $(\alpha, \beta)$. Il revient au même d'éliminer $2\lambda - 1$ et nous avons ainsi

$$(\alpha^2 - \beta^2 - R\alpha\beta - 2\alpha) - (2\alpha\beta - R\beta)(\alpha + 2\beta - R) = 0.$$

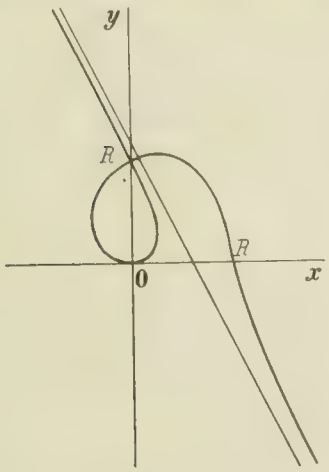
Telle est l'équation du lieu des foyers. Cette équation se simplifie et s'écrit

$$(7) \qquad (2\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) - 2R(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) - R^2\beta = 0.$$

Elle représente une cubique circulaire, passant à l'origine, y admettant comme tangente l'axe des $x$, et ayant pour direction asymptotique réelle la direction

$$2x + y = 0,$$

c'est-à-dire la direction de la droite lieu des centres ; ce résultat était d'ailleurs évident a priori, car le centre de la parabole du faisceau est aussi un foyer.




L'équation de cette cubique peut encore s'écrire

$$\alpha^2(2\alpha + \beta - 2R) + 2\alpha\beta(\beta - R) + \beta(\beta - R)^2 = 0,$$

ou

$$\beta(\alpha + \beta - R)^2 + 2\alpha^2(\alpha - R) = 0 ;$$

ces deux formes montrent que le point $\alpha = 0$, $\beta = R$ est un point double. Ce résultat était encore évident a priori, car le centre du cercle tient lieu de quatre foyers confondus pour le cercle lui-même, qui est une des coniques du faisceau.

Remarquons enfin que la cubique passe aussi au point $\alpha = R$, $\beta = 0$ et que son asymptote a pour équation

$$2\alpha + \beta = \frac{6R}{5}.$$

Toutes ces remarques suffisent amplement pour placer la cubique.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist, E. Sizaire.

Assez bonnes solutions : MM. Dnallor Lecram ; J. Haag, à Nancy ; Blanchot, lycée d'Aurillac.

**Solution géométrique.** — Les coniques du faisceau forment évidemment un faisceau linéaire tangentiel ayant pour conique de base le cercle donné et le couple des points A et H (intersection de $a$ et de $b$).

Le lieu des centres s'en suit immédiatement ainsi que le lieu des foyers : ce dernier s'établira en étudiant la correspondance qui existe entre les tangentes IF et JF issues des points cycliques (cette correspondance est (2, 2), mais la droite de l'infini se correspond à elle-même).

Quant au second lieu, on l'obtient en étudiant la correspondance qui existe entre les tangentes au cercle et les normales à la conique en N ; cette correspondance est (1, 1) ; mais le faisceau des tangentes est du second ordre et l'axe des $x$ se correspond à lui-même.

Autre solution de M. E. Sizaire.

# QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

## ÉCOLE CENTRALE (1903).

### Arithmétique (M. Combette).

**2422.** — $\Delta$ étant le plus grand commun diviseur entre deux nombres A et B, quel est le plus grand commun diviseur entre $A^4$ et $B^4$.

**2423.** — Former les diviseurs des nombres $N = 2^5.3^2.7^3$ ; $N = 3^7.5^4.7^3$. — Nombre de ces diviseurs

**2424.** — Calculer à 1/100 près les quotients $\frac{0,017}{0,00518}$, $\frac{0,0415}{0,00023}$.

**2425.** — Calculer à 1/100 près $\sqrt{0,1}$, $\sqrt{\frac{28}{0,045}}$, $\frac{\sqrt{521}}{0,53}$, $\frac{\sqrt{0,425}}{0,0014}$.

**2426.** — Calculer à 1/10 près les produits $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ ; $\pi e$ ;

à 1/100 près $\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\pi\sqrt{3}$, $\pi\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{\pi}{71}}$ ;
$\sqrt{3-\sqrt{3}}$, $\sqrt{\pi+\sqrt{5}}$ ;

à 1/1000 près $\pi^2$, $\pi^3$, $\pi\sqrt{5}$ ;

à 1/10 000 près $\frac{0,0215}{\sqrt{0,23}}$.

**2427.** — Calculer à 1/100 près $\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$ ; à 1/1000 près $\sqrt[7]{\pi}$, $\sqrt[4]{\pi}$.

### Algèbre (M. Combette).

**2428.** — Résoudre au moyen des déterminants les équations

$$3x - 2y + 4z = 5,$$
$$2x + 5y + 8z = 3,$$
$$4x - 3y - 3z = 1 ;$$

montrer que les valeurs trouvées vérifient le système proposé.

**2429.** — Étudier le système $ax + by + cz = 0$, $a'x + b'y + c'z = 0$, $a''x + b''y + c''z = 0$. Montrer que lorsque $\Delta = 0$, il y a une infinité de solutions et donner la forme de ces solutions.

**2430.** — Condition pour que le polynome $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$ se décompose en un produit de deux polynomes du premier degré. — Conditions pour qu'il se réduise à un carré parfait.

**2431.** — Combien peut-on former avec $p$ lettres $a, b, c, \ldots, l$, de groupes de la forme $a^3bc^4$ ?

**2432.** — Appliquer la formule du binome au développement de $(a+b+c+d)^5$.

**2433.** — Terme en $a^2b^2c^3$ dans $(a+b+c+d)^7$ ; terme en $a^3bc^4d^4$ dans $(a+b+c+d)^{12}$ ; terme en $a^4b^8c^3$ dans $(a+b+c)^{15}$.

**2434.** — Étudier les séries

$$u_n = \frac{\cos nx}{n!}, \qquad u_n = \frac{1}{n^4}, \qquad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^3},$$
$$u_n = \frac{3n-5}{4n^3+1}, \qquad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \qquad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}.$$

**2435.** — On place 10 000 francs à intérêts composés, à 4 °/₀ par an, pendant 3 ans 4 mois 10 jours. Calculer la somme obtenue au bout de ce temps.

**2436** — Dérivées des fonctions suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sqrt[3]{x}$, | $\sin^4 4x^2$, | $\sin^4 2x^5$, | $4\,\mathrm{tg}^5\, 3x^8$, |
| $\arccos 5x^4$, | $\arccos 8x^3$, | $\mathrm{arc\,tg}\, 8x^5$, | $\arccos(27x^3-1)^2$, |
| $L \sin^5 8x^3$, | $L \cos 8x^3$, | $L \cos^4 8x^3$, | $L\, \mathrm{arc\,tg}\, 3x^7$, |
| $(\mathrm{arc}\sin 8x^2)^3$, | $(\mathrm{arc}\sin 8x^5)^3$, | $(\mathrm{arc\,tg}\, 5x^3)^4$, | $\sqrt[3]{7^{2x^2+1}}$, |
| $\sqrt{\sin 3x^4}$, | $\sqrt[3]{\sin^5 4x^3}$, | $\sqrt[4]{\cos 3x^8}$, | $\sqrt[3]{\cos^2 4x^5}$, |

$\sqrt[3]{7\cos^2 5x^4}$, $\sqrt[7]{5\cos^4 3x^2}$, $\sqrt{\operatorname{tg}^4 8x}$, $\sqrt[4]{\operatorname{arc\,tg} 6x^2}$,

$2x^4\cos^4 5x^2$, $(3x^2-1)^{8x^4}.5^3$, $\sin^4 8x^4.\mathrm{L}\cos 4x$, $7^{x^3}\operatorname{tg}^3 8x^2$,

$3^{7x}.\operatorname{tg} 8x^4$, $\sqrt[4]{8^{x^4}-1}.\operatorname{tg} 5x^2$, $7^{(x^2)}.\mathrm{L}(8x^4-1)$, $3^{x^2+1}.\operatorname{arc\,tg} 4x^4$,

$7^{x^2}.\operatorname{arc\,tg} 8x^4$, $\operatorname{arc\sin}^2 x^3+\mathrm{L}\cos 8x^2$, $\operatorname{arc\,tg} 8x^2+3^{x^2}$, $4^{x^4}.\operatorname{arc\sin}(\mathrm{L}x^2)$,

$5^{x^3}.\mathrm{L}(\operatorname{arc\sin} 3x^2)$, $\dfrac{\sin^4 3x^3}{\cos^2 5x^2}$, $\dfrac{\sin^3 4x^2}{3^{x^2}}$, $\dfrac{(x^2-3)}{\sqrt[3]{x^3-1}}$,

$\dfrac{\sqrt[4]{x^3-1}}{\cos x^2}$, $\dfrac{\sqrt[3]{7x^2-1}}{\sin 3x^4}$, $\dfrac{3^{x^2}}{\sqrt{4x-1}}$, $\dfrac{\sin^4 5x^3}{\sqrt{8x^5}}$,

$\dfrac{\cos^3 4x^2}{\sqrt{\operatorname{tg} x^5}}$.

**2437.** — Dérivées successives de $y=\dfrac{5}{x-2}$, $y=\dfrac{Ax+B}{(x-\alpha)(x-\beta)}$.

**2438.** — Dérivées de $(2x)^{2x+1}$, $(4x^2-5x)^n$, $(x^2-2x)^{x^2}$, $(x^3+1)^{x^2}$,
$(3x^2+1)^{x^3}$, $(4x^2+1)^{x^2}$, $(x^2-3)^{x^{2n+1}}$, $4^{x^{n-2}}$, $(3x^2+2x\cos x)^2$, $(\sin x)^{\lg x}$.

**2439.** — Dérivée par rapport à $x$ de la fonction $y$ définie par l'équation

$$\cos^2 y=\sin^3 x.$$

**2440.** — On donne les deux équations $f(x,y,z)=a$, $\varphi(x,y,z)=b$. Calculer les dérivées $y'$, $z'$ des fonctions $y$ et $z$ ainsi définies. Cas où les dérivées seraient indéterminées.

**2441.** — Variations des fonctions

$y=\dfrac{x^3-1}{x+2}$, $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$, $y=\dfrac{(1+x^2)(x-2)}{x(x-1)}$,

$y=\dfrac{x^4+1}{x^4-1}$, $y=\dfrac{1+3\sin x}{1-\cos x}$, $y=\dfrac{\sin^2 x-1}{\sin 3x-1}$,

$y=\dfrac{x^3+1}{2x^2}$, $y=\dfrac{1-x}{x^2(2+x)}$, $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$,

$y=\dfrac{x^2+1}{3x^3-2x+1}$.

**2442.** — Minimum de $4x+5y$ sachant que $x^2y^3=1$.

**2443.** — Limites de

$$\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}\quad\text{pour}\quad x=a,$$

$$\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}\quad\text{pour}\quad x=0,$$

$$(1+\operatorname{tg} x)^{\cot 2x}\quad\text{pour}\quad x=\frac{\pi}{2}.$$

**2444.** — Primitives des fonctions suivantes

$y'=5^x$, $y'=2^x$, $y'=5$,
$y'=\operatorname{tg} x$, $y'=5\operatorname{tg} 7x$, $y'=\operatorname{tg}^2 x$,
$y'=\operatorname{tg}^4 x$, $y'=\operatorname{tg}^4 x$, $y'=\sin^2 x$,
$y'=\cos^2 x$, $y'=\sin^3 x$, $y'=\sin^3 x.\cos^5 x$,
$y'=\dfrac{1}{\sin x}$, $y'=\dfrac{1}{\sin^3 x}$, $y'=\cos 4x.\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,
$y'=\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{5}\right)\times\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $y'=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)\times\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,
$y'=\sin 3x.\cos 5x.\cos 8x$, $y'=\cos 2x\cos 8x.\cos 7x$.

**2445.** — Calculer $y$ sachant que $y''=3y$.

**2446.** — Primitives des fonctions suivantes

$y'=\dfrac{1}{x^2-4}$, $y'=\dfrac{1-3x^2}{3x-x^3}$, $y'=\dfrac{x}{(x^2-1)(x+1)}$,

$y'=\dfrac{x^2}{(x+1)^3}$, $y'=\dfrac{4x}{(x-2)^2}$, $y'=\dfrac{2x+1}{(x-2)^2}$,

$y'=\dfrac{2x+3}{(x-2)^3}$, $y'=\dfrac{2x^3}{(x-1)^4}$, $y'=\dfrac{2}{(x-1)^3}$,

$y'=\dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$, $y'=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2(x-3)}$, $y'=\dfrac{x^3+1}{[(x-1)(x-2)]^2}$,

$y'=\dfrac{1}{x^2+x+1}$, $y'=\dfrac{1}{x^2-x+1}$, $y'=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$,

$y'=\dfrac{4x+1}{x^2+x+1}$, $y'=\dfrac{3x^2+1}{x^2+x+1}$, $y'=\dfrac{3x-4}{x^2+x+2}$,

$y' = \frac{3x}{x^2 - 2x + 6}$, $y' = \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)}$, $y' = \frac{(x-1)^2}{x^2(1+x^2)}$,

$y' = \frac{3x}{1+x^4}$, $y' = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}$, $y' = \frac{8}{\sqrt{3x^2-4}}$,

$y' = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-1}}$, $y' = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+5}}$, $y' = \frac{x-1}{\sqrt{1-4x^2}}$,

$y' = \frac{1-5x}{\sqrt{4-x^2}}$, $y' = \frac{3x+5}{\sqrt{1-4x^2}}$, $y' = \frac{3}{\sqrt{x^2+x+1}}$,

$y' = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+3}}$, $y' = \frac{4x^4}{\sqrt{x^4+5}}$, $y' = \frac{5x}{\sqrt{3x^4-2}}$,

$y' = \frac{3x}{\sqrt{5+2x^4}}$, $y' = \frac{3x}{\sqrt{4x^4+1}}$, $y' = \frac{5x}{\sqrt{3x^4-1}}$.

$y' = \frac{3x}{\sqrt{4-x^4}}$, $y' = \frac{7x}{\sqrt{8-x^4}}$.

**2447.** — Développer $x^4 + 3x^2 - x$ suivant les puissances décroissantes de $x - 2$.

**2448.** — On donne un polynome $f(x)$ sous la forme

$$f(x) \equiv \varphi_1(x^2) + x\varphi_2(x^2).$$

Reste de la division par $x^2 - a^2$.

**2449.** — Démontrer que si l'on a $a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{2}^2 + c = 0$, les coefficients $a$, $b$, $c$ étant des nombres commensurables, ces coefficients sont nuls.

**2450.** — Racine carrée de $i$.

**2451.** — Racines de l'équation $x^3 - 2 = 0$.

**2452.** — Montrer que $x(x+r)(x+2r)(x+3r) + r^4$ est un carré parfait. — En déduire la résolution de l'équation

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = 32.$$

**2453.** — Equation admettant pour racines les cubes des racines d'une équation $f(x) = 0$.

**2454.** — Démontrer que l'équation $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} - 1 = 0$ admet toujours trois racines réelles.

**2255.** — $f(x) = 0$ ayant toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $f(x) + \lambda f'(x) = 0$.

**2456.** — Condition pour que $x^3 + px^2 + q = 0$ ait trois racines réelles.

**2457.** — Appliquer le théorème de Descartes à l'équation $x^4 - 2x^3 - 5 = 0$. Limite supérieure des racines. — Etude graphique de l'équation.

**2458.** — Etudier l'équation $x^4 - x^3 + 1 = 0$. — Voir si la somme des cubes des racines est réelle. — Calculer cette somme et en déduire la somme des quatrièmes puissances.

**2459.** — Racines réelles de $5x^3 - 2x^2 + 1 = 0$. — Equation aux inverses.

**2460.** — Calculer par la méthode de Newton la racine comprise entre 1 et 2 de l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$.

**2461.** — On donne l'équation $x^5 - x^4 + 3 = 0$. — Construire la courbe $y = x^5 - x^4$ et en déduire le nombre des racines réelles de l'équation. — Cas de l'équation $x^5 - x^4 + \lambda = 0$.

**2462.** — Etudier les équations suivantes.

$x^4 + x + 1 = 0$, $x^4 - 4x - 3 = 0$, $x^4 + 2x^3 - 1 = 0$, $x^6 - 2x^3 - 1 = 0$,
$x^4 - 6x + 2 = 0$, $2x^4 - 3x + 4 = 0$, $x^4 + x^3 + x - 1 = 0$, $x^6 - 6x - 1 = 0$.
$x^4 + 2x - 5 = 0$, $x^4 - x^3 - 1 = 0$, $x^5 - x + 1 = 0$,
$x^4 - 2x - 3 = 0$, $x^4 - x^3 + 2 = 0$, $x^5 - x^3 - 1 = 0$,

## Trigonométrie (M. Combette).

**2463.** — Calculer $\sin\frac{a}{3}$ connaissant $\cos a$ ; $\sin\frac{a}{3}$ connaissant $\sin 2a$ ; $\operatorname{tg} 3a$ connaissant $\operatorname{tg} 2a$ ; $\operatorname{tg}\frac{a}{5}$ connaissant $\operatorname{tg} a$.

**2464.** — Transformer en produit les expressions suivantes

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c),$$
$$\cos a + \cos b + \cos c - \cos(a+b+c),$$
$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c.$$

**2465.** — Résoudre les inégalités

$$\sin^2 x < \frac{4\sin x + 1}{\sin x}, \qquad 0 < x < 2\pi,$$

$$\frac{3}{1 - 2\sin x} < \frac{7}{1 - 3\cos x}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2},$$

$$\sqrt{4\sin x + 3} > 2\sin x - 1, \qquad 0 < x < 2\pi,$$

$$\sqrt{3\sin x - 2} < 2\sin x - 1, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}.$$

$$\sqrt{2\cos^2 x - 1} < 3\sin x - 2.$$

**2466.** — Comment développer $\sin x$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x$. — Vérifier que $x - \sin x > 0$ pour $x = 30^\circ$.

**2467.** — Résoudre un triangle connaissant les trois hauteurs.

(*A suivre.*)

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1293.** — Le lieu des foyers des paraboles qui ont un sommet donné et qui passent par un point donné est une cissoïde droite.

**1294.** — On donne la courbe $y^2 = \frac{x^3}{x - a}$; par l'origine des coordonnées on mène deux rayons rectangulaires OM et ON, et l'on demande de trouver :

1° L'enveloppe de la corde MN ;

2° Le lieu du point de rencontre de la droite MN avec la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite ;

3° Le lieu du milieu de MN.

V. Abramescu.

**1295.** — Dans un baromètre exactement cylindrique, le mercure se tient à $l = 10^{cm}$ de l'extrémité supérieure. On y fait passer une goutte d'eau et une bulle d'air, la température étant $t = 8^\circ$. Le mercure descend de $h = 5^{cm}$. On élève la température à $t' = 28^\circ$. De combien, à 1 millimètre près, se déplace encore le mercure ? La goutte d'eau n'est pas entièrement vaporisée, mais on néglige son volume, ainsi que tous les effets dus à la dilatation du mercure ou du verre.

Forces élastiques maxima de la vapeur d'eau : à 8°, $q = 8^{mm}$ ; à 28°, $q' = 28^{mm}$.

Coefficient de dilatation de l'air : $\alpha = \frac{1}{273}$.

## BIBLIOGRAPHIE

**La Mécanique**, exposé historique et critique de son développement, par Ernst Mach, membre de l'Académie impériale des sciences, professeur émérite de l'Université de Vienne, ouvrage traduit sur la quatrième édition allemande par Emile Bertrand, professeur à l'Ecole des Mines du Hainaut et à l'Institut des hautes études de Bruxelles, avec une introduction de Emile Picard, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des sciences de Paris. — Paris, Lib. A. Hermann, 1904.

Le livre dont je vais dire quelques mots aux lecteurs de la Revue et qui est peut-être le plus intéressant

que j'aie lu depuis longtemps, ne ressemble guère aux traités habituels de Mécanique, où leurs auteurs exposent hâtivement, sous une forme plus ou moins claire et dans un ordre plus ou moins logique, les principes essentiels sur lesquels cette science repose, pressés qu'ils sont de parvenir au développement formel de la science et à l'exposé de procédés de calcul utilisés dans les applications.

Je suis convaincu pourtant que tous ceux qui, comme moi, n'ont pas eu le temps ou le courage et la volonté nécessaires pour aborder résolument l'examen des notions fondamentales, tant au point de vue historique qu'au point de vue toujours actuel de la connexité qui existe entre les phénomènes éternels de la nature, ont le plus grand intérêt à lire et à méditer cet ouvrage vraiment exceptionnel. Ils y compléteront leurs connaissances, projetteront la lumière sur bien des points restés obscurs dans l'enseignement artificiel qu'ils ont reçu et parviendront ensuite aisément à grouper les faits qu'ils possèdent en un tout imposant et bien coordonné qui fatiguera moins leur mémoire et plaira davantage à leur entendement. Ils seront ainsi conduits à penser par eux-mêmes aux notions fondamentales de la Mécanique, à les rapprocher les unes des autres et à saisir les relations profondes qui existent entre elles.

L'auteur s'en réfère strictement à l'ordre chronologique et expose les bases fondamentales de la Mécanique dans l'ordre même de leur développement historique. Il nous montre d'abord comment la statique prit naissance dans l'antiquité grecque et fut dotée par Archimède d'un de ses principes essentiels, le principe du levier. Il nous montre ensuite Stevin parvenant au principe du plan incliné, au parallélogramme des forces et s'élevant déjà jusqu'au principe des déplacements virtuels qui devait plus tard, après la belle démonstration de Lagrange, condenser si heureusement toutes les lois particulières de l'équilibre. Il expose enfin comment les lois de l'hydrostatique et de l'aérostatique ont découlé graduellement des recherches d'Archimède, de Pascal, d'Otto de Guérick, etc. Puis, il passe à la dynamique qui tient la plus grande place dans son ouvrage.

Nous y voyons d'abord les idées intuitives et les travaux de Galilée, la découverte qu'il fait du principe d'inertie, de l'accélération et du rôle que la force joue dans le mouvement, puis le dernier effort qu'il fait dans cette voie pour s'élever au principe de l'indépendance des mouvements simultanés.

Puis, viennent les travaux d'Huyghens sur la dynamique des systèmes et enfin ceux de Newton, qui couronnent l'édifice et asseoient la Mécanique sur des bases solides et suffisamment larges.

M. Mach nous expose avec une grande simplicité et une grande sincérité scientifique les efforts et les tâtonnements de tous ces illustres penseurs pour arriver à l'explication rationnelle des phénomènes du mouvement ; il nous décrit les expériences proprement dites ou intuitives qu'ils ont imaginées pour éclairer leur esprit et justifier ensuite leurs conceptions ; il nous montre à chaque instant le pas qui vient d'être fait et la voie nouvelle où la science s'engage et nous fait partager sans effort son admiration pour tous ces grands précurseurs.

Il analyse et critique leurs méthodes, leurs idées et leurs définitions, rapproche les principes les uns des autres et montre les profondes analogies qu'ils présentent et parfois leur identité. Il nous apprend à ne garder que ce que les faits nous donnent sans rien y adjoindre d'artificiel et d'inconnu.

L'auteur expose ensuite longuement, sans le secours du calcul et avec une profonde habileté, l'usage économique que les successeurs de Newton ont fait des immortelles découvertes de celui-ci et de ses prédécesseurs en établissant ces beaux théorèmes qui facilitent si grandement les applications et reçoivent à leur tour d'éclatantes vérifications expérimentales : le théorème du mouvement du centre de gravité, le théorème de la conservation des aires, les lois du choc, le théorème de D'Alembert, le théorème des forces vives, etc.

Il termine par un important chapitre sur les rapports de la Mécanique avec les autres sciences.

Je ne puis mieux clore ce rapide aperçu qu'en citant textuellement un court passage de l'introduction que M. Emile Picard a mise en tête de ce beau volume : « La lecture des œuvres des fondateurs de la Mécanique n'est pas facile, et ne peut être abordée avec profit par tous. Il existe fort heureusement un livre où la sûreté de la critique s'unit à la connaissance approfondie du sujet, je veux parler du Livre, depuis longtemps classique en Allemagne, de M. Mach, sur l'histoire de la Mécanique. M. Emile Bertrand a bien voulu traduire l'important ouvrage du savant professeur de l'université de Vienne ; cette traduction sera certainement accueillie en France avec reconnaissance. »

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

14e Année. N° 7 Avril 1904.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

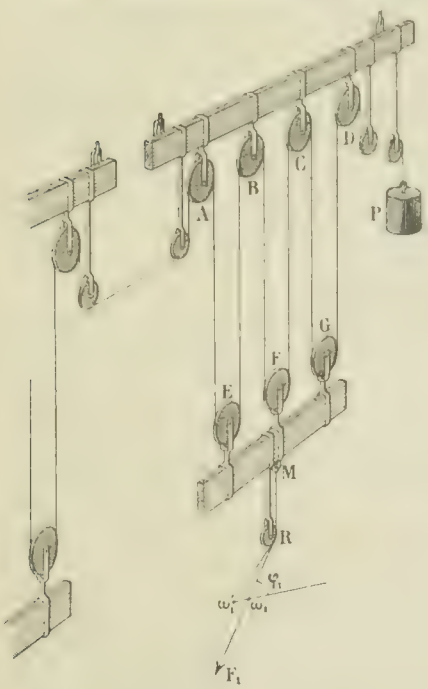
## PREMIÈRE PARTIE

### UN PRINCIPE DE STATIQUE, ÉTABLI PAR LA MÉTHODE DE LAGRANGE

par M. J. **Richard**, professeur au lycée de Dijon.

La façon dont Lagrange établit, dans sa *Mécanique analytique*, les principes de la Statique, est fort éloignée de celle que l'on adopte ordinairement. Elle est certainement inconnue à bien des lecteurs de la Revue. Je vais l'exposer aussi brièvement que possible.

*Un système matériel quelconque assujetti à des liaisons, est soumis à des forces données ; trouver les conditions d'équilibre du système.*




Commençons par considérer un système très particulier, les moufles. Une moufle se compose de deux châssis, l'un fixe, l'autre mobile, portant des poulies ; A, B, C, D sont les poulies fixes, E, F, G les poulies mobiles. Au châssis inférieur est attaché un fil MR, à l'extrémité duquel on peut faire agir une force quelconque $F_1$, par l'intermédiaire d'une poulie de renvoi R.

Un fil passe successivement sur toutes les poulies comme l'indique la figure et supporte à l'une de ses extrémités un poids P.

L'autre extrémité de ce fil peut être attachée à un point fixe, ou bien ce fil peut passer sur d'autres moufles, sur lesquels agissent d'autres forces $F_2, F_3, \ldots, F_p$. Après qu'il a passé sur les poulies de la dernière moufle, le fil est attaché à un point fixe.

Considérons d'abord une seule moufle. Nous admettons que les fils ont pour effet de transmettre les forces sans les altérer, que les poulies n'en changent que la direction. Nous négligeons le poids des fils, des poulies et des châssis. Supposons que la moufle ait $n_1$ poulies mobiles ; $n = 3$ dans la figure. Le châssis inférieur est alors supporté par $2n_1$ cordons. C'est la force P qui agit sur ces $2n_1$ cordons. Tout se passe alors comme si le châssis inférieur était tiré vers le haut par la force $2n_1P$ et vers le bas par la force $F_1$.

On peut donc admettre que la condition d'équilibre est $F_1 = 2n_1P$.

S'il y a $p$ moufles à la suite les unes des autres, et tirées par les forces $F_1, F_2, \ldots, F_p$ on devra avoir, en écrivant l'équation d'équilibre pour chacun d'eux, et remarquant que la force P est la même pour tous :

$$F_1 = 2n_1P, \qquad F_2 = 2n_2P, \qquad \ldots \qquad F_p = 2n_pP.$$

$n_1, n_2, \ldots, n_p$ étant les nombres de poulies mobiles de chaque moufle.

La force $F_1$ peut être supposée appliquée en un point $\omega_1$ de sa direction. Supposons que $\omega_1$ se déplace infiniment peu et vienne en $\omega'_1$. Soit $\varphi_1$ l'angle de $\omega_1 F_1$ avec $\omega_1\omega'_1$. La différence $R\omega'_1 - R\omega_1$ est égale, en négligeant les infiniment petits du 2e ordre, à $\omega_1\omega'_1 \cos\varphi_1$. Ce déplacement oblige donc le châssis inférieur de la moufle à baisser de cette quantité et chacun des $2n_1$ cordons à s'allonger d'autant. Si nous supposons des déplacements analogues pour les autres forces, et si nous appelons $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ ces déplacements, on voit que le poids P montera de $2(n_1\delta_1 \cos\varphi_1 + n_2\delta_2 \cos\varphi_2 + \cdots + n_p\delta_p \cos\varphi_p)$, ou, comme nous dirons pour abréger, de $2\Sigma n\delta \cos\varphi$.

Considérons maintenant un système matériel quelconque, soumis à des forces $F'_1, F'_2, \ldots F'_p$, appliquées en $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$; supposons qu'elles soient commensurables, et soit P leur commune mesure, de façon que $F'_1 = n_1 P$, $F'_2 = n_2 P$, etc.; nous pourrons leur faire équilibre par les forces $F_1, F_2 \ldots, F_p$ égales et directement opposées. Mais à l'aide de nos moufles nous pouvons faire équilibre par le poids P aux forces $F_1, F_2, \ldots, F_p$, de sorte que, au point de vue de l'équilibre, le poids P produit le même effet que les forces $F'_1, F'_2, \ldots, F'_p$. Il est indifférent de considérer le système matériel donné, soumis à ces forces, ou bien le système matériel donné auquel on a adjoint les moufles, soumis à la seule force P.

Or considérons ce dernier système. Nous admettons qu'il est en équilibre quand le poids P ne peut plus descendre et seulement dans ce cas. Il faut donc que la quantité dont monte le poids P ne puisse être négative. C'est-à-dire que l'on ait pour tous les systèmes de déplacement $\delta$ compatibles avec les liaisons du système

$$\Sigma n\delta \cos\varphi \geqslant 0.$$

Supposons que le système de liaisons soit tel que si le système des déplacements $\delta$ est possible, le système de déplacements de sens contraire $-\delta$ le soit aussi : on devra avoir $\Sigma(-n\delta \cos\varphi) \geqslant 0$.

Cette condition ne saurait être compatible avec la précédente que si

$$\Sigma n\delta \cos\varphi = 0\,;$$

comme $F'_1 = n_1 P$, $F'_2 = n_2 P$, etc., cette condition peut s'écrire

$$\Sigma n P\delta \cos\varphi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Sigma F'\delta \cos\varphi = 0.$$

Or $-F'_1\delta_1 \cos\varphi_1$ est le travail de la force $F'$ dans le déplacement $\delta_1$. La condition d'équilibre est donc que la somme des travaux des forces données soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons.

On a supposé les forces commensurables. Le lecteur établira sans peine à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que la condition d'équilibre est la même quand les forces ne sont pas toutes commensurables.

On a négligé dans les déplacements les infiniment petits du 2e ordre. Or supposons que le système soit défini par $k$ paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k$, ou, suivant une expression très usitée maintenant, ait $k$ degrés de liberté. La hauteur du poids P est une fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k$. On verra sans peine que l'équation $\Sigma F'_1\delta_{1,i} \cos\varphi_1 = 0$, où $\delta_{1,i}$ désigne ce que devient le déplacement $\delta_1$ quand la variable $q_i$ varie seule, exprime que la dérivée de la hauteur du poids P par rapport à $q_i$ est nulle. L'équation dans laquelle $i$ varie de 0 à $k$, fournit $k$ conditions d'équilibre et ce sont justement celles qu'on obtiendrait en cherchant les positions du poids P les plus hautes et les plus basses.

Je vais montrer maintenant comment les principes de la statique découlent de ce principe.

1° *Parallélogramme des forces.*

Soient deux forces F, $\Phi$ appliquées en A. Une force unique R pourra les remplacer si son travail est, pour tout déplacement $\delta$ du point A, égal à la somme des travaux des forces F, $\Phi$. Cette propriété exige que la projection de R sur $\delta$ soit égale à la somme des projections de F et de $\Phi$. Or ceci n'a lieu que si R est la somme géométrique de F et de $\Phi$.

2° *Équilibre d'un corps solide libre.*

Considérons un corps solide libre. Comme sa position dans l'espace est déterminée par 6 para-

mètres (un système d'axes mobiles liés au corps étant déterminé quand on donne les coordonnées de l'origine mobile et les angles $\theta$, $\varphi$, $\psi$ d'Euler), il y aura 6 conditions d'équilibre.

Supposons d'abord que le corps ait une translation $\delta$ parallèle à OX : soient $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, ..., les coordonnées des points d'application des forces, $(X_1 Y_1 Z_1)$, $(X_2 Y_2 Z_2)$, ..., leurs projections sur les axes. La somme des travaux dus à la translation $\delta$ est $\Sigma X_i \delta$, et comme elle doit être nulle on doit avoir $\Sigma X_i = 0$ ; on verra de même qu'on devra avoir pour l'équilibre $\Sigma Y_i = 0$, $\Sigma Z_i = 0$.

Supposons actuellement qu'on fasse tourner le corps d'un petit angle $\alpha$ autour de OX. Si les coordonnées d'un point sont $x, y, z$, en posant $y = R \cos \omega$, $z = R \sin \omega$, on voit que si $\omega$ devient $\omega + \alpha$ on a

$$\delta x = 0, \quad \delta y = -R\alpha \sin \omega, \quad \delta z = R\alpha \cos \omega, \qquad \text{ou} \qquad \delta x = 0, \quad \delta y = -\alpha z, \quad \delta z = \alpha y.$$

Le travail d'une force X, Y, Z appliquée au point $(x, y, z)$ est alors $\alpha(yZ - zY)$. On doit donc avoir $\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0$ ; de même on devra avoir $\Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) = 0$, $\Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = 0$.

On a ainsi les six conditions d'équilibre du corps libre. On obtient facilement d'une façon analogue les conditions d'équilibre d'un corps gêné.

En terminant, je vais déduire de là la composition des forces parallèles. Considérons des forces parallèles faisant avec les axes des angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. On écrira

$$X_i = F_i \cos \alpha, \qquad Y_i = F_i \cos \beta, \qquad Z_i = F_i \cos \gamma.$$

Soit R leur résultante, A, B, C ses projections sur les axes. $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les coordonnées de son point d'application. En écrivant que la force $-R$ fait équilibre aux forces données on a d'abord

$$\cos \alpha . \Sigma F_i = A, \qquad \cos \beta . \Sigma F_i = B, \qquad \cos \gamma . \Sigma F_i = C,$$

ce qui montre que la force R est égale à $\Sigma F_i$, et fait avec les axes des angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Ensuite on a

$$\Sigma(y_i . F_i \cos \gamma - z_i F_i \cos \alpha) - \eta R \cos \gamma + \zeta R \cos \alpha = 0$$

et deux autres équations analogues, qui se réduisent aux suivantes si on veut qu'elles subsistent quelle que soit la direction des forces, c'est-à-dire quels que soient les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,

$$\Sigma x_i F_i = \xi R, \qquad \Sigma y_i F_i = \eta R, \qquad \Sigma z_i F_i = \zeta R.$$

équations qui fournissent pour $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les coordonnées bien connues du centre des forces parallèles.

---

## SUR LE PROBLÈME DU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1903).

*Étude des sections planes de la surface S passant par le point P.*

Soit un plan R passant par le point P. Il coupe la surface S suivant une courbe C qui, d'après l'énoncé même, est anallagmatique par rapport au grand cercle E de la sphère $\Sigma$ contenu dans le plan R, et admet la définition suivante :

*La courbe* C *est le lieu des cercles-points des faisceaux de cercles dont le cercle* E *fait partie et dont les axes radicaux sont les projections sur le plan* R *des génératrices* G *du paraboloïde* $\Pi$.

En général, ces projections enveloppent une parabole H, contour apparent du paraboloïde $\Pi$ sur le plan R.

Examinons d'abord le cas où le contour apparent du paraboloïde $\Pi$ se décompose en deux points, l'un à distance finie, l'autre à l'infini. Ceci se produit s'il existe une génératrice de ce paraboloïde perpendiculaire au plan R c'est-à-dire si le plan R contient l'une des deux normales aux plans directeurs menées par P.

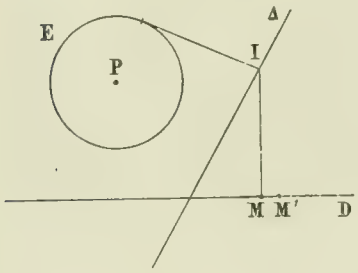
On retombe ainsi sur la génération de la surface S indiquée dans l'énoncé et on voit de plus, par

un raisonnement immédiat, que les deux normales aux plans directeurs menées par P sont les deux seules génératrices rectilignes de la surface S passant par P.

Supposons donc que le contour apparent du paraboloïde $\Pi$ sur le plan R est une vraie parabole H.

Nous allons montrer que la courbe anallagmatique C est une cubique et trouver en même temps ses cas de décomposition.

Cherchons pour cela l'enveloppe $H_1$ des axes radicaux des faisceaux de cercles déterminés par le cercle E et par les cercles-points M de la droite D, prise arbitrairement dans le plan R. Le point de contact de $\Delta$ et de son enveloppe sera la limite du centre radical du cercle E et des cercles-points M et M′ quand le point M′ tend vers M.




Cette position limite est donc le point I tel que IM soit perpendiculaire à D.

Le point I est tel que la longueur de la tangente menée de I au cercle E soit IM. Donc son lieu est la parabole $H_1$ bitangente au cercle E, la corde des contacts étant la droite D.

La parabole H et la parabole $H_1$ ont trois tangentes communes. Donc la courbe C est du troisième degré.

Cette anallagmatique ne peut donc se décomposer qu'en une droite et un cercle. D'après le raisonnement précédent, il est nécessaire et suffisant pour qu'elle contienne tous les points d'une droite D que la parabole H soit bitangente au cercle E.

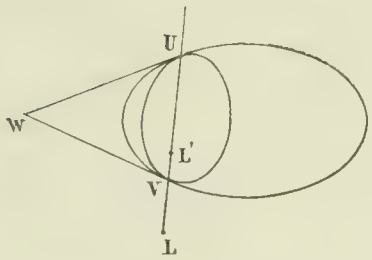
On aura donc toutes les droites de la surface S ne passant pas par le point P en résolvant le problème suivant :

*Étant données deux quadriques $\Sigma$ et $\Pi$, trouver tous les plans* R *sur lesquels les contours apparents des deux quadriques sont bitangents.*

Ce problème se transforme en le suivant, par dualité :

*Étant données deux quadriques $\Sigma'$ et $\Pi'$, trouver combien par un point on peut mener de plans les coupant suivant deux coniques bitangentes.*

Les 8 plans tangents menés par le point aux 4 cônes du second degré contenant l'intersection des quadriques $\Sigma'$ et $\Pi'$ répondent à la question. Il faut montrer que ce sont les seuls. Considérons en effet un plan coupant les deux quadriques suivant deux coniques bitangentes en U, V, le pôle commun de U, V étant W. Les deux droites conjuguées de U, V par rapport aux deux quadriques passent toutes deux par W. Elles forment un plan qui coupe UV en L′ dont le conjugué harmonique L par rapport au segment UV a même plan polaire dans les deux quadriques.




Donc le plan considéré est bien tangent à l'un des cônes du second degré passant par l'intersection des quadriques $\Sigma'$ et $\Pi'$.

Nous avons donc prouvé que les seuls plans R pour lesquels le cercle E et la parabole H sont bitangents sont ceux dont les normales contiennent l'un des 8 points à l'infini des 4 coniques doubles de la développable circonscrite à la sphère S et au paraboloïde $\Pi$.

Ou enfin nous avons montré que la surface S possède 10 droites dont deux passent par P.

La recherche des sections circulaires de la surface S s'en déduit.

## ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1903).

### Mathématiques.

**1226.** — *On considère les deux surfaces du second degré* (P), (Q), *définies en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$(P) \qquad y^2 - zx - a^2 = 0,$$

$$(Q) \qquad 2y^2 - x^2 - zx - ay = 0,$$

*où $a$ désigne une constante. Soit* (C) *la courbe d'intersection de ces deux surfaces.*

1° *Former les équations des projections orthogonales de cette courbe* (C) *sur le plan des $xy$ et sur le plan des $zx$. Construire ces courbes.*

2° *Considérant, en particulier, la projection de* (C) *sur le plan des $zx$, on déterminera l'aire comprise entre l'axe des $x$, la branche supérieure de la courbe et les droites qui, dans ce plan, ont pour équations*

$$x = a, \qquad x = a\sqrt{3}.$$

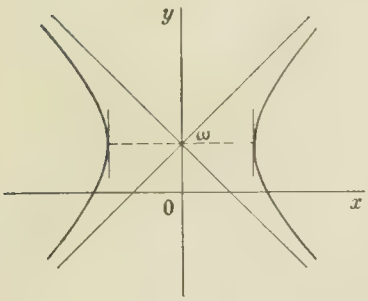
3° *Soit* M *un point de* (C); *par ce point passent deux génératrices rectilignes de la surface* (P), *qui rencontrent la courbe* (C) *en deux points* $M_1$, $M'_1$ *autres que* M. *Quel est le lieu* (R) *de la droite* $M_1M'_1$ *quand le point* M *décrit la courbe* (C)? *De quoi se composent les intersections de la surface* (R) *avec chacune des surfaces* (P), (Q)?

4° *Par le point* $M_1$, *précédemment défini, passe une génératrice de* (P), *autre que la droite* $M_1M$; *Soit* $M_2$ *le point d'intersection, autre que* $M_1$, *de cette génératrice et de la courbe* (C); *par le point* $M_2$ *passe une génératrice de* (P), *autre que la droite* $M_2M_1$; *soit* $M_3$ *le point d'intersection, autre que* $M_2$, *de cette génératrice et de la courbe* (C); *on continue de la même façon... Démontrer que la ligne polygonale* $MM_1M_2$... *se ferme et qu'il en est de même de la ligne polygonale obtenue par la même construction en remplaçant simplement le point* $M_1$ *par le point* $M'_1$.

1. La projection de la courbe (C) sur le plan des $xy$ est définie par l'équation

$$x^2 - y^2 + ay - a^2 = 0,$$

qu'on obtient très simplement en retranchant les équations des surfaces (P) et (Q); cette équation représente une hyperbole équilatère ayant pour centre le point $\omega\left(0, \frac{a}{2}\right)$ et pour asymptotes des parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées ; elle rencontre $Ox$ aux points qui ont pour abscisses $\pm a$, et la demi-longueur de son axe est égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ces remarques sont plus que suffisantes pour tracer cette hyperbole.




Pour avoir la projection de la courbe (C) sur le plan des $xz$, il faut éliminer $y$ entre les équations (P) et (Q). La première donne $y = \pm\sqrt{zx + a^2}$, et en portant cette valeur dans la seconde, on obtient

$$zx - x^2 + 2a^2 = \pm a\sqrt{zx + a^2},$$

ou

$$(zx - x^2 + 2a^2)^2 - a^2(zx + a^2) = 0,$$

ou encore

$$(1) \qquad x^2(z - x)^2 - a^2x(4x - 3z) + 3a^4 = 0.$$

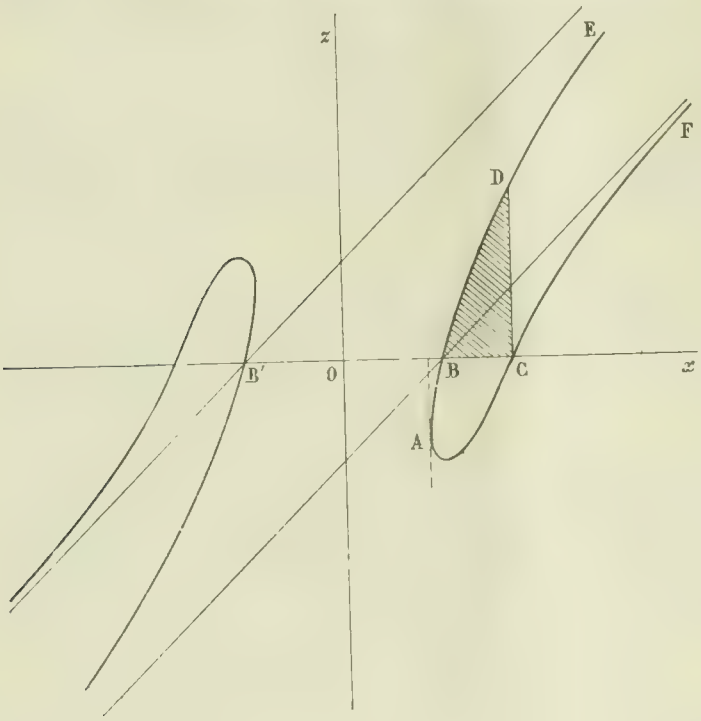
Cette équation représente une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à l'origine ; elle admet deux points doubles à l'infini dans les directions $x = 0$, $z - x = 0$.

Pour la construire, remarquons que le premier membre est du deuxième degré par rapport à $z$, et en l'ordonnant par rapport à cette lettre nous avons

$$z^2x^2 - zx(2x^2 - 3a^2) + (x^2 - a^2)(x^2 - 3a^2) = 0. \tag{2}$$

A chaque valeur de $x$ correspondent ainsi deux valeurs de $z$ dont nous allons étudier la réalité et le signe quand on fait varier $x$.

Puisque la courbe est symétrique par rapport à l'origine, il suffira de donner à $x$ des valeurs positives ; on construira ainsi la moitié de la courbe, et on obtiendra l'autre moitié en prenant le symétrique de la première par rapport au point O.




Pour que $z$ soit réel, il faut qu'on ait $4x^2 - 3a^2 > 0$ ou puisque $x$ est supposé positif, $x > \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Nous ferons varier $x$ de $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ à $+\infty$. Pour $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, les deux valeurs de $z$ sont égales à $-\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Quand $x$ varie de $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ à $a$, les signes des coefficients sont respectivement $+ + +$ ; le théorème de Descartes nous fait voir que l'équation admet deux racines négatives ; pour $x = a$, l'une d'elles prend la valeur zéro, l'autre la valeur $-a$. Quand $x$ croît de $a$ à $a\sqrt{3}$, nous avons les signes $+ + -$ ; les deux racines sont de signes contraires. Pour $x = a\sqrt{3}$, la positive devient égale à $a\sqrt{3}$, la négative s'annule, et enfin quand $x$ croît de $a\sqrt{3}$ à $+\infty$, les deux racines sont positives et augmentent indéfiniment. Ces résultats peuvent être représentés par le tableau suivant

| $x$ | $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ | | $a$ | | $a\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_1$ | $-\frac{a\sqrt{3}}{2}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $a\sqrt{3}$ | $+$ | $+\infty$ |
| $z_2$ | $-\frac{a\sqrt{3}}{2}$ | $-$ | $-a$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+\infty$ |

Cette discussion nous donne la branche de courbe EDBACF, qui jointe à sa symétrique par rapport à l'origine constitue toute la courbe définie par l'équation (1). La tangente au point A $\left(x = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ z = -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ est parallèle à $Oz$, car pour les coordonnées de ce point $f_z$ est nul et $f_x$ ne l'est pas.

Cherchons les asymptotes. Les directions asymptotiques sont définies par l'équation $x^2(z - x)^2 = 0$. Au facteur $x = 0$ correspondent des branches infinies imaginaires, puisque pour les valeurs de $x$ voisines de zéro, les valeurs de $z$ sont imaginaires.

Considérons maintenant la direction $z - x = 0$; pour déterminer les asymptotes parallèles à cette direction, nous remplaçons dans l'équation de la courbe, écrite sous la forme (1), $z$ par $x + \lambda$; nous obtenons

$$x^2(\lambda^2 - a^2) + 3a^2\lambda x + 3a^4 = 0;$$

nous égalons à zéro le coefficient de $x^2$, nous avons l'équation $\lambda^2 - a^2 = 0$, dont les racines $\pm a$ sont les ordonnées à l'origine des asymptotes. Les équations de ces droites sont donc

$$z = x - a,$$

$$z = x + a.$$

La première rencontre la courbe au point $B(a, 0)$, la deuxième au point $B'(-a, 0)$. Comme chaque asymptote ne peut rencontrer la courbe qu'en un point à distance finie, il n'y a pas d'autre point de rencontre, et la courbe se trouve placée par rapport à ses asymptotes.

2. Nous avons à calculer l'aire du triangle mixtiligne BCD; elle est égale à l'intégrale définie

$$A = \int_a^{a\sqrt{3}} z\,dx,$$

$z$ désignant la racine positive de l'équation (2) quand $x$ varie de $a$ à $a\sqrt{3}$. Cette racine est égale à

$$\frac{2x^2 - 3a^2 + a\sqrt{4x^2 - 3a^2}}{2x};$$

nous avons donc

$$A = \int_a^{a\sqrt{3}} \left( x - \frac{3a^2}{2x} + \frac{a\sqrt{4x^2 - 3a^2}}{2x} \right) dx.$$

L'intégrale indéfinie est égale à

$$\int x\,dx - \frac{3a^2}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{\sqrt{4x^2 - 3a^2}}{x}\,dx,$$

ou

$$(3) \qquad \frac{x^2}{2} - \frac{3a^2}{2}\,\mathrm{L}x + \frac{a}{2}\,\mathrm{I},$$

en posant

$$\mathrm{I} = \int \frac{\sqrt{4x^2 - 3a^2}}{x}\,dx.$$

Cette intégrale peut s'écrire successivement

$$\mathrm{I} = \int \frac{(4x^2 - 3a^2)}{x\sqrt{4x^2 - 3a^2}}\,dx = \int \frac{4x\,dx}{\sqrt{4x^2 - 3a^2}} - 3a^2 \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 3a^2}}$$

$$\mathrm{I} = \sqrt{4x^2 - 3a^2} + a\sqrt{3} \int \frac{d\left(\frac{a\sqrt{3}}{2x}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2x}\right)^2}}.$$

$$\mathrm{I} = \sqrt{4x^2 - 3a^2} + a\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{a\sqrt{3}}{2x}.$$

L'intégrale indéfinie (3) prend alors la forme

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3a^2}{2}\,\mathrm{L}x + \frac{a}{2}\sqrt{4x^2 - 3a^2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{a\sqrt{3}}{2x};$$

et l'intégrale définie A a pour valeur

$$A = \mathrm{F}(a\sqrt{3}) - \mathrm{F}(a).$$

Or
$$F(a\sqrt{3}) = \frac{3a^2}{2} - \frac{3a^2}{2} L(a\sqrt{3}) + \frac{3a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{6},$$
$$F(a) = \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{2} La + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3};$$
nous en déduisons
$$A = a^2\left(2 - \frac{3}{4} L3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\right).$$

3. Les deux systèmes de génératrices de la surface (P) peuvent être représentés par les équations

$$(I) \quad \begin{cases} y + a = uz, \\ y - a = \dfrac{x}{u}, \end{cases} \qquad (II) \quad \begin{cases} y + a = vx, \\ y - a = \dfrac{z}{v}; \end{cases}$$

deux génératrices de systèmes différents se coupent en un point qui a pour coordonnées
$$x = \frac{2au}{uv - 1}, \qquad y = \frac{a(uv + 1)}{uv - 1}, \qquad z = \frac{2av}{uv - 1}.$$

Pour écrire que ce point est sur la courbe (C) il suffit de remplacer $x$, $y$, $z$ par ces valeurs dans l'équation de la surface (Q) ; nous obtenons ainsi, après un calcul facile,

$$(4) \qquad u^2v^2 - 4u^2 + 3 = 0.$$

A tout ensemble de valeurs de $u$ et de $v$ correspond un point de la surface (P) ; on peut considérer $u$ et $v$ comme les coordonnées curvilignes de ce point. L'équation (4) est alors l'équation de la courbe (C) en coordonnées curvilignes.

Soient $u_0$, $v_0$ les coordonnées curvilignes d'un point M de la courbe (C). Nous avons

$$(5) \qquad u_0^2v_0^2 - 4u_0^2 + 3 = 0.$$

La génératrice du système (I) qui passe par le point M a pour équation $u = u_0$ ; elle rencontre la courbe (C) en deux points dont les $v$ sont racines de l'équation $u_0^2v^2 - 4u_0^2 + 3 = 0$. Comme l'une des racines est $v_0$, l'autre est $-v_0$, le point $M_1$ a donc pour coordonnées $u = u_0$, $v = -v_0$.

On voit d'une manière analogue que les coordonnées du point $M_1'$ sont $u = -u_0$, $v = v_0$.

Il en résulte que les coordonnées cartésiennes de ces deux points sont
$$x_1 = -\frac{2au_0}{u_0v_0 + 1}, \qquad y_1 = \frac{a(u_0v_0 - 1)}{u_0v_0 - 1}, \qquad z_1 = \frac{2av_0}{u_0v_0 + 1},$$
$$x_1' = \frac{2au_0}{u_0v_0 + 1}, \qquad y_1' = \frac{a(u_0v_0 - 1)}{u_0v_0 + 1}, \qquad z_1' = -\frac{2av_0}{u_0v_0 + 1};$$
on en déduit aisément les équations de la droite $M_1M_1'$
$$y = \frac{a(u_0v_0 - 1)}{u_0v_0 + 1}, \qquad v_0x + u_0z = 0.$$

Il n'y a plus alors qu'à éliminer $u_0$ et $v_0$ entre ces équations et la relation (5) pour avoir le lieu engendré par la droite $M_1M_1'$ ; nous obtenons ainsi l'équation

$$(S) \qquad z(y^2 - ay + a^2) - x(y^2 - a^2) = 0,$$

qui représente un conoïde (S) dont le plan directeur est le plan des $xz$ et dont l'axe est $Oy$.

La courbe (C), commune aux surfaces (P) et (Q) est évidemment située sur ce conoïde, puisque cette courbe rencontre en deux points les génératrices $M_1M_1'$ du conoïde.

Il en résulte que la courbe (C) fait partie de l'intersection de la surface (S) avec chacune des surfaces (P) et (Q) ; c'est ce que nous allons d'ailleurs vérifier analytiquement.

Eliminons $z$ entre les équations (P) et (S), nous obtenons
$$(y^2 - a^2)(y^2 - ay + a^2 - x^2) = 0,$$
qui représente la projection sur le plan des $xy$ de l'intersection des surfaces (P) et (S).

Au facteur $y^2 - ay + a^2 - x^2$ correspond la courbe (C) et au facteur $y^2 - a^2$ correspondent deux

droites $z = 0$, $y - a = 0$ et $z = 0$, $y + a = 0$. L'intersection des deux surfaces se compose donc de la courbe (C) et de ces deux droites.

En projetant sur le même plan l'intersection des surfaces (Q) et (S) nous avons

$$(2y^2 - x^2 - ay)(y^2 - ay + a^2) - x^2(y^2 - a^2) = 0$$

ou

$$y(2y - a)(y^2 - ay + a^2 - x^2) = 0,$$

ce qui montre que l'intersection des surfaces (Q) et (S) se compose de la courbe (C) et des deux droites $y = 0$, $z + x = 0$ et $2y - a = 0$, $z + x = 0$.

**4.** Nous avons vu que l'équation de la courbe (C) en coordonnées curvilignes était $u^2v^2 - 4u^2 + 3 = 0$; on en conclut que toute génératrice de la surface (P) appartenant au système (I) rencontre la courbe (C) en deux points dont les $u$ sont égaux et dont les $v$ sont égaux et de signes contraires. De même, toute génératrice du système (II) rencontre (C) en deux points dont les $u$ sont égaux et de signes contraires et dont les $v$ sont égaux.

Cela posé, soient $u_0$, $v_0$ les coordonnées curvilignes du point M; celles du point $M_1$ sont $u_0$, $-v_0$; celles du point $M_2$, $-u_0$, $-v_0$; celles du point $M_3$, $-u_0$, $v_0$, et enfin, celles du point $M_4$, $u_0$ et $v_0$. Par suite le point $M_4$ coïncide avec le point M; ce qui montre que la ligne polygonale $MM_1M_2$... se ferme.

Même démonstration pour la ligne polygonale obtenue en partant du point $M_1'$.

J. D. DUFAUT, à Poitiers

Bonnes solutions par MM. R. Rouvaist; J. Haag; H. Lefebvre; C. Grolleau, surveillant général, lycée de Marseille.

## BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DES SCIENCES (1903).

### Physique.

**1232.** — *Un pendule compensé oscille devant le balancier d'une horloge battant exactement la seconde. On observe une première coïncidence à* $1^h 52^m 37^s$ *et une seconde à* $2^h 15^m 6^s$, *les deux pendules marchant dans le même sens, le pendule composé ayant pris de l'avance sur le balancier. La longueur du pendule synchrone du pendule composé est* 99 *centim.* 11. *Le terme dû à l'amplitude est négligeable.*

*Quelle est l'intensité de la pesanteur en cet endroit?*

*Au même endroit, la hauteur du baromètre est exactement* 753 *millim.* 35 *à un certain moment, la température du mercure étant* 18° 6. *Quelle est en unités C. G. S. (baries), la pression atmosphérique à ce moment?*

*Densité du mercure à* 0° 13,596. *Coefficient de dilatation absolue du mercure* 0,00018.

Les deux époques, réduites en secondes, sont respectivement

$$1 \times 60 \times 60 + 52 \times 60 + 37 = 6757,$$
$$2 \times 60 \times 60 + 15 \times 60 + 6 = 8106.$$

Dans l'intervalle de $1349^{sec}$, le pendule composé a fait 2 oscillations de plus, soit 1351. La durée de son oscillation est donc $\frac{1349}{1351}$ et la formule du pendule,

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{ou} \qquad g = \frac{\pi^2 l}{t^2},$$

nous donne, tous calculs faits,

$$g = 981{,}08.$$

Pour calculer la pression atmosphérique, appliquons la formule fondamentale de l'hydrostatique

$$p = h\mu g = h\,\frac{\mu_0}{1+at}\,g$$

en ayant soin d'exprimer $h$ en centimètres :

$$p = 75{,}335 \times \frac{13{,}596}{1 + 0{,}00018 \times 18{,}6} \times 981{,}08,$$

$$p = 1\,001\,522.$$

## Chimie.

**1233.** — *On fait passer un courant de chlore sec sur du bore et on recueille un liquide dont la densité de vapeur est* 4,065.

*On demande la formule du corps ainsi obtenu, étant donné qu'en en dissolvant* 1 *gramme dans de l'eau en excès, on obtient un liquide acide qui exige pour être saturé à l'hélianthine* $25^{cc},5$ *d'une dissolution de soude contenant* 40 *grammes de* NaOH *au litre.*

$$B = 11, \qquad Cl = 35{,}5, \qquad Na = 23.$$

L'acide borique est sans action sur l'hélianthine et l'expérience fait connaître la quantité d'acide chlorhydrique produit dans l'action de l'eau sur le chlorure de bore. La dissolution de soude renferme juste une molécule par litre, une milli-molécule par centimètre cube ; $25^{cc},5$ saturent donc 25,5 milli-molécules d'acide chlorhydrique qui contiennent un poids de chlore

$$25{,}5 \times 35{,}5 = 905{,}25 \text{ milligrammes.}$$

Or le poids moléculaire du liquide en question est environ

$$4{,}065 \times 28{,}8 = 117.$$

Si 1000 milligrammes de ce liquide contiennent 25,5 atomes de chlore, 117 milligrammes en contiennent $\frac{117 \times 25{,}5}{1000} = 2{,}98$, c'est-à-dire 3.

D'autre part, les 1000 milligrammes du liquide contiennent un poids de bore égal à $1000 - 905{,}25 = 94{,}75$, 117 milligrammes en contiennent $\frac{117 \times 94{,}75}{1000} = 11{,}08$, c'est-à-dire 1 atome.

Le poids moléculaire du liquide est donc formé de trois poids atomiques de chlore et d'un poids atomique de bore et sa formule est

$$BCl^3.$$

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1217.** *On considère dans un plan un faisceau de coniques homofocales* $\Sigma$ *et un cercle* $\Gamma$ *de centre* C.

1° *Il existe quatre coniques* $\Sigma$ *tangentes au cercle* $\Gamma$ ; *soient* $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ *les quatre points de contact et* $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ *les tangentes au cercle* $\Gamma$ *en ces points ; démontrer que le quadrangle de ces quatre points et le quadrilatère de ces quatre tangentes ont même triangle diagonal* PQR.

2° *On fait varier le rayon du cercle* Γ, *le centre* C *restant fixe, déterminer le lieu des points* $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, *l'enveloppe des tangentes* $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$, *le lieu des points de rencontre de ces tangentes deux à deux, le lieu des sommets du triangle* PQR *et l'enveloppe des côtés de ce triangle.*

3° *L'enveloppe des tangentes* $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ *est une parabole* Π *tangente aux axes des coniques* Σ *en des points* M *et* N. *Comment doit-on faire varier le point* C *pour que la corde* MN *passe constamment par ce point* C ? *Déterminer dans ce cas l'enveloppe de* MN, *ainsi que le lieu du foyer et l'enveloppe de l'axe de la parabole* Π.

1. Prenons pour axes les axes des coniques homofocales Σ, désignons par R le rayon du cercle Γ et par $x_0$, $y_0$ les coordonnées de son centre C. Ecrivons les équations tangentielles du cercle C et d'une des coniques Σ

$$(1) \qquad f(u, v, w) = (ux_0 + vy_0 + w)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0,$$

$$(2) \qquad \varphi(u, v, w) = a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 + \lambda(u^2 + v^2) = 0;$$

nous allons chercher à déterminer λ de façon que la conique soit tangente au cercle. Il suffit pour cela d'écrire qu'une tangente au cercle a même pôle par rapport aux deux coniques, on doit donc avoir

$$\frac{f_u}{\varphi_u} = \frac{f_v}{\varphi_v} = \frac{f_w}{\varphi_w},$$

ou, en posant $ux_0 + vy_0 + w = P$,

$$\frac{x_0P - R^2u}{a^2u + \lambda u} = \frac{y_0P - R^2v}{b^2v + \lambda v} = \frac{P}{-w}.$$

Eliminons λ entre ces deux équations, nous avons

$$P(c^2uv - uwy_0 + vwx_0) = 0.$$

Les équations $P = 0$, $f(u, v, w) = 0$ déterminent les droites isotropes qui passent par le point C; on peut les considérer comme des tangentes communes au cercle et à la conique du faisceau (2) qui se réduit aux points cycliques. C'est une solution singulière.

Il existe donc *quatre* coniques du faisceau (2) tangentes au cercle Γ, et les tangentes $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ aux points de contact sont définies par les équations

$$f(u, v, w) = 0, \qquad c^2uv - uwy_0 + vwx_0 = 0.$$

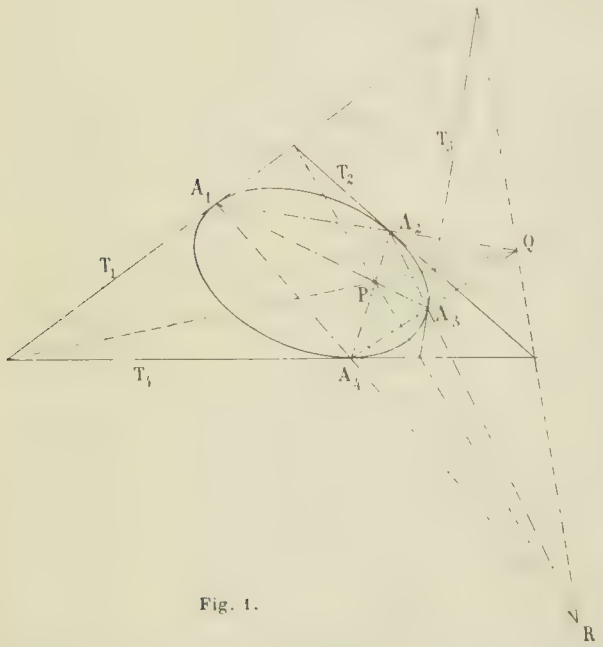


Fig. 1.

D'une manière générale, étant donnés quatre points $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ sur une conique quelconque, et les tangentes $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ en ces points, les points diagonaux du quadrangle $A_1A_2A_3A_4$ sont les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet formé par les diagonales; cette propriété est une conséquence du théorème de Brianchon appliqué au quadrilatère ou encore de ce fait que lorsque deux coniques sont bitangentes à une troisième, les cordes de contact se coupent en un des centres d'un couple de sécantes communes aux deux premières coniques (*fig.* 1).

**2.** Comme l'équation

$$c^2uv - uwy_0 + vwx_0 = 0 \tag{3}$$

est indépendante de R, elle est l'équation tangentielle de l'enveloppe des tangentes $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$. Elle représente une parabole (II) tangente aux axes de coordonnées, nous l'étudierons dans la troisième partie.

On peut déterminer analytiquement les points $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ par le même calcul que plus haut en partant des équations ponctuelles du cercle et d'une des coniques $\Sigma$

$$F(x, y) \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0, \tag{4}$$

$$\Phi(x,y) \equiv \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - 1 = 0. \tag{5}$$

Pour écrire que ces deux coniques sont tangentes, nous exprimerons qu'un point $(x, y)$ du cercle a même polaire par rapport aux deux coniques, ce qui donne

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{x}{a^2 + \lambda}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{y}{b^2 + \lambda}} = \frac{-x_0(x - x_0) - y_0(y - y_0) - R^2}{-1},$$

et en éliminant $\lambda$, on obtient

$$c^2(x - x_0)(y - y_0) + (xy_0 - yx_0)[x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + R^2] = 0. \tag{6}$$

Les points $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ sont déterminés par les équations (4) et (6), et en éliminant $R^2$ entre ces équations, nous obtenons le lieu de ces points.

Nous avons ainsi

$$c^2(x - x_0)(y - y_0) + (xy_0 - yx_0)[x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = 0,$$

ou, en transportant l'origine au point $C(x_0, y_0)$,

$$(x^2 + y^2)(xy_0 - yx_0) + (xy_0 - yx_0)(xx_0 + yy_0) + c^2xy = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une strophoïde ayant pour point double le point C, et pour asymptote une parallèle à OC.

Cherchons maintenant le lieu des points de rencontre des tangentes $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ deux à deux. Soit $M(\alpha, \beta)$ un point du lieu, nous allons écrire que les tangentes menées de ce point au cercle et à la parabole (3) ont mêmes coefficients angulaires. Les équations aux coefficients angulaires des tangentes issues du point $(\alpha, \beta)$ à ces courbes s'obtiennent en écrivant que la droite $y - \beta = m(x - \alpha)$ est tangente, ce qui donne

$$(mx_0 - y_0 + \beta - m\alpha)^2 - R^2(m^2 + 1) = 0, \qquad -c^2m + (\beta - m\alpha)(-my_0 - x_0) = 0$$

ou

$$m^2[(x_0 - \alpha)^2 - R^2] - 2m(x_0 - \alpha)(y_0 - \beta) + (y_0 - \beta)^2 - R^2 = 0,$$

$$m^2\alpha y_0 + m(\alpha x_0 - \beta y_0 - c^2) - \beta x_0 = 0.$$

Pour que ces deux équations aient mêmes racines, il faut qu'on ait

$$\frac{(x_0 - \alpha)^2 - R^2}{\alpha y_0} = \frac{-2(x_0 - \alpha)(y_0 - \beta)}{\alpha x_0 - \beta y_0 - c^2} = \frac{(y_0 - \beta)^2 - R^2}{-\beta x_0}$$

Éliminons $R^2$ entre ces équations, remplaçons $\alpha$ et $\beta$ par $x$ et $y$, nous obtenons l'équation du lieu

$$\frac{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{xy_0 + yx_0} = \frac{-2(x - x_0)(y - y_0)}{xx_0 - yy_0 - c^2},$$

ou, en chassant les dénominateurs, et en transportant l'origine au point $(x_0, y_0)$,

$$(x^2 + y^2)(xx_0 + yy_0) + (x^2 - y^2)(x_0^2 - y_0^2 - c^2) + 4xyx_0y_0 = 0.$$

Cette équation représente encore un strophoïde ayant pour point double le point C, mais dont l'asymptote est perpendiculaire à OC.

Les points P, Q, R sont les pôles doubles du faisceau ponctuel défini par les coniques (4) et (6). Transportons l'origine des coordonnées au point C, l'équation du faisceau est

$$\lambda(x^2 + y^2 - R^2) + c^2xy + (xy_0 - yx_0)(xx_0 + yy_0 + R^2) = 0,$$

et les pôles doubles sont définis par les équations

$$2\lambda x + c^2y + x_0(xy_0 - yx_0) + y_0(xx_0 + yy_0 + R^2) = 0,$$

$$2\lambda y - c^2x + y_0(xy_0 - yx_0) - x_0(xx_0 + yy_0 + R^2) = 0,$$

$$-2\lambda + xy_0 - yx_0 = 0$$

Multiplions ces équations respectivement par $x_0$, $y_0$ et $xx_0 + yy_0$, nous obtenons

$$c^2(yx_0 + xy_0) + (x_0^2 + y_0^2)(xy_0 - yx_0) + (xx_0 + yy_0)(xy_0 - yx_0) = 0.$$

C'est l'équation du lieu. Elle représente une hyperbole équilatère dont les directions asymptotiques sont OC et la direction perpendiculaire à OC.

Enfin, les côtés du triangle PQR sont les côtés du triangle conjugué commun aux coniques (1) et (3). Considérons le faisceau tangentiel défini par ces coniques

$$\lambda(c^2uv - uwy_0 + vwx_0) - (ux_0 + vy_0 + w)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0,$$

et égalons à zéro les dérivées partielles du premier membre par rapport à $u$, $v$, $w$, nous aurons des équations admettant comme solutions les coordonnées tangentielles des côtés du triangle PQR. Nous avons ainsi

$$\lambda(c^2v - wy_0) + 2x_0P - 2R^2u = 0,$$

$$\lambda(c^2u + wx_0) + 2y_0P - 2R^2v = 0, \qquad (P = ux_0 + vy_0 + w).$$

$$\lambda(-uy_0 + vx_0) + 2P = 0.$$

Eliminons $\lambda$ et $R^2$ entre ces trois équations; pour cela multiplions la première par $-v$, la seconde par $u$, et ajoutons ces deux équations; puis remplaçons $\lambda$ par $\dfrac{2P}{uy_0 - vx_0}$, nous obtenons après suppression du facteur P

$$c^2(u^2 - v^2) + w(ux_0 + vy_0) - (uy_0 - vx_0)^2 = 0.$$

C'est l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée ; elle représente une parabole dont l'axe est parallèle à OC.

3. L'enveloppe des tangentes $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ est la parabole $\Pi$ définie par l'équation tangentielle

(3) $$g(u, v, w) \equiv c^2uv - uwy_0 + vwx_0 = 0.$$

Elle touche les axes de coordonnées en des points dont les équations tangentielles sont

$$y_0' \equiv c^2v - wy_0 = 0, \qquad x_0' \equiv c^2u + wx_0 = 0;$$

le point M où elle touche $Ox$ a pour abscisse $\dfrac{c^2}{x_0}$, et le point N où elle touche $Oy$ a pour ordonnée $-\dfrac{c^2}{y_0}$; par suite l'équation de la droite MN est

$$xx_0 - yy_0 - c^2 = 0.$$

Pour qu'elle passe par le point C, il faut qu'on ait $x_0^2 - y_0^2 - c^2 = 0$. Dans ce cas le point C décrit l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 - c^2 = 0$.

Comme la tangente au point $(x_0, y_0)$ à cette hyperbole est précisément la droite MN, on voit que l'enveloppe de MN n'est autre que l'hyperbole, lieu du point C.

Le foyer de la parabole est le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite MN.

Nous aurons le lieu du foyer en éliminant $x_0$, $y_0$ entre les équations

$$xx_0 - yy_0 - c^2 = 0, \qquad \frac{x}{x_0} = -\frac{y}{y_0}, \qquad x_0^2 - y_0^2 - c^2 = 0.$$

Des deux premières on tire $x_0 = \dfrac{c^2x}{x^2+y^2}$, $y_0 = \dfrac{-c^2y}{x^2+y^2}$, et en portant ces valeurs dans la troisième on a

$$(x^2+y^2)^2 - c^2(x^2-y^2) = 0.$$

C'est l'équation d'une lemniscate, qui est la podaire de l'hyperbole $x^2 - y^2 - c^2 = 0$ par rapport à l'origine.

L'axe de la parabole (3) est la droite dont le pôle est à l'infini dans la direction perpendiculaire à cette droite, par suite les coordonnées de cet axe sont déterminées par les équations

$$\frac{g'_u}{u} = \frac{g'_v}{v}, \qquad g'_w = 0$$

ou

$$\frac{c^2v - wy_0}{u} = \frac{c^2u + wx_0}{v}, \qquad -uy_0 + vx_0 = 0.$$

Éliminons $x_0$, $y_0$ entre ces équations et la relation $x_0^2 - y_0^2 - c^2 = 0$, nous obtenons l'équation tangentielle de l'enveloppe de l'axe

(7) $$c^2(u^2-v^2)^3 - w^2(u^2+v^2)^2 = 0.$$

Elle représente une courbe de sixième classe symétrique par rapport aux axes de coordonnées.

Pour construire cette courbe nous prendrons comme axes de coordonnées les bissectrices des axes primitifs. L'équation tangentielle de la courbe par rapport aux nouveaux axes s'obtient en remplaçant dans l'équation (7) $u+v$ par $u\sqrt{2}$ et $u-v$ par $-v\sqrt{2}$, ce qui donne

$$8c^2u^3v^3 + w^2(u^2+v^2)^2 = 0.$$

Ceci montre que $u$ et $v$ doivent être de signes contraires. Posons $u = -t^2v$, nous obtenons, après avoir divisé par $v^4$, $v^2 = \dfrac{w^2(t^4+1)^2}{8c^2t^6}$, ou

$$v = \frac{\varepsilon w(t^4+1)}{2ct^3\sqrt{2}}, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

et

$$u = -\frac{\varepsilon w(t^4+1)}{2ct\sqrt{2}},$$

par suite l'équation de l'axe peut s'écrire

$$-\varepsilon(t^4+1)t^2x + \varepsilon(t^4+1)y + 2ct^3\sqrt{2} = 0.$$

Aux deux valeurs de $\varepsilon$, $\pm 1$, correspondent deux droites symétriques par rapport à l'origine. D'ailleurs changer le signe de $\varepsilon$ revient à changer le signe de $t$, il suffira donc de considérer la droite

$$-t^2(t^4+1)x + (t^4+1)y + 2ct^3\sqrt{2} = 0,$$

et de chercher son enveloppe quand $t$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Prenons la dérivée du premier membre par rapport à $t$, nous avons

$$-x(3t^4+1) + 2t^2y + 3tc\sqrt{2} = 0,$$

et en résolvant ces deux équations par rapport à $x$ et $y$, nous obtenons les coordonnées d'un point de l'enveloppe en fonction rationnelle d'un paramètre $t$.

$$x = -c\sqrt{2}.\frac{t(t^4-3)}{(t^4+1)^2}, \qquad y = -c\sqrt{2}.\frac{t^3(3t^4-1)}{(t^4+1)^2}.$$

On voit ainsi que la courbe est du huitième degré. En changeant $t$ en $-t$, $x$ et $y$ changent de signe, donc elle est symétrique par rapport à l'origine, et il suffira de donner à $t$ des valeurs positives.

De plus si l'on change $t$ en $\frac{1}{t}$, $x$ se change en $-y$ et $y$ en $-x$, par suite la courbe est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice des axes.

En résumé, cette courbe est symétrique par rapport aux deux bissectrices des axes, et on obtiendra le quart de cette courbe en faisant varier $t$ de 0 à 1.

Les dérivées de $x$ et de $y$ par rapport à $t$ sont

$$\frac{dx}{dt} = c\sqrt{2}.\frac{3t^8 - 26t^4 + 3}{(t^4+1)^3}, \qquad \frac{dy}{dt} = c\sqrt{2}.\frac{t^2(3t^8 - 26t^4 + 3)}{(t^4+1)^3}.$$

On voit aisément que le trinome $3z^2 - 26z + 3$ a une racine $z_1$ comprise entre 0 et 1, et cette racine est plus petite que $\frac{1}{3}$; par suite les valeurs remarquables de $t$ sont 0, $\sqrt[4]{z_1}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ et 1, et nous avons le tableau de variations suivant :

| $t$ | 0 | | $\sqrt[4]{z_1}$ | | $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dx}{dt}$ | | + | | — | | | |
| $\frac{dy}{dt}$ | | + | | — | | — | |
| $x$ | 0 | croît | *max* | décroît | $\frac{9c\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}$ | décroît | $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ |
| $y$ | 0 | croît | *max* | décroît | 0 | décroît | $-\frac{c\sqrt{2}}{2}$ |

ce qui donne la branche de courbe ci-contre (*fig.* 2).

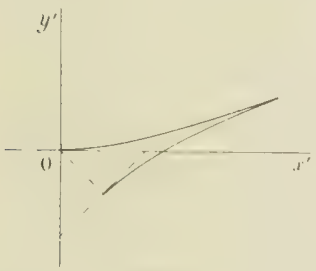


Fig. 2.

Le coefficient angulaire de la tangente en chaque point est égal à $\frac{dy}{dx} = t^2$. Le point correspondant à $t = \sqrt[4]{z_1}$ est un point de rebroussement.

Achevons par symétrie par rapport aux bissectrices des axes $Ox'$ et $Oy'$, et en rétablissant les axes primitifs $Ox$ et $Oy$ nous obtenons la figure 3. On peut remarquer que la courbe est tangente à l'hyperbole $x^2 - y^2 - c^2 = 0$ en ses sommets.

J. LOUIN, lycée de Toulouse.

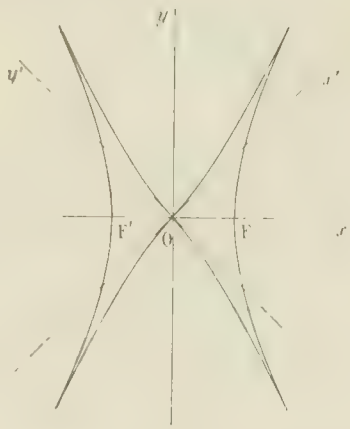


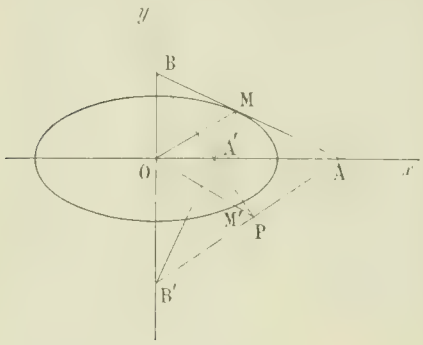
Fig. 3.

Bonnes solutions par M. Parrod, à Vesoul, et par M. J. Haag, qui a envoyé en outre une excellente solution géométrique que le manque de place nous empêche d'insérer.

---

**1218.** — *Etant donnée une ellipse rapportée à ses axes,* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, *on mène la tangente et la normale en un point* M *de cette courbe. Ces droites rencontrent* $Ox$ *respectivement en* A *et* A', *et* $Oy$ *en* B *et* B'. *Les cercles qui ont pour diamètres* AA' *et* BB' *se coupent au point* M *et en un autre point* P. *Démontrer que* $OM \times OP = a^2 - b^2$ *et trouver le lieu du point* P *quand le point* M *décrit l'ellipse.*

Les droites OA et B'M sont deux hauteurs du triangle ABB', par suite la droite BA' est perpendiculaire à la droite AB' au point P où ces deux droites se rencontrent. Par suite ce point est le second point de rencontre des cercles décrits respectivement sur AA' et sur BB' comme diamètres.




Pour trouver les coordonnées de ce point, nous chercherons les équations des droites AB' et BA' et nous calculerons les coordonnées de leur point de rencontre.

Soient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse, $a \cos\varphi$ et $b \sin\varphi$ les coordonnées du point M. La tangente et la normale en ce point ont respectivement pour équations

$$\frac{x \cos\varphi}{a} + \frac{y \sin\varphi}{b} - 1 = 0, \qquad \frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0.$$

Les points A et A' ont pour abscisses $\frac{a}{\cos\varphi}$ et $\frac{c^2 \cos\varphi}{a}$; les points B et B' ont pour ordonnées $\frac{b}{\sin\varphi}$ et $-\frac{c^2 \sin\varphi}{b}$.

Par suite les droites AB' et A'B ont respectivement pour équations

$$\frac{x}{\frac{a}{\cos\varphi}} - \frac{y}{\frac{c^2 \sin\varphi}{b}} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{\frac{c^2 \cos\varphi}{a}} + \frac{y}{\frac{b}{\sin\varphi}} - 1 = 0$$

ou

$$c^2 x \sin\varphi \cos\varphi - aby - ac^2 \sin\varphi = 0, \qquad abx + c^2 y \sin\varphi \cos\varphi - bc^2 \cos\varphi = 0.$$

En résolvant ces deux équations, on a

$$x = \frac{ac^2 \cos\varphi (c^2 \sin^2\varphi + b^2)}{c^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi + a^2 b^2}, \qquad y = \frac{bc^2 \sin\varphi (c^2 \cos^2\varphi - a^2)}{c^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi + a^2 b^2}.$$

Remarquons que l'on a

$$c^2 \cos^2\varphi - a^2 = -(c^2 \sin^2\varphi + b^2)$$

et

$$c^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi + a^2 b^2 = (c^2 \sin^2\varphi + b^2)(c^2 \cos^2\varphi + b^2)$$

ou

$$c^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi + a^2 b^2 = (c^2 \sin^2\varphi + b^2)(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi).$$

On en déduit

$$(1) \qquad x = \frac{ac^2 \cos\varphi}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}, \qquad y = -\frac{bc^2 \sin\varphi}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi},$$

Telles sont les coordonnées du point P.

Nous avons alors

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 = \frac{c^4 (a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)}{(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)^2} = \frac{c^4}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi} = \frac{c^4}{\overline{OM}^2},$$

par suite

$$OP.OM = c^2.$$

Nous aurons le lieu du point P en éliminant $\varphi$ entre les équations (1).

Nous en tirons d'abord $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{ay}{bx}$, et par suite $\sin\varphi = \frac{-ay}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}}$, $\cos\varphi = \frac{bx}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}}$,

et en portant ces valeurs dans l'une des équations (1) nous obtenons

$$a^2b^2(x^2 + y^2)^2 - c^4(b^2x^2 + a^2y^2) = 0.$$

Cette équation représente une quartique facile à construire en passant en coordonnées polaires.

**Solution géométrique.** — Joignons OM et OP; les quadrilatères OA'BM et OA'PB' étant inscriptibles, on a $\widehat{MOA'} = \widehat{MBA'}$, $\widehat{POA'} = \widehat{A'B'P}$, et comme les deux angles $\widehat{MBA'}$ et $\widehat{A'B'P}$ sont égaux, on en conclut $\widehat{MOA'} = \widehat{POA'}$. De plus $\widehat{OMA'} = \widehat{OBA'}$, $\widehat{OAP} = \widehat{OBA'}$, donc $\widehat{OMA'} = \widehat{OAP}$. On voit ainsi que les triangles OMA' et OAP sont semblables, par suite, on a

$$OM.OP = OA.OA'.$$

Or les droites MA et MA' sont les bissectrices des rayons vecteurs MF et MF'; on a donc $OA.OA' = \overline{OF}^2 = c^2$, et $OM.OP = c^2$.

D'autre part, comme $Ox$ est bissectrice de l'angle MOP, la droite OP rencontre l'ellipse au point M' symétrique de M par rapport à $Ox$. On a $OM'.OP = c^2$, ce qui montre que le lieu du point P est la courbe inverse de l'ellipse par rapport au centre O, la puissance d'inversion étant égale à $c^2$.

L'équation de l'ellipse en coordonnées polaires étant

$$\rho^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega},$$

celle de la courbe lieu du point P sera

$$\rho^2 = \frac{c^4(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega)}{a^2b^2}.$$

T. LEMOYNE, à Troyes.

Bonnes solutions par MM. E.-N. Barisien; R. Bouvaist; Blanchot, à Aurillac; J. Hag... Marcel Rolland; Emile Sizaire.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1296.** — On considère les coniques C ayant un foyer donné F et telles qu'une droite donnée D soit la directrice relative à l'autre foyer.

1° Enveloppe des cercles principaux des coniques C.

2° En déduire l'enveloppe des coniques elles-mêmes.

3° Construire les deux coniques C tangentes à une droite $\Delta$. Discuter leur réalité et leur genre quand la droite $\Delta$ varie.

4° Construire les deux coniques C dont le cercle orthoptique est orthogonal à un cercle donné A. Cas où le cercle A est de rayon nul. Enveloppe des cercles orthoptiques des coniques C.

**1297.** — Un point M décrit la parabole $y^2 - 2px = 0$ sous l'action d'une force constamment parallèle à la droite $y = mx$. La vitesse initiale du mobile est égale à $v_0$ et est perpendiculaire à l'axe de la courbe.

1° Calculer en fonction de $y$ les projections de la vitesse et de l'accélération du mobile. Examiner le cas particulier où $m = 0$.

2° Construire la courbe décrite par l'extrémité du vecteur vitesse mené à chaque instant par la position du mobile.

3° Même problème pour le vecteur accélération.

4° Equations du mouvement du point M.

J. Demeunynck.

**1298.** — Un cylindre circulaire droit, creux et très mince, est placé sur un plan incliné, d'inclinaison $\alpha$, l'axe étant horizontal. Il descend en roulant sur le plan incliné. Calculer son accélération.

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1220.** — *Si on considère deux ellipses coaxiales,* E *et* E′, *et une tangente* T *quelconque à la développée de* E′ *et que l'on désigne par* P *et* P′ *les pôles de* T *par rapport aux ellipses* E *et* E′, *la perpendiculaire abaissée de* P *sur* T *et la droite* PP′ *enveloppent chacune une ellipse.*

Soient
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$
et
$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0$$
les équations des ellipses E et E′. Une tangente quelconque à la développée de E′ est une normale à E′ en un certain point de paramètre angulaire $\varphi$; elle a donc pour équation
$$\frac{x-a'\cos\varphi}{\dfrac{\cos\varphi}{a'}}=\frac{y-b'\sin\varphi}{\dfrac{\sin\varphi}{b'}},$$
ou
$$a'x\sin\varphi-b'y\cos\varphi-c'^2\sin\varphi\cos\varphi=0.$$
Soit $(\alpha, \beta)$ son pôle par rapport à l'ellipse E; son équation peut alors s'écrire
$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0,$$
et, en identifiant les deux formes, on a de suite $\alpha$ et $\beta$,
$$\frac{\alpha}{a^2a'\sin\varphi}=\frac{-\beta}{b^2b'\cos\varphi}=\frac{1}{c'^2\sin\varphi\cos\varphi},$$
d'où
$$\alpha=\frac{a^2a'}{c'^2\cos\varphi},\qquad \beta=-\frac{b^2b'}{c'^2\sin\varphi}.$$
On aurait de même les coordonnées du pôle de cette droite par rapport à l'ellipse E′,
$$\alpha'=\frac{a'^3}{c'^2\cos\varphi},\qquad \beta'=-\frac{b'^3}{c'^2\sin\varphi}.$$
La perpendiculaire abaissée du premier point, $P(\alpha, \beta)$, sur la droite envisagée a pour équation
$$b'\cos\varphi\left(x-\frac{a^2a'}{c'^2\cos\varphi}\right)+a'\sin\varphi\left(y+\frac{b^2b'}{c'^2\sin\varphi}\right)=0,$$
ou
$$b'x\cos\varphi+a'y\sin\varphi-a'b'\frac{c^2}{c'^2}=0;$$
nous aurons l'enveloppe de cette droite en adjoignant à l'équation précédente sa dérivée par rapport à $\varphi$ et en éliminant $\varphi$ entre les deux équations ainsi obtenues; or la dérivée est
$$-b'x\sin\varphi+a'y\cos\varphi=0,$$
et il suffit d'écrire les deux équations ainsi:
$$b'x\cos\varphi+a'y\sin\varphi=a'b'\frac{c^2}{c'^2},$$
$$b'x\sin\varphi-a'y\cos\varphi=0,$$
de les élever au carré et de les ajouter ensuite pour que l'élimination soit faite. Le résultat est

(1) $$b'^2x^2+a'^2y^2=a'^2b'^2\frac{c^4}{c'^4};$$

cette équation représente visiblement une ellipse ayant les mêmes axes que les deux ellipses E et E'.

La droite qui joint les deux points $P(\alpha,\beta)$ et $P'(\alpha',\beta')$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \dfrac{a^2a'}{c'^2\cos\varphi}, & \dfrac{-b^2b'}{c'^2\sin\varphi} & 1 \\ \dfrac{a'^3}{c'^2\cos\varphi}, & \dfrac{-b'^3}{c'^2\sin\varphi} & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

cette équation se simplifie et s'écrit

$$\begin{vmatrix} x\cos\varphi & -y\sin\varphi & 1 \\ a^2a' & b^2b' & c'^2 \\ a'^3 & b'^3 & c'^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin, développée,

$$b'(b^2-b'^2)x\cos\varphi + a'(a^2-a'^2)y\sin\varphi + \frac{a'b'}{c'^2}(a^2b'^2-a'^2b^2) = 0.$$

Le procédé que nous avons déjà employé nous donne immédiatement l'enveloppe de cette droite. C'est l'ellipse

$$(2) \qquad b'^2(b^2-b'^2)^2x^2 + a'^2(a^2-a'^2)^2y^2 = \frac{a^2b'^2}{c'^4}(a^2b'^2-a'^2b^2)^2,$$

coaxiale aux deux ellipses E et E'.

E. SIZAIRE.

Bonnes solutions : MM. J.-G. Nicolesco, à Bucarest ; M. Treillou ; Blanchot, lycée d'Aurillac.

## MÉCANIQUE

**1215.** — *On considère une parabole* $y^2-2px=0$ *rapportée à deux axes rectangulaires et la normale au point* $M(\alpha, \beta)$ *de cette courbe.*

*Cette normale rencontre l'axe* $Ox$ *en* A *et la parabole en un point* B *autre que* M.

*Le point* M *se meut de façon que sa projection sur* $Oy$ *soit animée d'un mouvement uniforme* $y = at+b$.

1° *Déterminer par ses projections la dérivée géométrique du vecteur* MA.

2° *Même question pour la dérivée géométrique du vecteur* MB.

3° *On mène par l'origine les vecteurs* OP *et* OQ *équipollents à* MB *et à sa dérivée géométrique. Lieux décrits par les points* P *et* Q.

Puisque $\beta = at+b$, et que $\beta^2 = 2p\alpha$, on a aussi

$$\alpha = \frac{(at+b)^2}{2p};$$

par conséquent les équations du mouvement du point M sont

$$\alpha = \frac{(at+b)^2}{2p},$$
$$\beta = at+b.$$

Rien ne serait plus facile que d'avoir la vitesse, puis l'accélération de ce point.

1. Cela posé, l'équation de la normale au point M est

$$\frac{x-\alpha}{-p} = \frac{y-\beta}{\beta};$$

si on y fait $y = 0$, elle donne

$$x - \alpha = p, \qquad y - \beta = -\beta;$$

donc, en appelant X et Y les composantes du vecteur MA, nous avons

$$(1) \qquad X = p, \qquad Y = -\beta,$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \frac{dX}{dt} = 0, \qquad \frac{dY}{dt} = -\frac{d\beta}{dt} = -a.$$

Telles sont les projections de la dérivée géométrique du vecteur MA sur les axes.

Si on mène par l'origine le vecteur équipollent, le lieu de son extrémité est une parallèle à $Oy$.

2. Appelons $\rho$ la valeur algébrique des deux rapports qui constituent les deux membres de l'équation de la normale à la parabole au point M, nous aurons $x = \alpha - p\rho$, $y = \beta(1+\rho)$, pour expression des coordonnées du point courant de cette normale; en écrivant que ce point est sur la parabole et supprimant la solution $\rho = 0$, nous obtenons le $\rho$ du point B, $\rho = -2\frac{\beta^2+p^2}{\beta^2}$; les composantes du vecteur MB sont donc

$$(3) \qquad \begin{cases} X = 2p\,\dfrac{\beta^2+p^2}{\beta^2}, \\ Y = -2\,\dfrac{\beta^2+p^2}{\beta}. \end{cases}$$

Par conséquent les composantes de sa dérivée géométrique sont $\frac{dX}{dt}$ et $\frac{dY}{dt}$; or $\frac{d\beta}{dt} = a$, donc

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = -\dfrac{4ap^3}{\beta^3}, \\ \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{2a(p^2-\beta^2)}{\beta^2}. \end{cases}$$

3. En menant par l'origine les vecteurs OP et OQ équipollents respectivement à MB et à sa dérivée géométrique, les coordonnées des points P et Q ont pour expressions respectives les valeurs (3) et (4). Les lieux des points P et Q sont donc les deux cubiques ayant pour équations paramétriques

$$(P) \begin{cases} x = 2p\dfrac{\beta^2+p^2}{\beta^2}, \\ y = -2\dfrac{\beta^2+p^2}{\beta}; \end{cases} \qquad (Q) \begin{cases} x = -\dfrac{4ap^3}{\beta^3}, \\ y = 2a\,\dfrac{p^2-\beta^2}{\beta^2}. \end{cases}$$

Leurs équations cartésiennes sont respectivement

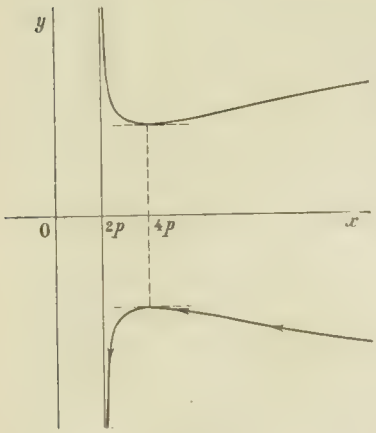
$$xy^2 = 2p(x^2+y^2),$$

et

$$2(y+2a)^3 = ax^2;$$

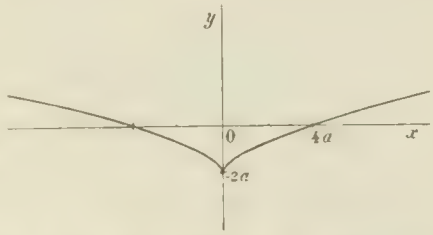
pour les construire nous nous servirons des équations (P) et (Q).

*Construction de la courbe* (P). — Si l'on change $\beta$ en $-\beta$, $x$ ne change pas, $y$ ne fait que changer de signe; la courbe est donc symétrique par rapport à $Ox$, ce qui était évident a priori, et, en tenant compte de cette symétrie, il suffit de faire varier $\beta$ de 0 à $+\infty$. Pour $\beta = 0$ ($\beta = +\varepsilon$), $x = +\infty$ et $y = -\infty$; d'ailleurs $\frac{y}{x} = 0$, on a donc une branche parabolique dans la direction $Ox$, située au-dessous de $Ox$. Quand $\beta$ augmente, $x$ diminue, son minimum est $2p$ et n'est atteint que pour $\beta$ infini; dans les




mêmes conditions $\left(\text{voir } \frac{dy}{d\beta} = 2\frac{p^2-\beta^2}{\beta^2}\right)$, $y$ augmente d'abord, puis diminue : il atteint son maximum pour $\beta = p$, et, pour $\beta$ infini, il redevient égal à $-\infty$. Pour $\beta = p$ on a $x = 4p$, $y = -4p$. Rien n'est plus facile maintenant que de construire la courbe complète.

*Construction de la courbe* (Q). — Nous supposerons $a > 0$ ; l'autre hypothèse, $a < 0$, nous donnerait des courbes symétriques des précédentes par rapport au point O. Si nous changeons $\beta$ en $-\beta$, $x$ ne fait que changer de signe et $y$ ne change pas ; la courbe totale est symétrique par rapport à $Oy$ et, en tenant compte de cette symétrie, il suffit encore de faire varier $\beta$ de 0 à $+\infty$. Pour $\beta = 0$, $(\beta = +\varepsilon)$, $x = -\infty$, $y = +\infty$. $\frac{y}{x} = 0$ ; la courbe a donc une branche infinie parabolique dans la direction $Ox$ et au-dessus de l'axe des $x$. Quand $\beta$ augmente, $x$ augmente et $y$ diminue ; pour $\beta = +\infty$, $x$ est nul et $y = -2a$, $\frac{y}{x} = -\infty$. Enfin $y$ s'annule pour $\beta = p$, et alors $x = -4a$. La courbe est alors aisée à tracer.




Bonne solution : M. J. Haag, à Nancy.

---

**1216.** — *Un mobile décrit une parabole :* $y^2 - 2px = 0$. *Supposant que la vitesse se réduit à* 0 *au passage à l'origine.*

1° *On demande de déterminer la vitesse et l'accélération du mobile en chaque point de sa trajectoire sachant que l'accélération* $\gamma$ *a pour projection sur* $Ox$ : $\gamma_x = kx$, $k$ *étant une constante donnée.*

2° *Même question sachant que* $\gamma_x = kv_x$.

3° — — $\gamma_y = ky$.

4° — — $\gamma_y = kx$.

*Hodographe du mouvement dans chaque cas.*

1. On a par hypothèse $\frac{d^2x}{dt^2} = kx$. Si $k$ est positif et que l'on pose $k = \omega^2$, l'intégrale générale de cette équation différentielle est

$$x = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t};$$

on a alors

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \omega(\alpha e^{\omega t} - \beta e^{-\omega t}).$$

Pour $t = 0$, $x$ et $v_x$ ne peuvent être nulles en même temps, car $\alpha$ et $\beta$ seraient nulles et il n'y aurait pas de mouvement ; il est donc impossible de prendre pour origine des temps l'époque où le mobile passe au sommet de la parabole ; cela n'arrive donc que pour $t = \pm\infty$, si toutefois il y a un mouvement compatible avec les données, à un point de vue purement théorique. Choisissons $t = +\infty$, alors $x$ et $\frac{dx}{dt}$ seront nulles en supposant $\alpha = 0$. Donc finalement

$$(1) \qquad x = ae^{-\omega t}, \qquad v_x = -a\omega e^{-\omega t}.$$

De l'équation de la parabole, nous déduisons

$$(2) \qquad y = \sqrt{2ap}\, e^{\frac{\omega t}{2}}, \qquad v_y = -\frac{\omega\sqrt{2ap}}{2}\, e^{-\frac{\omega t}{2}}.$$

L'accélération a pour composantes

$$(3) \qquad \gamma_x = a\omega^2 e^{-\omega t}, \qquad \gamma_y = \frac{\omega^2}{4}\sqrt{2ap}\, e^{-\frac{\omega t}{2}}.$$

Les équations de l'hodographe sont

$$x = -a\omega\, e^{-\omega t},$$

$$y = -\frac{\omega}{2}\sqrt{2ap}\, e^{-\frac{\omega t}{2}};$$

nous en déduisons aisément

$$(4) \qquad y^2 = -\frac{p\omega}{2}\, x.$$

L'hodographe est donc une parabole ayant $Ox$ pour axe et $Oy$ pour tangente au sommet.

Si nous supposons maintenant $k < 0$ et que nous posions $k = -\omega^2$, nous avons à intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x;$$

son intégrale générale est

$$x = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t,$$

et nous avons

$$v_x = \omega(\alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t).$$

Pour aucune valeur de $t$, $x$ et $v_x$ ne sont nulles en même temps, car cela conduit à $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et alors il n'y a plus de mouvement. Il n'y a donc aucun mouvement compatible avec les données.

**2.** Si $\gamma_x = kv_x$, c'est-à-dire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k\frac{dx}{dt},$$

on a de suite

$$\frac{dx}{dt} = kx + \lambda,$$

et, comme $x$ et $\frac{dx}{dt}$ sont nulles en même temps, on en déduit $\lambda = 0$; par suite,

$$\frac{dx}{x} = kdt,$$

puis

$$\mathrm{L}\frac{x}{a} = kt,$$

$$x = ae^{kt}.$$

On retombe sur un mouvement analogue au précédent.

**3.** Supposons $\gamma_y = ky$, c'est-à-dire

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ky.$$

Nous verrons, comme dans le premier cas, que $k$ doit être positif et que si l'on désigne $k$ par $\omega^2$, on doit prendre $y = ae^{-\omega t}$. On a alors successivement

$$x = \frac{a^2}{2p}\, e^{-2\omega t}, \qquad y = ae^{-\omega t},$$

Puis

$$v_x = -\frac{a^2\omega}{p}\, e^{-2\omega t}, \qquad v_y = -a\omega e^{-\omega t},$$

$$\gamma_x = \frac{2a^2\omega^2}{p}\, e^{-2\omega t}, \qquad \gamma_y = a\omega^2 e^{-\omega t}.$$

L'hodographe a pour équations

$$x = -\frac{a^2\omega}{p} e^{-2\omega t}, \qquad y = -a\omega e^{-\omega t},$$

et, par suite, pour équation cartésienne,

$$y^2 = -p\omega x.$$

Cette courbe est une parabole analogue aux précédentes.

4. Supposons enfin $\gamma_y = kx$, c'est-à-dire

$$\frac{d^2y}{dt^2} = kx.$$

l'équation de la parabole donne $x = \frac{y^2}{2p}$; par conséquent nous avons

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k}{2p} y^2,$$

puis, en multipliant les deux membres par $2\frac{dy}{dt}$,

$$2\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} = \frac{k}{p} y^2 \frac{dy}{dt}.$$

Les deux membres s'intègrent à vue et nous avons ainsi

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{k}{3p} y^3 + \lambda.$$

Comme $y$ et $\frac{dy}{dt}$ doivent être nulles en même temps, $\lambda$ doit être nul et l'on a

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{k}{3p} y^3 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{k}{3p}}\, y^{\frac{3}{2}}.$$

On tire de là

$$y^{-\frac{3}{2}} dy = \sqrt{\frac{k}{3p}}\, t,$$

puis,

$$-2y^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{k}{3p}}\,(t - t_0),$$

$t_0$ étant une constante arbitraire ; finalement

$$y = \frac{12p}{k(t - t_0)^2}.$$

Nous voyons ainsi que $y$ et $\frac{dy}{dt}$ ne sont nuls encore que pour $t = \infty$ ; par conséquent ce dernier mouvement n'est pas plus possible d'une façon complète que les autres : le mobile n'arrive jamais au sommet de la parabole.

L'équation de la parabole, jointe à la précédente, nous donne

$$x = \frac{72p}{k^2(t - t_0)^4}.$$

Les équations du mouvement sont donc

$$x = \frac{72p}{k^2(t - t_0)^4}, \qquad y = \frac{12p}{k(t - t_0)^2};$$

les composantes de la vitesse,

$$v_x = -\frac{288p}{k^2(t - t_0)^5}, \qquad v_y = -\frac{24p}{k(t - t_0)^3},$$

et celles de l'accélération,

$$\gamma_x = \frac{1440p}{k^2(t-t_0)^6}, \qquad \gamma_y = \frac{72p}{k(t-t_0)^4}.$$

Les équations de l'hodographe sont

$$x = -\frac{288p}{k^2(t-t_0)^5}, \qquad y = \frac{-24p}{k(t-t_0)^3},$$

par suite l'équation cartésienne est

$$y^5 = \frac{p^2k}{3}x^3.$$

Cette courbe se construit à vue.

Bonne solution : M. J. Roda, à Toulouse.

# QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

## ÉCOLE CENTRALE (1903, *suite et fin*).

### **Géométrie analytique** (M. Gouilly).

*Géométrie analytique à deux dimensions.*

**2468.** — Déterminer $\lambda$ de façon que l'équation

$$x^2 + 3xy + y^2 + x + y + \lambda = 0$$

représente un système de deux droites.

**2469.** — Conditions pour que l'équation générale du second degré représente un système de deux droites parallèles.

**2470.** — Equation quadratique des bissectrices de l'angle des deux droites

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

**2471.** — Faire tourner de 90° autour de l'origine le faisceau de droites

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

**2472.** — Lieu géométrique des points d'où l'on voit deux cercles sous le même angle.

**2473.** — Cercle passant par deux points et tangent à un cercle donné.

**2474.** — Centre radical des trois cercles

$$2x^2 + 2y^2 + x - y + 1 = 0,$$
$$3y^2 + 3x^2 + 5x - 5y + 2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 3 = 0.$$

**2475.** — Construire les courbes

$$y = x^4, \qquad y^2 = x^3, \qquad y^3 = x^2, \qquad y^4 = x^3,$$

$$y = xe^x, \qquad y = \frac{x}{\sin x}, \qquad y = \frac{\mathrm{L}x}{x-1}, \qquad (x^2+y^2)^2 = y,$$

$$y = x \pm \sqrt{x^2+2x}, \qquad y = x \pm \sqrt{2x-x^2}, \qquad y = x \pm \sqrt{x},$$

$$y = x \pm \sqrt{(x^2-1)^2-4}, \qquad y = 2x \pm \sqrt{(x-2)^2-4}, \qquad y = x+1 \pm \sqrt{(x-1)^2-1},$$

$$y = x \pm \sqrt{x^2-2x-2}, \qquad y = \sqrt{\frac{x^3}{x+4}}, \qquad y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x-4}}.$$

**2476.** — Construire les courbes

$$\rho = \frac{k}{a\cos\omega + b\sin\omega}, \qquad \rho = a\cos\omega + b\sin\omega, \qquad \rho = \operatorname{tg}\omega.$$

**2477.** — Tangente en coordonnées polaires. — Appliquer à $\rho = \frac{1}{\omega}$.

**2478.** — Démontrer la formule $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$. — Trouver les courbes pour lesquelles $V = C^{te}$.

**2479.** — Asymptotes de la courbe $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$.

**2480.** — Soient $f(\omega, \rho) = 0$ l'équation d'une courbe en coordonnées polaires, $\alpha$ une direction asymptotique ; distance de l'asymptote au pôle.

**2481.** — Construire les courbes

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0,$$
$$x^2 + xy + y^2 - x - y = 0,$$
$$y^2 + 3xy + x^2 + x + y = 0.$$

**2482.** — Faire disparaître le terme rectangle de l'équation

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0.$$

**2483.** — Asymptotes d'une conique représentée par l'équation générale du second degré.

**2484.** — Discuter les coniques représentées par l'équation

$$x^2 + y^2 + xy + \lambda(y^2 + y - 1) = 0.$$

**2485.** — On considère une conique ; un point P décrit une droite. Montrer que sa polaire pivote autour d'un point fixe qui est le pôle de cette droite.

**2486.** — Normales d'un point $(\alpha, \beta)$ à la parabole $y^2 - 2px = 0$.

**2487.** — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole $xy = k^2$.

**2488.** — Variation de l'angle de deux diamètres conjugués dans l'hyperbole.

**2489.** — Equation trinome commune aux trois coniques : $y^2 = 2px + qx^2$. Qu'appelle-t-on paramètre dans cette équation ? Quelle est sa signification géométrique ?

**2490.** — Par cinq points dont quatre ne sont pas en ligne droite, on peut faire passer une conique et une seule.

**2491.** — Equation générale des coniques passant par quatre points. — Peut-on avoir des paraboles ?

**2492.** — Que représente l'équation $PQ + \lambda R = 0$ ? — Propriétés des coniques qui ont une sécante commune à l'infini. — Que représente $PQ + \lambda = 0$ ?

**2493.** — Propriétés des cordes de l'hyperbole. — En déduire la construction d'une hyperbole connaissant trois points et les directions asymptotiques.

**2494.** — Construire une ellipse connaissant un foyer, un sommet du petit axe et une tangente.

**2495.** — Construire une parabole connaissant une tangente, un point et la directrice.

**2496.** — Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites. — Construire une parabole connaissant quatre tangentes.

**2497.** — Intersection de deux coniques. — Appliquer à

$$x^2 + y^2 + 2x = 0, \qquad y = x^2.$$

Construire les deux courbes.

*Géométrie analytique à trois dimensions.*

**2498.** — Mener par un point une droite parallèle à l'intersection de deux plans.

**2499.** — Mener par une droite un plan parallèle à l'intersection de deux plans.

**2500.** — Distance d'un point à une droite donnée par l'intersection de deux plans.

**2501.** — Angle de deux droites

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by = c, \\ dx + ey = f; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a'x + b'y = c', \\ d'x + e'y = f'. \end{array}\right.$$

**2502.** — Que représentent les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0, \qquad x^2 - z^2 = xy, \qquad (x + z)(y + z) = yz,$$
$$x^2 - y^2 + (z - x)(z + y) = 0, \qquad (x^2 - y^2) + (z - x)(z - y) = 0, \qquad x^2 - yz + (z - x)(z - y) = 0,$$
$$(x - a)^2 + (x - a)(y - b) - (z - c)^2 = 0, \qquad (x - a)^2 + 2(y - b)(x - a) - 3(z - c)(y - b) = 0 ?$$

**2503.** — On donne la directrice d'un cône $z = 0$, $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ et son sommet $(0, 0, h)$. — Equation de ce cône.

**2504.** — Surface engendrée par la droite $\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$ en tournant autour de $Oy$.

**2505.** — Surface engendrée par une parabole en tournant autour de la tangente au sommet.

**2506.** — Surface de révolution engendrée par $z = 0$, $b^2(x - p)^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ en tournant autour de $Oy$.

**2507.** — Montrer que l'équation $yz + zx + xy + 1 = 0$ représente une surface de révolution.

**2508.** — Que représentent les équations

$$x^3 - (y^2 + z^2) = 0, \qquad (x^2 + y^2)^2 = z, \qquad (x^2 + y^2)^2 = z^3,$$
$$y^4 - x^2 - z^2 = 0, \qquad 4(x^2 + y^2) = z, \qquad z = \sin(x^2 + y^2),$$
$$x^2 + y^2 \pm z = 0, \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 = z - c ?$$

**2509.** — Que représentent les équations

$$xy = z, \qquad x^2 + xy - y^2 + z = 0, \qquad x^2 - y^2 = z,$$

$$x^2 + xy + 2y^2 + z + x + y = 0, \qquad x^2 - y^2 + 2xy + 2yz - x + y = 0,$$

$$x^2 + xy + yz + z + y = 0, \qquad x^2 - z^2 + xy + yz - x + y = 0,$$

$$xy + y^2 - z^2 + x - y = 0 \text{ (cône asymptote)}, \qquad x^2 + xy + yz + y + z = 0 \text{ (cône asymptote)}?$$

**2510.** — Rapporter un cône du second degré à ses plans de symétrie.

**2511.** — Démontrer que les sections de la surface $xy = z$ par des plans parallèles sont homothétiques. — Comment voit-on qu'une section plane est de même nature que sa projection ?

**2512.** — Qu'est-ce qui caractérise l'équation d'un cylindre parabolique ?

**2513.** — Différents cas de l'intersection des surfaces du second ordre par le plan tangent.

## Mécanique (M. Gouilly).

**2514.** — Homogénéité dans la formule $x = \frac{1}{2} gt^2$.

**2515.** — Etudier les mouvements rectilignes

$$x = t^2 - t + 1,$$
$$x = t^2 - 5t + 6,$$
$$x = 2 - 3t + t^2,$$
$$x = \sin(3t + 4),$$
$$x = \mathrm{L}t.$$

Courbes des espaces, des vitesses, des accélérations.

**2516.** — Vitesse dans un mouvement varié rectiligne. — Comment mesure-t-on la vitesse dans la machine d'Atwood ?

**2517.** — On lance verticalement un corps pesant de bas en haut avec une vitesse de $20^{\mathrm{m}}$. Au bout de combien de temps arrivera-t-il à la hauteur $h$ ?

**2518.** — Mouvement vibratoire, amplitude, période, phase. — Montrer que le mouvement $x = a \cos \omega t$ est la projection d'un mouvement circulaire uniforme.

**2519.** — Hodographe ; son utilité.

**2520.** — Projection de la dérivée géométrique d'un vecteur sur un axe ; — sur le vecteur lui-même.

**2521.** — Un mobile se déplace de telle sorte que la somme de ses distances à deux points fixes reste constante. Trajectoire ; tangente en un point.

**2522.** — Etudier le mouvement $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$. Trajectoire, vitesse, accélération.

**2523.** — Dimensions d'une vitesse angulaire.

**2524.** — Vitesse d'un mobile qui parcourt un cercle de $4^{\mathrm{m}}$ de rayon en 10 secondes. — Vitesse angulaire.

**2525.** — Un volant fait 150 tours par minute ; son diamètre est de $4^{\mathrm{m}}$. Vitesse d'un point de la circonférence.

**2526.** — Accélération normale dans un mouvement circulaire.

**2527.** — Trajectoire du mouvement dont les projections sont

$$x = a + \alpha \cos \omega t, \qquad y = b + \beta \sin \omega t.$$

**2528.** — Vitesse au temps $t$ ; accélération.

**2529.** — Trajectoire du point M de coordonnées

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \qquad y = b \sin(\omega t + \beta).$$

**2530.** — Mouvement le plus général dont l'accélération est constante en grandeur et en direction. — Equations du mouvement en supposant l'accélération parallèle à $Oz$.

**2531.** — Le mouvement qui a pour projections sur trois axes trois mouvements harmoniques est plan.

**2532.** — Construire la droite $\rho \cos \omega = p$. — Le rayon vecteur tournant d'un mouvement uniforme, on demande la vitesse du point M sur le rayon vecteur.

**2533.** — On considère la courbe $y = x^3$. Un point M parcourt cette courbe de façon que $x = 2t + 1$. — Vitesse et accélération en un point. — Même question pour la courbe $y^3 = x^2$, $x = 2t + 1$ ; ou encore $y^3 = x^2$, $x = 2t^2 + 1$.

**2534.** — Que signifie cette expression : invariabilité de la masse ?

**2535.** — Unités fondamentales du système C. G. S. — Différence entre le gramme-masse et le gramme-poids. — Unité de force. — Comment voit-on que gramme-poids = 981 dynes à Paris ?

**2536.** — Vitesse et accélération à l'origine du mouvement

$$y = 2 + 2t + 4t^2.$$

Quelle est la force imprimant ce mouvement à un corps de masse 10 ?

**2537.** — Quelle force faut-il appliquer à un point de masse M pour lui communiquer le mouvement rectiligne

$$x = at^2 + bt + c\,?$$

**2538.** — Équations du mouvement d'un point matériel de 10 kilogs, soumis à une force constante de 50 kilogs ; on suppose en outre que ce point matériel a une vitesse initiale $v_0$, définie en direction par ses cosinus directeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

**2539.** — Mouvement d'un point sur un plan incliné rugueux.

**2540.** — Soit un point matériel pesant placé sur un plan incliné faisant l'angle $\alpha$ avec le plan horizontal ; on lui applique une force F dirigée vers le haut et parallèle au plan supposé rugueux. Valeur de F pour laquelle il y a équilibre.

**2541.** — Les petites oscillations du pendule simple sont isochrones.

**2542.** — Variation de la force centripète dans le mouvement d'un point matériel de masse $m$, le point décrivant un cercle suivant la loi $\theta = t^2 - 1$.

**2543.** — Equilibre d'un point matériel placé sur une courbe matérielle.

**2544.** — Que considère-t-on dans une force ? — Utilité de la théorie des vecteurs.

**2545.** — Que se propose-t-on dans la composition des vecteurs ? Qu'entend-on par systèmes de vecteurs équivalents ?

**2546.** — Réduction d'un système de vecteurs à un vecteur unique et à un couple minimum.

**2547.** — Un système matériel soumis à l'action de trois forces est en équilibre. Quelles conditions doivent remplir les trois forces ?

**2548.** — A quelles équations satisfait un système de forces appliqué à un solide matériel libre ? — à un système matériel libre ?

**2549.** — Qu'entend-on par poids d'un corps ? Quel est son point d'application ?

**2550.** — Équations du centre de gravité.

**2551.** — Centre de gravité du périmètre d'un triangle ; d'un secteur circulaire ; d'une pyramide.

**2552.** — Équilibre du levier. — Détermination géométrique de la réaction.

**2553.** — Un cylindre vertical de poids P repose sur un plan horizontal. Sur sa base supérieure agit une force F ; on demande la réaction du plan.

**2554.** — Un point matériel décrit une trajectoire matérielle avec une vitesse $v$ à l'instant $t$. Déterminer la réaction.

**2555.** — Une poutre chargée d'un poids P repose sur deux appuis A et B. Déterminer la réaction de ces deux appuis. — Cas de trois appuis en supposant plusieurs poids P, Q, R.

## Géométrie (M. Lévi).

**2556.** — Trouver dans le plan d'un triangle ABC un point d'où l'on voie les trois côtés sous le même angle.

**2557.** — Mener entre deux circonférences, une droite de longueur donnée, parallèlement à une direction donnée.

**2558.** — Trois droites concourantes $Ox$, $Oy$, $Oz$ sont les médianes d'un triangle dont on connaît le sommet A ; construire le triangle. — Même problème en supposant que $Ox$, $Oy$, $Oz$ sont bissectrices.

**2559.** — On donne trois points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. — Ce sont les pieds des hauteurs d'un triangle ABC. — Construire le triangle.

**2560.** — Sur le diamètre d'un cercle on prend de part et d'autre du centre $O\alpha = O\beta$ ; M étant un point de la circonférence, montrer que $\overline{M\alpha}^2 + \overline{M\beta}^2 = C^{te}$.

**2561.** — Lieu des sommets des triangles ayant même base AB et dont la bissectrice de l'angle C rencontre AB en un point fixe.

**2562.** — Lieu des points d'un plan d'où l'on voit deux cercles sous le même angle.

**2563.** — Lieu des points d'un plan dont la somme des distances à deux droites fixes est constante. — Même problème dans l'espace, en prenant deux plans fixes.

**2564.** — On considère un trièdre SABC ; on le coupe par un plan P qui détermine le triangle ABC ; lieu du point de rencontre des médianes de ce triangle quand le plan P se déplace parallèlement à lui-même.

**2565.** — Dans un tétraèdre, les droites joignant les milieux des arêtes opposées sont deux à deux dans un même plan.

**2566.** — Couper un angle polyèdre à quatre faces suivant un parallèlogramme.

**2567.** — Lieu du milieu d'une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires de l'espace.

**2568** — On donne trois droites A, B, C non situées deux à deux dans un même plan. Combien de droites $\alpha\beta\gamma$ s'appuient sur ces trois droites. Construire $\alpha\beta\gamma$ de façon que $\alpha\beta = \beta\gamma$ ; $\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = k$.

**2569.** — Lieu du milieu d'une droite parallèle à un plan donné et s'appuyant sur deux droites fixes.

**2570.** — On a trois droites parallèles à un même plan ; montrer que toutes les droites s'appuyant sur ces trois droites sont elles-mêmes parallèles à un même plan.

**2571.** — On donne deux droites A et B et un plan P ; mener une droite de longueur donnée s'appuyant sur A et B et parallèle au plan P.

**2572.** — Construire une droite rencontrant deux droites données et faisant avec chacune d'elles un angle donné.

**2573.** — Mener par un point une droite faisant un angle $\alpha$ avec un plan P et passant à une distance donnée d'une droite donnée.

**2574.** — Par un point donné, mener un plan faisant des angles donnés avec deux droites données.

**2575.** — On donne deux droites A et B ; mener parallèlement à une direction $\Delta$, une droite à des distances $a$ et $b$ de A et B.

**2576.** — Centre et rayon d'une sphère passant par trois points et tangente à un plan.

**2577.** — Centre et rayon d'une sphère passant par deux points et tangente à deux plans donnés.

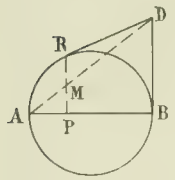
**2578.** — On considère deux cercles extérieurs. Lieu des centres des cercles tangents à ces deux cercles

**2579.** — On donne deux droites rectangulaires et une ellipse de grandeur constante tangente à ces deux droites. Lieu du centre de cette ellipse.

**2580.** — Si on considère deux tangentes fixes à une ellipse, et une tangente mobile, que sait-on sur cette tangente ?

**2581.** — Lieu du milieu d'une droite de longueur constante qui glisse sur deux droites rectangulaires.

**2582.** — On a un cercle de diamètre AB, une tangente fixe BD et une tangente variable DR ; on joint DA. — Lieu du point de rencontre M de DA avec l'ordonnée du point R.




**2583.** — On considère une ellipse de grand axe AA' et un point M sur l'ellipse. On joint MA, MA' et on mène une perpendiculaire au grand axe qui rencontre l'ellipse aux points R et R' et les droites MA, MA' aux points S et S'. Montrer que R, R', S, S' forment une division harmonique.

**2584.** — Construire une ellipse dont on connaît le grand axe, un point et la tangente en ce point.

**2585.** — Construire une ellipse connaissant un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles.

**2586.** — Construire une ellipse connaissant: un foyer, l'extrémité du petit axe et une tangente ; — un foyer, un sommet de l'axe focal et une tangente ; — un foyer, deux tangentes et un point ; — un foyer, une tangente et deux points ; — un foyer et trois points.

**2587.** — On considère une ellipse dont le grand axe est AA' ; soit RR' une corde menée par le foyer F : on joint AR, AR', qui coupent la directrice relative au foyer F en N et N' ; montrer que l'angle NFN' est droit.

**2588.** — Lieu des foyers des ellipses qui passent par un point et ont pour directrices deux droites données.

**2589.** — Construire une ellipse connaissant les deux directrices et deux points ; — les deux directrices et deux tangentes ; — les deux directrices, un point et la tangente en ce point ; — trois points et une directrice.

**2590.** — Construire une hyperbole connaissant les directions asymptotiques et les foyers ; — une asymptote, un foyer et une tangente.

**2591.** — Intersection d'une droite avec une hyperbole donnée par ses asymptotes et ses foyers.

**2592.** — Lieu des points d'un plan équidistants d'un cercle et d'une droite.

**2593.** — Construire une parabole connaissant deux points et la directrice.

**2594.** — Lieu du foyer d'une parabole de directrice donnée et tangente à une droite donnée. — Construire une parabole connaissant la directrice et deux tangentes.

**2595.** — Construire une parabole connaissant deux tangentes et les points de contact ; — deux points, une tangente et son point de contact ; — la tangente au sommet et deux autres tangentes.

**2596.** — Parabole tangente à quatre droites ; — Lieu du foyer des paraboles tangentes à trois droites.

**2597.** — Tangentes communes à deux paraboles d'axes parallèles.

## Géométrie descriptive (M. Lévi).

**2598.** — Distance de deux droites (géométrie cotée).

**2599.** — Construire un tétraèdre régulier dont on donne la base dans le plan horizontal.

**2600.** — Etant données deux droites A et B invariablement liées, peut-on les faire tourner autour d'un axe vertical jusqu'à ce que leurs projections horizontales soient parallèles ?

**2601.** — Amener deux droites invariablement liées à être simultanément de front.

**2602.** — On donne deux plans par leurs traces ; les amener par des rotations à être tous les deux verticaux.

**2603.** — Angle d'un plan donné par ses traces avec la ligne de terre.

**2604.** — On a deux plans dont l'un est de profil. — Mener par un point de la ligne de terre un plan faisant avec les deux autres des angles donnés.

**2605.** — Projections d'une droite de profil passant par un point donné et faisant un angle de 30° avec le plan horizontal.

**2606.** — On considère un plan donné par ses traces. — Mener par le point de rencontre des traces du plan une droite faisant un angle donné avec ce plan.

**2607.** — Mener par un point une droite qui fasse des angles donnés avec deux droites données. — Même problème en géométrie cotée.

**2608.** — Droite s'appuyant sur deux droites données et faisant un angle donné avec le plan horizontal.

**2609.** — On donne un plan par ses traces et dans ce plan un point $(o, o')$. — Projections du cercle ayant $(o, o')$ pour centre et qui est tangent à la trace horizontale du plan.

**2610.** — Mener par une droite AA' un plan tel que ses traces forment un angle droit.

**2611.** — Sphère inscrite dans un tétraèdre.

**2612** — On donne deux droites A et B. Trouver sur A un point à une distance $d$ de la droite B.

**2613.** — On considère un cylindre de révolution à axe de front. Etant donnée la projection verticale d'un point, trouver sa projection horizontale et le plan tangent en ce point.

**2614.** — Un tétraèdre SABC a sa base ABC dans le plan horizontal : 1° Contour apparent du cône qui a pour sommet le point S et pour base le cercle circonscrit au triangle ABC ; — 2° contour apparent du cône qui a pour sommet A et pour base le cercle circonscrit au triangle SBC.

**2615.** — Contour apparent d'un cône de révolution dont l'axe et le demi-angle au sommet sont donnés. — Mener à ce cône une normale par un point extérieur.

**2616.** — On a une sphère donnée par ses deux projections et un point sur la ligne de terre. — C'est le sommet d'un cône circonscrit à la sphère ; intersection de ce cône par une droite DD'.

**2617.** — Par un point donné, circonscrire un cône à une sphère donnée. — Axes de la projection de la ligne de contact (géométrie cotée).

**2618.** — Mener à deux cônes de révolution des plans tangents parallèles.

**2619.** — Normale commune à deux cônes de révolution dont les axes sont respectivement une verticale et une droite de bout, les angles au sommet étant les mêmes.

**2620.** — Etant donnés dans un plan horizontal trois points par leurs projections, construire une sphère passant par ces trois points et tangente à un plan donné de bout.

**2621.** — Par deux points $(a, a')$, $(b, b')$ mener un cylindre de révolution tangent à un plan donné.

**2622.** — Déterminer un cylindre de révolution connaissant un point et deux plans tangents. Faire l'épure, les deux plans étant donnés par leurs traces.

**2623.** — Contours apparents d'un cône de révolution défini par deux génératrices et un plan tangent.

**2624.** — On a deux plans verticaux et une droite dans chacun de ces plans. — Peut-on mener une sphère tangente aux deux plans en des points déterminés des deux droites ?

**2625.** — Section par un plan quelconque d'un cône de révolution dont l'axe est de front.

**2626.** — Section par un plan, défini par sa ligne de plus grande pente, d'un cône circonscrit à une sphère.

**2627.** — On donne une droite AA' qui est l'axe d'un cylindre de révolution de rayon $r$. — Section par un plan ; points où la tangente est horizontale.

**2628.** — Couper un cône par un plan, de façon que la section : 1° soit une hyperbole équilatère ; — 2° se projette horizontalement suivant une hyperbole équilatère.

**2629.** — On donne un tétraèdre régulier SABC dont la base ABC est dans le plan horizontal ; on considère le cône qui a pour sommet B et pour base le cercle circonscrit à la face ASC. — Section de ce cône par le bissecteur du dièdre AC.

**2630.** — On a un tétraèdre de sommet S dont la base ABC est dans le plan horizontal. — SA est l'axe d'un cylindre de révolution de rayon R. — Intersection de ce cylindre avec le bissecteur du dièdre BC.

**2631.** — On considère un tétraèdre régulier dont la base est dans le plan horizontal ; un cylindre de révolution autour de SA a pour rayon $\frac{1}{2}$ SA. — Intersection avec chacune des faces du tétraèdre.

**2632.** — On considère un ellipsoïde de révolution à axe horizontal. — Contour apparent vertical de la surface.

**2633.** — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical avec une droite de front ; avec une droite quelconque.

**2634.** — Intersection d'une droite avec un ellipsoïde de révolution à axe quelconque.

**2635.** — On considère un ellipsoïde de révolution à axe vertical. On le coupe par un plan ; axes de la projection horizontale de la section.

**2636.** — Plan de la courbe de contact d'un cône circonscrit à un ellipsoïde de révolution à axe vertical. — Trace horizontale de ce cône.

**2637.** — Mener par une horizontale un plan tangent à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

**2638.** — On considère un ellipsoïde de révolution à axe horizontal. — Plan tangent par une horizontale.

**2639.** — Mener par une droite un plan tangent à un paraboloïde de révolution à axe vertical.

**2640.** — Contour apparent vertical de la surface engendrée par une droite quelconque en tournant autour d'une droite du plan horizontal.

**2641.** — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et d'une droite rencontrant l'axe.

**2642.** — On donne une verticale Z et une droite graduée G. Cette droite, en tournant autour de Z, engendre un hyperboloïde. — Asymptotes de la section par un plan P donné par sa ligne de plus grande pente.

**2643.** — Section d'une surface de révolution à axe de front par le plan bissecteur du premier dièdre.

**2644.** — Section par un plan quelconque d'une surface de révolution engendrée par un cercle tournant autour d'une droite de front.

**2645.** — On coupe une sphère par un plan de bout ; la section est la directrice d'un cylindre dont on donne la direction des génératrices. — Intersection des deux surfaces.

**2646.** — On coupe un ellipsoïde de révolution à axe vertical par un plan de bout ; la section est la directrice d'un cône dont le sommet est en un point donné S. Intersection des deux surfaces.

**2647.** — On donne une sphère de centre O et deux points A et B sur la ligne de terre, symétriques par rapport au plan de profil du centre de la sphère. Intersection des cônes circonscrits à la sphère de sommets A et B.

**2648.** — Intersection de deux cônes à bases circulaires, inscrits dans le tétraèdre SABC et ayant pour sommets les points B et C.

**2649.** — On considère un tétraèdre régulier SABC dont la base est dans le plan horizontal. — Intersection des deux cylindres dont les bases sont les cercles circonscrits aux faces SAB, SAC, les génératrices étant respectivement parallèles aux arêtes SC, SB. — Même problème en remplaçant les cylindres par des cônes de sommets B et C.

**2650.** — On donne dans le plan $P\alpha Q'$ un cercle tangent aux deux traces : c'est la base commune de deux cercles dont les sommets sont deux points $s$ et $\sigma$ sur la ligne de terre. — Intersection des deux cônes.

**2651.** — Intersection de deux cônes ayant pour sommets $(s, s')$, $(t, t')$ et pour base commune une ellipse dans le second plan bissecteur.

**2652.** — Dans le plan horizontal, on a une hyperbole, directrice commune de deux cylindres, dont on donne les directions de génératrices D et Δ. Intersection des deux cylindres.

**2653.** — Dans un plan horizontal, on donne une courbe, un point de cette courbe et la tangente en ce point ; par le point de contact O on mène une droite graduée 0, 1, 2, ... 6 ; le point 6 est le sommet d'un cône dont la directrice est la courbe donnée. — On considère une seconde courbe, directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la tangente au point O de la première courbe. — Intersection des deux surfaces.

**2654.** — Intersection de deux cônes de révolution à axes verticaux.

**2655.** — Intersection de deux hyperboloïdes de révolution ayant leurs axes parallèles et même plan de cercle de gorge. — Montrer que l'intersection se projette suivant un cercle sur le plan de symétrie commun. — Application à l'intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'une droite.

**2656.** — On considère un tore à axe vertical et sa section par le premier bissecteur. — C'est la base d'un cône qui a son sommet sur l'axe du tore. — Intersection des deux surfaces.

**2657.** — On considère un paraboloïde hyperbolique défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices quelconques. — On donne de plus un point de la surface par sa projection $m'$. — Plan tangent en ce point.

**2658** — On considère un paraboloïde hyperbolique ayant comme plans directeurs le plan horizontal et un plan de bout. — On donne en outre une génératrice horizontale ; déterminer deux génératrices du paraboloïde. — Si $m'$ est la projection verticale d'un point, trouver sa projection horizontale.

**2659.** — On considère un paraboloïde hyperbolique qui a comme plans directeurs deux plans verticaux ; on trace deux génératrices d'un même système ; $m$ étant la projection horizontale d'un point de la surface, déterminer la projection verticale. — Plan tangent en ce point.

**2660.** — Contour apparent d'un paraboloïde hyperbolique admettant le plan vertical comme plan directeur et donné par deux génératrices horizontales.

**2661.** — Contour apparent d'un paraboloïde hyperbolique défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices quelconques de l'autre système. — Trouver le sommet de la parabole de contour apparent.

**2662.** — Mener à un paraboloïde hyperbolique un plan tangent parallèle à la ligne de terre.

**2663.** — Plan tangent par un point extérieur à un paraboloïde hyperbolique défini par un plan de bout comme plan directeur et deux génératrices horizontales.

**2664.** — On considère un paraboloïde hyperbolique à plan directeur de front, défini par deux génératrices horizontales. — Ombre propre, la lumière provenant d'un point lumineux O.

**2665.** — Mener à un paraboloïde hyperbolique de plans directeurs R et R' un plan tangent parallèle à un plan donné. — Cas d'un paraboloïde admettant les deux plans de projection comme plans directeurs.

**2666.** — Mener à un paraboloïde hyperbolique défini par deux plans directeurs de bout et deux génératrices d'un même système un plan tangent parallèle au plan bissecteur du premier dièdre. — Section de ce paraboloïde par un plan horizontal. — Sommet.

**2667.** — Un paraboloïde hyperbolique est défini par deux génératrices de front et un plan directeur horizontal. — Sommet.

**2668.** — Un paraboloïde hyperbolique a pour plans directeurs le plan horizontal et un plan de bout. On donne deux génératrices horizontales. — Déterminer le sommet.

**2669.** — Section d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal par un plan de bout. — Section par le bissecteur du second dièdre. — Tangente en un point.

**2670.** — On a un paraboloïde hyperbolique dont les plans directeurs sont de bout et dont on donne deux génératrices d'un même système. — On le coupe par le plan bissecteur du premier dièdre. — Nature de la section. — Asymptotes.

**2671.** — Intersection d'une droite et d'un paraboloïde à plan directeur horizontal défini par deux droites.

**2672.** — Plan tangent par une droite à un paraboloïde hyperbolique. — Cas où la droite est parallèle à une génératrice du paraboloïde.

**2673.** — On considère un paraboloïde hyperbolique défini par deux droites de front et le plan directeur horizontal. — Plan tangent par une verticale.

**2674.** — On donne un paraboloïde hyperbolique ayant pour plans directeurs un plan vertical et un plan debout; on donne deux génératrices du système de bout. — Mener par une verticale donnée un plan tangent à la surface.

**2675.** — On a un paraboloïde à plan directeur horizontal défini par une droite de front et une droite quelconque. — Cette droite en tournant autour d'une verticale menée par un de ses points engendre un cône; intersection avec le paraboloïde.

**2676.** — On a un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, défini par deux génératrices de l'autre système. — On considère le point SS'. — C'est le sommet d'un cône dont la base est un cercle dans le plan horizontal. — Intersection des deux surfaces.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1299.** — Construire les deux courbes :

(C) $$y = a \cos 2x,$$

(C') $$y = b \sin x,$$

dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$.

Un point M décrit la courbe (C) de telle façon que sa vitesse soit égale pour chaque valeur de $x$ à l'ordonnée de (C'), le mouvement ayant lieu dans le sens des $x$ croissants.

Tracer l'hodographe du mouvement de M.

On déterminera la sous-normale polaire en un point quelconque de cet hodographe en fonction de l'abscisse $x$ du mobile M.

2° Même question, la courbe (C') étant remplacée par

(C'') $$y = +b\sqrt{\sin^2 \frac{3x}{2}}.$$

3° Même question, la courbe (C') étant remplacée par

(C''') $$y = +b\sqrt{\sin^2 2x}.$$

J. Demeunynck.

**1300.** — Un point M parcourt la parabole $y^2 - 2px = 0$. Un autre point mobile M' décrit la parabole $y^2 - 2qx = 0$ de telle façon que sa vitesse soit constamment parallèle à celle du point M.

1° Exprimer les coordonnées du point M' en fonction de celles de M.

2° On suppose que le point M possède à chaque instant une accélération dont la projection sur $Oy$ est égale à celle du segment $\overline{MM'}$. Former les équations du mouvement de M.

A l'époque initiale le point M est à l'origine des coordonnées et possède une vitesse $v_0$.

On suppose $p$ et $q$ positifs $p$ étant $> q$.

J. Demeunynck.

**1301.** — Pour chaque point M d'une ellipse, on considère trois droites : 1° OM, qui joint le point M au centre de l'ellipse; 2° la normale; 3° la droite menée par M et faisant avec les axes les mêmes angles que la normale.

Il existe trois droites formant avec celles-ci un faisceau harmonique. Montrer que chacune de ces droites est normale à une ellipse fixe.

E. N. Barisien.

# ERRATUM

Une erreur de mise en pages dans la note de M. Ch. Michel, parue dans le N° de mars de la *Revue*, a fait omettre un passage qui doit s'intercaler à la page 418, entre les lignes 15 et 16.

Pour rétablir le texte complet, il faut lire, à partir du 2e alinéa de cette page :

Considérons une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse; soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les anomalies des quatre points de rencontre de l'hyperbole avec l'ellipse. Le cercle qui passe par les trois points d'anomalies $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, rencontre l'ellipse en un quatrième point, d'anomalie $\varphi'_4$. D'après ce qui précède, on a simultanément

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0,$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi'_4 = \pi,$$

à $2k\pi$ près. Donc,

$$\varphi_4 = \pi + \varphi'_4,$$

à $2k\pi$ près. Autrement dit, les points d'anomalies $\varphi_4$ et $\varphi'_4$ sont diamétralement opposés sur l'ellipse.

Donc, *si l'on coupe une ellipse par une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes, trois des points de rencontre et le point de l'ellipse diamétralement opposé au quatrième sont sur une circonférence.*

Ce résultat s'applique en particulier aux pieds des quatre normales menées d'un point à une ellipse ; on obtient alors un théorème dû à Joachimstal.

Proposons-nous encore de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points d'une ellipse, d'anomalies $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, soient sur une conique passant par le centre C de l'ellipse et le point à l'infini sur l'axe focal. Soient A et B les sommets de l'ellipse situés sur cet axe, le premier étant d'anomalie 0, le second d'anomalie $\pi$. Si $\mu$ est le point du cercle décrit sur AB comme diamètre, qui est situé sur la perpendiculaire menée à l'axe focal par le point M, d'anomalie $\varphi$, et du même côté que M par rapport à l'axe, nous avons vu que l'angle de la tangente en A avec la droite A$\mu$ est égal, à $k\pi$ près, à $\frac{\varphi}{2}$. Il en résulte que, si O est le sommet du petit axe de l'ellipse, d'anomalie $\frac{\pi}{2}$, le rapport anharmonique des quatre points M, O, A, B est égal à $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

Le point $\omega$ est à l'infini sur l'axe focal. Le rapport anharmonique $r$ relatif au point d'intersection de la conique et de l'axe focal qui coïncide avec $\omega$ a pour valeur 1. Le rapport anharmonique $r$ relatif au point C est égal à $-1$. Donc,

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}.\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}.\operatorname{tg}\frac{\varphi_3}{2}.\operatorname{tg}\frac{\varphi_4}{2} = -1.$$

Posons, d'une manière générale, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$. L'égalité devient

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = -1,$$

Supposons en même temps.....

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

14e Année. N° 8 Mai 1904.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR CERTAINES QUARTIQUES UNICURSALES

par M. **Leconte**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nantes.

**1.** Une quartique unicursale a en général trois points doubles : mais certaines d'entre elles en ont seulement deux ou même un seul. Nous allons nous occuper des quartiques unicursales qui possèdent un seul point double. Cherchons d'abord les expressions des coordonnées d'un de leurs points en fonction rationnelle d'un paramètre.

Pour simplifier le calcul, nous admettrons qu'un point double à tangentes distinctes ou qu'un rebroussement ordinaire ne comptent que pour un point double, en sorte qu'une quartique unicursale ayant l'une ou l'autre de ces singularités a en plus deux autres points doubles toujours distincts du premier.

Considérons donc un point double à tangentes confondues en lequel la tangente coupe la courbe en quatre points confondus ; supposons qu'il soit à l'origine, que la tangente soit l'axe des $x$, qu'il soit obtenu par les valeurs $\lambda$ et $\mu$ supposées réelles du paramètre $\theta$. La quartique sera représentée par les équations

$$(1)\qquad x = \frac{(\theta-\lambda)(\theta-\mu)g(\theta)}{k(\theta)}, \qquad y = \frac{(\theta-\lambda)^2(\theta-\mu)^2}{k(\theta)},$$

dans lesquelles $g(\theta)$ et $k(\theta)$ désignent deux polynomes respectivement du deuxième et du quatrième degré. Par la transformation $t = \dfrac{\theta-\lambda}{\theta-\mu}$, ces équations deviennent

$$(2)\qquad x = \frac{tf(t)}{h(t)}, \qquad y = \frac{t^2}{h(t)},$$

en posant

$$f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma, \qquad h(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + f.$$

Avec cette dernière forme, nous obtiendrons aisément les valeurs de $t$ qui donnent les points doubles de la courbe autres que l'origine. Suivons la méthode donnée par M. Appell, dans la Revue, en septembre 1898.

Cherchons les deux conditions pour que les quatre points de la courbe de paramètres $t_1, t_2, t_3, t_4$ soient en ligne droite ; s'ils sont sur la droite $ux + vy + w = 0$, les nombres $t_1, t_2, t_3, t_4$ sont racines de l'équation

$$utf(t) + vt^2 + wh(t) = 0,$$

et, quels que soient $u, v, w$, il y a entre les fonctions symétriques élémentaires $S_1, S_2, S_3, S_4$ de ces paramètres les deux relations

$$aS_4 - f = 0,$$
$$a\gamma S_1 - a\alpha S_3 + b\gamma - d\alpha = 0.$$

Il est nécessaire et suffisant pour que $t_1$ et $t_2$ soient les paramètres relatifs à un point double que les deux équations précédentes soient indéterminées en $t_3$ et $t_4$ ; or, développées, elles s'écrivent

$$t_3t_4 = \frac{f}{at_1t_2},$$
$$(t_3+t_4)[a\gamma - a\alpha t_1t_2 - t_1t_2a\alpha(t_1+t_2) + \gamma a(t_1+t_2) + b] - \alpha d = 0.$$

Elles sont indéterminées si l'on a

$$t_1 t_2 = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad t_1 + t_2 = \frac{\gamma(b\gamma - d\alpha)}{f\alpha^2 - a\gamma^2}.$$

Donc la quartique considérée a en général un point double en dehors de l'origine et qui peut venir se confondre avec l'origine si $t_1 + t_2$ est infini, c'est-à-dire si

$$(2)' \qquad f\alpha^2 = a\gamma^2.$$

C'est la condition pour que la quartique mise sous la forme (2) ait un seul point double. Sous la forme générale (1) on remarquera que

$$a(\mu - \lambda)^4 = k(\mu), \qquad \alpha(\mu - \lambda)^2 = g(\mu),$$
$$f(\lambda - \mu)^4 = k(\lambda), \qquad \gamma(\mu - \lambda)^2 = g(\lambda),$$

et la condition trouvée devient

$$(1)' \qquad \frac{k(\lambda)}{k(\mu)} = \left[\frac{g(\lambda)}{g(\mu)}\right]^2.$$

Nous avons supposé dans le calcul précédent que le point double est obtenu pour deux valeurs différentes $\lambda$ et $\mu$ du paramètre. Si ces valeurs viennent se confondre et que l'origine ne soit pas un rebroussement ordinaire, les équations de la courbe seront de la forme

$$(3) \qquad x = \frac{(\theta - \lambda)^2 g(\theta)}{k(\theta)}, \qquad y = \frac{(\theta - \lambda)^4}{k(\theta)},$$

et en posant $t = \dfrac{1}{\theta - \lambda}$, elles deviennent

$$(4) \qquad x = \frac{f(t)}{h(t)}, \qquad y = \frac{1}{h(t)},$$

en gardant les mêmes notations.

Les deux conditions pour que les points de paramètres $t_1, t_2, t_3, t_4$ soient en ligne droite sont ici

$$aS_1 + b = 0,$$
$$a\beta S_2 + a\alpha S_3 + d\alpha - c\beta = 0.$$

Elles sont indéterminées en $t_3$ et $t_4$ si l'on a

$$t_1 + t_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \qquad t_1 t_2 = \frac{a\beta^3 - b\alpha\beta^2 + c\alpha^2\beta - d\alpha^3}{\alpha^2(2a\beta - b\alpha)};$$

$t_1$ et $t_2$ sont les paramètres du point double différent en général de l'origine et qui vient se confondre avec elle si l'on a, puisque $\alpha \neq 0$,

$$(4) \qquad 2a\beta - b\alpha = 0.$$

En revenant à la forme générale (3), on voit que

$$a = k(\lambda), \qquad \alpha = g(\lambda),$$
$$b = k'(\lambda), \qquad \beta = g'(\lambda),$$

et par suite la condition devient

$$(3)' \qquad \frac{2g'(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)}.$$

**2.** Nous allons maintenant donner, pour les quartiques que nous venons d'obtenir, une définition géométrique.

Rappelons qu'une quartique unicursale ayant trois points doubles A, B, C est la transformée d'une conique ne passant par aucun des points A, B, C, dans une quelconque des transformations quadratiques birationnelles ayant les points A, B, C, pour points fondamentaux. En particulier, une telle quartique, si l'on prend la transformation par points inverses relative au triangle ABC, est le lieu du second foyer d'une conique inscrite dans le triangle ABC et dont un foyer décrit une conique ne passant ni en A, ni en B, ni en C.

La définition géométrique que nous avons en vue est un cas limite de la précédente. Définissons

d'abord une transformation quadratique particulière, celle qui fait correspondre l'un à l'autre les foyers $F(x, y)$, $F'(x', y')$ d'une conique $\Gamma$ osculatrice à une conique donnée C en un point donné O. Prenons la tangente en O à la conique C pour axe des $x$, la normale pour axe des $y$ : l'équation tangentielle des coniques $\Gamma$ est

$$u^2 + pvw + \lambda uw + \mu w^2 = 0,$$

$p$ désignant une constante, $\lambda$ et $\mu$ des paramètres variables ; on devra avoir

$$(5) \qquad u^2 + pvw + \lambda uw + \mu w^2 + \nu(u^2 + v^2) = \mu(ux + vy + w)(ux' + vy' + w).$$

D'où on tire, par élimination de $\lambda$, $\mu$, $\nu$,

$$xy' + yx' = 0,$$

$$(6) \qquad pxx' - y(py' + 1) - y' = 0,$$

ou enfin

$$(7) \qquad x = \frac{x'y'}{p(x'^2 + y'^2) + y'}, \qquad y = \frac{-y'^2}{p(x'^2 + y'^2) + y'}.$$

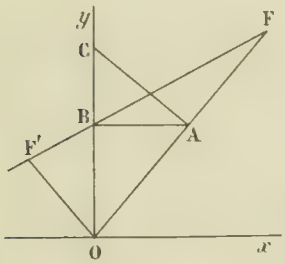
Dans le premier membre de l'identité (5), $\lambda$, $\mu$, $\nu$ variant, on a un système linéaire tangentiel de coniques dépendant de trois paramètres. Ces coniques sont donc harmoniquement inscrites à deux coniques S et S'. Les points F et F' forment une conique de ce système ; par suite ces points sont conjugués par rapport aux coniques S et S' ; donc le point F est le point commun aux polaires du point F' par rapport aux coniques du faisceau ponctuel (S, S'). Les équations (6) linéaires en $x$ et $y$ donnent ces polaires et nous fournissent aussi les équations des coniques S et S'

$$(S) \qquad xy = 0,$$

$$(S') \qquad p(x^2 - y^2) - 2y = 0.$$

Le faisceau ponctuel (S, S') est donc formé d'hyperboles équilatères ayant trois points communs confondus en O, le quatrième étant par suite sur la normale commune en O.

Remarquons encore que, le point F étant donné, on peut construire simplement le point F'. Il suffit de se rappeler que si C est le centre de courbure en un point O d'une conique, B le point d'intersection de OC avec l'axe focal, B est la projection sur OC du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant OC pour hypoténuse et pour direction d'un côté de l'angle droit l'un ou l'autre des rayons vecteurs OF, OF' aboutissant aux foyers. D'où la construction suivante du point F' : soit C le centre de courbure en O des coniques $\Gamma$. Projetons C en A sur OF, puis A en B sur O$y$. Le point F' est sur FB et aussi sur la symétrique OF' de OF par rapport à O$y$.




Si le point F' décrit une droite $\Delta'$, le point F décrit, quelle que soit $\Delta'$, une conique osculatrice en O au cercle $p(x^2 + y^2) + y = 0$.

Si le point F' décrit une conique tangente en O à O$x$ mais non osculatrice au cercle précédent, le point F décrit aussi une conique tangente en O à O$x$.

Si le point F' décrit une conique passant par O sans être tangente à O$x$, le point F décrit une cubique. Admettons ces résultats.

Si le point F' décrit une conique ne passant pas en O, le point F décrit une quartique.

Soient
$$x' = \frac{f(\theta)}{\psi(\theta)}, \qquad y' = \frac{\varphi(\theta)}{\psi(\theta)},$$

les coordonnées du point F' ($f$, $\varphi$, $\psi$, désignant trois polynomes du second degré en $\theta$). Le point F décrira la courbe définie par les équations

$$x = \frac{f\varphi}{p(f^2 + \varphi^2) + \varphi\psi}, \qquad y = \frac{-\varphi^2}{p(f^2 + \varphi^2) + \varphi\psi}.$$

Cette courbe est une quartique admettant l'origine pour point double puisque $f$ et $\varphi$ n'ont pas de

facteur linéaire commun ; sa définition géométrique montre qu'elle n'a pas d'autre point singulier que l'origine.

D'ailleurs, il est immédiat que les expressions précédentes de $x$ et de $y$ rentrent dans les formules générales (1) avec la condition (1)' si $\varphi$ n'est pas carré parfait, dans les formules générales (3) avec la condition (3)' si $\varphi$ est carré parfait.

Réciproquement, toute quartique unicursale ayant un seul point double a pour transformée, dans une transformation quadratique définie par les formules (7), une conique ne passant pas en O.

Si la quartique unicursale est donnée par

$$x' = \frac{tf(t)}{h(t)}, \qquad y' = \frac{t^2}{h(t)}, \qquad \text{avec} \quad f\alpha^2 = a\gamma^2,$$

il y correspond la courbe

$$x = \frac{tf(t)}{p[f(t)^2 + t^2] + h(t)}, \qquad y = \frac{-t^2}{p[f(t)^2 + t^2] + h(t)}.$$

Cette courbe se réduit à une conique pour la valeur de $p$ obtenue par l'une ou l'autre des équations

$$p\alpha^2 + a = 0,$$
$$p\gamma^2 + f = 0,$$

qui sont compatibles et qui sont obtenues en annulant le terme en $t^4$ et le terme constant du dénominateur.

Si la quartique est donnée par

$$x' = \frac{f(t)}{h(t)}, \qquad y' = \frac{1}{h(t)}, \qquad \text{avec} \quad 2a\beta - b\alpha = 0,$$

il y correspond la courbe

$$x = \frac{f(t)}{p[f^2(t) + 1] + h(t)}, \qquad y = \frac{-1}{p[f^2(t) + 1] + h(t)},$$

qui se réduit à une conique pour la valeur de $p$ obtenue par l'une ou l'autre des équations

$$p\alpha^2 + a = 0,$$
$$2p\alpha\beta + b = 0,$$

qui sont encore compatibles et qui sont obtenues en annulant le terme en $t^4$ et le terme en $t^3$ du dénominateur.

Cette définition géométrique peut être utile; par exemple, elle permet de montrer qu'il y a toujours pour une des quartiques Q que nous étudions, dans le cas où elle se rapporte à l'équation générale (1) deux faisceaux ponctuels de coniques surosculatrices entre elles au point double et ne coupant plus la quartique Q qu'en un seul point d'intersection variable différent du point double ; ces deux faisceaux se réduisent à un seul si la quartique Q rentre dans l'équation (3).

En effet, dans la transformation quadratique, à la quartique Q correspond une conique Q' sur laquelle il y a deux points O', O'' correspondant aux valeurs du paramètre qui donnent l'origine sur la courbe Q ; O' et O'' sont distincts pour la famille (1), confondus pour la famille (3).

Toute droite $\Delta'$ variable passant par O' ou O'' ne coupe plus la conique Q' qu'en un seul point variable ; la droite $\Delta'$ se transforme en une conique $\Delta$ dépendant linéairement d'un paramètre et n'ayant plus en commun avec la quartique qu'un seul point variable.

3. Les résultats précédents peuvent être retrouvés et complétés grâce à la théorie des courbes algébriques. On sait (voir l'étude d'Halphen sur les points singuliers, *Courbes planes* de Salmon, p. 646) que la classe $\mu$ d'une courbe de degré $m$ qui a un seul point double est donnée par la formule

$$\mu = m(m-1) - 2p,$$

$p$ désignant le nombre de points d'intersection, au point de vue de la théorie des cycles, confondus au point double, des deux branches qui y aboutissent.

D'autre part, pour qu'une quartique soit unicursale, il est *nécessaire* que sa classe ne dépasse pas 6 ; donc, si $m = 4$, on a $2p > 6$.

Le problème revient donc à l'étude du point double à tangentes confondues dans les quartiques, étude qui est esquissée dans les *Courbes planes* de Salmon et que nous ferons facilement par application de la théorie des cycles telle que M. Andoyer l'a exposée aux lecteurs de la Revue en Juin 1895.

Soit la quartique

$$y^2 + \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 + a x^4 + b x^3 y + c x^2 y^2 + d x y^3 + f y^4 = 0;$$

on pose $y = x y_1$; on a alors en divisant par $x^2$

$$y_1^2 + \alpha x + \beta x y_1 + \gamma x y_1^2 + \delta x y_1^3 + a x^2 + b x^2 y_1 + c x^2 y_1^2 + d x^2 y_1^3 + f x^2 y_1^4 = 0.$$

1° Si $\alpha \neq 0$, $y_1$ est de la forme $\sqrt{-\alpha x}\,[1 + \varepsilon_1]$,

ou $-\sqrt{-\alpha x}\,[1 + \varepsilon_2]$,

$\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ désignant deux infiniment petits; donc $y$ est de la forme

$$x^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\alpha}\,[1 + \varepsilon_1],$$

ou

$$-x^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\alpha}\,[1 + \varepsilon_2];$$

on a alors $2p = 3$; le point est un rebroussement ordinaire.

2° Si $\alpha = 0$ et $\beta^2 \neq 4a$, $y$ est de la forme $(u_1 + \varepsilon_1)x$ ou $(u_2 + \varepsilon_2)x$, $u_1$ et $u_2$ étant racines de

$$u^2 + \beta u + a = 0$$

et $y$ égal à $(u_1 + \varepsilon_1)x^2$ ou $(u_2 + \varepsilon_2)x^2$.

On a alors $2p = 4$; l'origine est un point tacnodal d'après la dénomination de Salmon.

3° Si $\beta^2 = 4a$, on pose $y_1 = \left(-\frac{\beta}{2} + y_2\right)x$ et on a, comme relation entre $x$ et $y_2$,

$$y_2^2 + \gamma x\left(-\frac{\beta}{2} + y_2\right)^2 + \delta x^2\left(-\frac{\beta}{2} + y_2\right)^3 + bx\left(-\frac{\beta}{2} + y_2\right) + cx^2\left(-\frac{\beta}{2} + y_2\right)$$
$$+ dx^3\left(-\frac{\beta}{2} + y_2\right)^3 + fx^4\left(-\frac{\beta}{2} + y_2\right)^4 = 0;$$

d'où

$$y_2^2 + \left(\frac{\gamma\beta^2}{4} - \frac{b\beta}{2}\right)x + (b - \beta\gamma)xy_2 + \left(\frac{c\beta^2}{4} - \frac{\beta^3\delta}{8}\right)x^2 + \cdots = 0.$$

Si $\beta\gamma - 2b \neq 0$, $y_2$ est de la forme $\sqrt{Ax}(1 + \varepsilon_1)$ ou $-\sqrt{Ax}(1 + \varepsilon_2)$,

en posant

$$A = \frac{b\beta}{2} - \frac{\beta^2\gamma}{4}$$

et

$$y = x^2\left[-\frac{\beta}{2} + \sqrt{Ax}(1 + \varepsilon_1)\right] \quad \text{ou} \quad x^2\left[-\frac{\beta}{2} - \sqrt{Ax}(1 + \varepsilon_2)\right]$$

on a $2p = 5$; l'origine est un rebroussement nodal.

4° Si $\beta\gamma = 2b$, l'équation de la quartique devient

$$\left(y + \frac{\beta}{2}x^2\right)^2 + \gamma xy\left(y + \frac{\beta}{2}x^2\right) + \delta y^3 + cx^2y^2 + dxy^3 + fy^4 = 0 \tag{8}$$

et la relation entre $x$ et $y_2$ est

$$y_2^2 + (b - \beta\gamma)xy_2 + \left(\frac{c\beta^2}{4} - \frac{\delta\beta^3}{8}\right)x^2 + \cdots$$

$y_2$ a l'une des valeurs $x(v_1 + \varepsilon_1)$ ou $x(v_2 + \varepsilon_2)$

et $y$, $x^2\left[-\frac{\beta}{2} + x(v_1 + \varepsilon_1)\right]$ ou $x^2\left[-\frac{\beta}{2} + x(v_2 + \varepsilon_2)\right]$,

$v_1$ et $v_2$ étant racines de l'équation

$$v^2 + (b - \beta\gamma)v + \left(\frac{c\beta^2}{4} - \frac{\delta\beta^3}{8}\right) = 0,$$

ou encore

$$v^2 - bv + \frac{c\beta^2}{4} - \frac{\delta\beta^3}{8} = 0.$$

On a, dans ce cas, $2p = 6$ ; l'origine est un point oscnodal.

5° Le cas suivant est celui où l'on a

$$b^2 - c\beta^2 + \frac{\delta\beta^3}{2} = 0,$$

ou encore

$$c = \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\beta\delta}{2}.$$

L'équation de la courbe a l'une des deux formes

$$\left(y + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\gamma}{2}xy\right)^2 + \delta y^2\left(y + \frac{\beta}{2}x^2\right) + dxy^3 + fy^4 = 0,$$

ou

$$\left(y + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\gamma}{2}xy + \frac{\delta}{2}y^2\right)^2 + xy^3\left(d - \frac{\gamma\delta}{2}\right) + \left(f - \frac{\delta^2}{4}\right)y^4 = 0, \tag{9}$$

et la relation entre $y_2$ et $x$ devient

$$\left(y_2 - \frac{\beta\gamma}{4}x\right)^2 + \gamma xy_2^2 + \frac{3\beta^2\delta}{4}x^2y_2 - c\beta x^2y_2 - \frac{d\beta^3}{8}x^3 \ldots = 0.$$

Nous poserons $y_2 = \left(\frac{\beta\gamma}{4} + y_3\right)x$ ; d'où il résulte que $y_3$ prend l'une des valeurs

$$\sqrt{kx}(1 + \varepsilon_1), \qquad -\sqrt{kx}(1 + \varepsilon_1),$$

en posant

$$k = -\frac{\beta^2\gamma^3}{16} - \frac{3\beta^3\gamma\delta}{16} + \frac{c\beta^2\gamma}{4} + \frac{d\beta^3}{8} = \frac{\beta^3}{16}(2d - \gamma\delta),$$

et par suite, $y$ a l'une des formes

$$x^2\left[-\frac{\beta}{2} + \frac{\beta\gamma}{4}x + \sqrt{k}x^{\frac{3}{2}}(1 + \varepsilon_1)\right],$$

ou

$$x^2\left[-\frac{\beta}{2} + \frac{\beta\gamma}{4}x - \sqrt{k}x^{\frac{3}{2}}(1 + \varepsilon_2)\right];$$

on a alors $2p = 7$ ; l'origine est un rebroussement tacnodal.

6° Le cas suivant est le dernier; c'est celui où $k = 0$.

En se reportant à l'équation (9), on voit que la quartique serait formée de deux coniques suroscu-latrices à l'origine ; on aurait alors $2p = 8$. Ce n'est donc que dans le quatrième et le cinquième cas que la quartique peut être unicursale. Vérifions qu'elle l'est. Si son équation est de la forme (8), la conique $y + \frac{\beta}{2}x^2 + hxy + \theta y^2 = 0$ ne donne, quand $\theta$ varie, qu'un seul point d'intersection variable, si $h$ est racine de l'équation

$$h^2 - h\gamma + c - \frac{\beta\delta}{2} = 0.$$

D'où deux manières de mettre $x$ et $y$ sous forme de fonctions rationnelles du paramètre $\theta$. Laissons à faire le calcul simple qui montre que les expressions trouvées rentrent bien dans la forme générale (1).

Si la quartique a une équation de la forme (9), il suffit de prendre le faisceau de coniques

$$y + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\gamma xy}{2} + \left(\frac{\delta}{2} + \theta\right)y^2 = 0,$$

et il est encore immédiat que les expressions de $x$ et $y$ trouvées répondent cette fois aux formules (3).

Nous avons ainsi confirmé les résultats de la première et de la deuxième partie; nous les avons même complétés ; par exemple, en montrant que les quartiques (1) ou (2) sont toujours de sixième

classe, que les quartiques (3) ou (4) sont toujours de cinquième classe, et aussi en prouvant que dans une quartique, si deux branches ont, en un point double, quatre points confondus, la quartique se décompose en deux coniques surosculatrices.

## BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DES SCIENCES (1903, *fin*).

### Mathématiques.

**1231.** — *Dans un plan rapporté à des coordonnées rectangulaires, le mouvement d'un point matériel est défini par les équations*

$$x = 3t^2, \qquad y = 3t - t^3.$$

*La masse du point matériel est* 1 *gr.; l'unité de longueur est le centimètre; l'unité de temps est la seconde.*

1° *Former l'équation de la trajectoire. Déterminer l'époque à laquelle le mobile passe en un point de la trajectoire dont on donne les coordonnés $x_0$, $y_0$; le problème posé n'admet-il qu'une solution?*

*La trajectoire forme une boucle; calculer l'aire de cette boucle.*

2° *Déterminer, pour l'époque $t$, la vitesse, l'accélération totale, l'accélération tangentielle, l'accélération normale, le rayon de courbure de la trajectoire au point où se trouve le mobile, le travail accompli depuis l'origine du temps.*

3° *Soit, à l'époque $t$,* (D) *la droite qui contient l'accélération totale regardée comme un vecteur dont l'origine est le point* M *où se trouve le mobile à cette époque. Démontrer que la droite symétrique de la tangente en* M *par rapport à la droite* (D) *est parallèle à une direction fixe.*

4° *Montrer que la droite* (D) *reste normale à une parabole fixe dont l'axe des $x$ est l'axe de symétrie.*

1. Si nous remplaçons $t^2$ par $\frac{x}{3}$ dans l'équation $y = 3t - t^3$, nous aurons

$$3y = 9t - tx,$$

puis

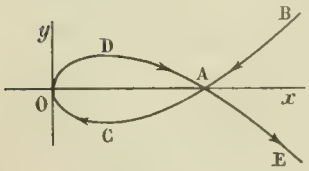
$$t = \frac{3y}{9 - x}.$$

En portant cette valeur dans l'équation $x = 3t^2$, nous avons l'équation cartésienne de la trajectoire

$$(1) \qquad x(9 - x)^2 - 27y^2 = 0.$$

Cette équation représente une cubique symétrique par rapport à $Ox$, ayant pour point double le point A de $Ox$ dont l'abscisse est 9, et admettant deux branches paraboliques dans la direction $Oy$; elle montre que $x$ doit être positif pour que la courbe existe. Quand $x$ varie de 0 à 3, $y^2$ croît de 0 à 4; quand $x$ croît de 3 à 9, $y^2$ décroît depuis 4 jusqu'à 0, et enfin quand $x$ croît de 9 à $+\infty$ $y^2$ croît de 0 à $+\infty$. La tangente à l'origine est $Oy$; les tangentes au point double ont pour coefficients angulaires $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, elles font avec $Ox$ des angles égaux à 30°. Dès lors, il est aisé de tracer la trajectoire du point mobile.

Pour $t = -\infty$, $x$ et $y$ sont égaux à $+\infty$, le mobile est à l'infini sur la branche parabolique AB; pour $t = -\sqrt{3}$, $x = 9$, $y = 0$, le mobile arrive en A; puis il décrit l'arc ACO et vient en O pour $t = 0$. Enfin quand $t$ croît de 0 à $+\infty$ le mobile décrit l'arc ODAL et passe de nouveau en A pour $t = \sqrt{3}$. La trajectoire est décrite d'une façon continue dans le sens des flèches.




Nous voyons qu'à deux époques différentes le mobile est dans des positions différentes: il n'y a que le point A qui fasse exception. Donc

le mobile passe une fois et une seule en chaque point de sa trajectoire, sauf au point double A où il passe deux fois (aux époques $t = -\sqrt{3}$ et $t = +\sqrt{3}$). D'après le calcul que nous avons fait au début, il passe au point $(x_0, y_0)$ de sa trajectoire à l'époque $t_0$ donnée par l'égalité $t_0 = \frac{3y_0}{9 - x_0}$.

La boucle de la trajectoire est décrite par le mobile de l'époque $-\sqrt{3}$ à l'époque $+\sqrt{3}$ ; elle est décrite dans le sens négatif ; par conséquent l'aire de la boucle aura une valeur algébrique négative, si on adopte pour sens positif des aires le sens habituel. Donc l'expression algébrique de l'aire sera

$$\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} (xy' - yx')dt,$$

ou

$$-\frac{3}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} (3t^2 + t^4)dt ;$$

nous trouvons ainsi $-72\frac{\sqrt{3}}{5}$, ou, en valeur absolue,

$$(2) \qquad A = 72\frac{\sqrt{3}}{5} = 24^{\text{cmq}},9.$$

Cette expression représente des centimètres carrés, car l'unité de longueur est le centimètre.

**2.** Les composantes de la vitesse à l'époque $t$ sont

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 3(1 - t^2),$$

la vitesse elle-même est donnée par $v^2 = x'^2 + y'^2 = 9(1 + t^2)^2$ ; donc $v = 3(1 + t^2)$. Les cosinus directeurs de la tangente, orientée dans le sens de la vitesse, sont

$$(3) \qquad \cos\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad \sin\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Les composantes de l'accélération totale sont

$$\gamma_x = 6, \quad \gamma_y = -6t ;$$

l'accélération elle-même a donc pour valeur $\gamma = 6\sqrt{1 + t^2}$ ;
les cosinus directeurs des angles qu'elle fait avec les axes sont

$$\cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \qquad \sin\alpha' = \frac{-t}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

L'accélération tangentielle a pour valeur $\frac{dv}{dt}$ ou $\gamma_x \cos\alpha + \gamma_y \sin\alpha$ ; elle a donc pour expression $\gamma_t = 6t$. Quant à l'accélération normale, elle a pour valeur 6.

D'autre part, on a $\frac{v^2}{\rho} = \gamma_n = 6$ ; donc le rayon de courbure $\rho$ a pour valeur $\rho = \frac{3}{2}(1 + t^2)^2$.

Le travail accompli par la force accélératrice depuis l'origine du temps jusqu'à l'époque $t$, est égal à la variation de force vive pendant cette durée ; c'est donc

$$T = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2).$$

Or ici $\qquad m = 1, \qquad v^2 = 9(1 + t^2)^2$

et $\qquad v_0^2 = 9$ ;

donc $\qquad T = \frac{1}{2}[9(1 + t^2)^2 - 9].$

ou $\qquad T = \frac{9t^2}{2}(t^2 + 2).$

Comme les unités employées sont les trois unités fondamentales C. G. S, le nombre T est exprimé en ergs.

3. L'accélération a même projection, $6t$, sur la tangente et sur l'axe des $y$; par conséquent la droite qui porte l'accélération est la bissectrice de la direction $Oy$ et de la direction de la tangente. La propriété annoncée est donc évidente.

4. La droite (D) a pour équation

$$\frac{x-3t^2}{1} = \frac{y-3t+t^3}{t},$$

ou

$$x-3t^2-\frac{y-3t+t^3}{t} = 0,$$

c'est-à-dire enfin

$$tx-y-3t-2t^3 = 0.$$

L'enveloppe de cette droite s'obtient en exprimant que l'équation en $t$ a une racine double; ce calcul donne

$$27y^2-2(x-3)^3 = 0.$$

La courbe que cette équation représente est la développée d'une parabole dont le paramètre est égal à 4, qui a $Ox$ pour axe, et dont le sommet a pour abcisse $-1$. L'équation de cette parabole est par suite

$$y^2 = 8(x+1),$$

et la propriété annoncée est établie.

H. LEFÈVRE.

Bonnes solutions : MM. Parrod, à Vesoul; J. Haag, à Pont-à-Mousson; R. Bouvaist; R. Javelot, à Givet.

## CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1903, *fin*).

### Physique.

**1222.** — *On a deux condensateurs* C *et* C'; *la capacité du premier est* 1 *microfarad, celle du second* $\frac{1}{2}$ *de microfarad; l'épaisseur du diélectrique séparant les deux armatures est la même et, par suite, ils peuvent supporter une même différence de potentiel maxima* E, *qui est de* 1.000 *volts.*

*On demande d'évaluer en dynes par centimètre carré l'augmentation maxima de pression que pourrait produire la décharge de ces condensateurs dans un litre d'air pris à* 0° *et sous la pression de* 76 *centimètres de mercure et maintenu à volume constant :*

1° *Quand on les réunit en parallèle (en batterie);*

2° *Quand on les réunit en série (en cascade).*

*On admettra que toute la chaleur produite par la décharge peut être communiquée à l'air, dont la chaleur spécifique à volume constant est* 0,17.

1° Quand on réunit les condensateurs en batterie, la capacité du système est $C+C'$, sa charge maxima $Q = (C+C')E$, son énergie $U = \frac{1}{2}(C+C')E^2$ ou, comme $C' = \frac{1}{2}C$,

$$U = \frac{3}{4}CE^2.$$

En unités du système pratique, $C = 10^{-6}$ et $E = 10^3$; donc

$$U = \frac{3}{4} \text{ de joule},$$

et la quantité de chaleur équivalente, évaluée en petites calories, est

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4,18}.$$

Désignons par $\theta$ la variation de température produite par cette chaleur dans un litre d'air, c'est-à-dire dans une masse égale à $1^{gr},293$ ; on doit avoir

$$1,293 \times 0,17 \times \theta = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4,18}.$$

Enfin, si $p_0$ est la pression initiale et $\beta$ le coefficient de pression, la variation de pression sera

$$x = p_0 \beta \theta.$$

Évaluons $p_0$ en unités C.G.S. et remplaçons $\beta$ par $\frac{1}{273}$ ; il vient

$$x = 76 \times 13,6 \times 981 \times \frac{1}{273} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4,18 \times 1,293 \times 0,17} = 3032.$$

2° Considérons les condensateurs réunis en cascade. Soit V le potentiel de l'armature interne du premier, V′ le potentiel commun à l'armature externe du premier et à l'armature interne du second, Q la charge de chaque armature. La considération du premier condensateur donne $Q = C(V - V')$, celle du second $Q = C'V' = \frac{1}{2} CV'$. V′ est donc double de $V - V'$ et si l'on donne à V′ la valeur maxima E, on aura $V - V' = \frac{1}{2} E$ et, par suite, $V = \frac{3}{2} E$.

L'énergie sera $U' = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} C(V - V')V = \frac{1}{2} C \times \frac{1}{2} E \times \frac{3}{2} E = \frac{3}{8} CE^2$.

Cette énergie est la moitié de la première et la variation de pression correspondante sera 1516.

*Remarque.* — On obtient le même résultat en changeant de place les deux condensateurs.

---

## Chimie.

**1223.** — *On chauffe une solution sulfurique de sulfate de nitrosyle additionnée d'une quantité suffisante de sulfate d'ammoniaque. Le gaz qui se dégage est conduit dans un tube chauffé où il est en contact avec une nacelle remplie de calcium. A la fin de l'expérience, le contenu de la nacelle est repris par un excès d'eau qui dégage alors un volume de gaz de* $5^{lit},57$. *L'alcalinité de la solution, déterminée par un titrage à l'acide sulfurique, exige pour la neutralisation* $450^{cc}$ *d'une solution contenant une molécule d'acide par litre.*

1° *Exposer la suite des réactions.*

2° *Déterminer le poids de calcium avant l'expérience.*

3° *Calculer le volume gazeux absorbé par le calcium.*

4° *Fixer le poids de sulfate de nitrosyle contenu dans l'acide sulfurique.*

5° *Déterminer la composition qualitative et quantitative des mélanges gazeux qui pourraient être absorbés par une solution sulfurique concentrée pour qu'elle renfermât la même quantité de sulfate de nitrosyle.*

*L'acide sulfurique contient l'eau nécessaire aux réactions.* Ca = 40 ; S = 32.

1° Désignons par $2x$ le nombre des molécules de sulfate de nitrosyle qui entrent en jeu ; les deux premières réactions seront représentées par les équations

$$x\,[2SO^4HAzO + SO^4(AzH^4)^2 = 3SO^4H^2 + 2H^2O + 2Az^2],$$

$$2x\,[3Ca + Az^2 = Az^2Ca^3],$$

et il reste un poids de calcium libre que nous représenterons par $y$Ca.

L'action de l'eau sur l'azoture et sur le métal libre se formulent alors de la manière suivante :

$$2x\ [Az^2Ca^3 + 6H^2O = 3CaO^2H^2 + 2AzH^3],$$
$$[y\ Ca + 2H^2O = CaO^2H^2 + H^2.$$

Les $y$ molécules d'hydrogène dégagé occupent un volume $y \times 22,28$ en litres ; on a donc

$$y \times 22,28 = 5,57 \qquad \text{d'où} \qquad y = 0,25.$$

D'autre part, l'acide sulfurique, dont on a employé une fraction de molécule égale à 0,450 doit neutraliser $6x + y$ molécules de chaux et $4x$ molécules d'ammoniaque ; ces dernières équivalent à $2x$ molécules de chaux ; on a donc

$$8x + y = 0,450, \qquad \text{d'où} \qquad 2x = 0,05.$$

2° Poids de calcium : $(6x + y)\,Ca = 0,400 \times 40 = 16^{gr}$.

3° Volume d'azote absorbé : $2x \times 22,28 = 1^{lit},114$.

4° Poids de sulfate de nitrosyle : $2x \times SO^4HAzO = 0,05 \times 127 = 6^{gr},35$.

5° Si l'on admet que les mélanges considérés contiennent du gaz sulfureux, leurs compositions seront représentées respectivement par $x\,(2SO^2 + 2AzO^3H)$, $x\,(2SO^2 + 2AzO^2 + O)$, $x\,(2SO^2 + Az^2O^3 + 2O)$, $x\,(2SO^2 + 2AzO + 3O)$. S'ils ne contiennent pas de gaz sulfureux, ils seront représentés par $x\,(AzO^2 + AzO)$, $x\,Az^2O^3$, $x\,(2AzO + O)$.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1302.** — On donne deux coniques S et $\Sigma$ telles que l'on puisse inscrire dans S un triangle ABC circonscrit à $\Sigma$. Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les points de contacts des côtés BC, CA, AB et de la conique $\Sigma$, et M le point commun aux droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$.

1° Montrer qu'il existe une conique $\Gamma$ passant par les points A, B, C, M et circonscrite au triangle conjugué commun à S et $\Sigma$.

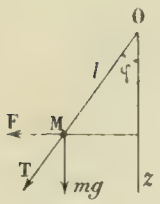
2° $\Gamma$ rencontre S en un 4e point D. Calculer les coordonnées du point D en fonction de celles du point M ; en déduire l'équation du lieu du point M quand le triangle ABC varie.

3° Dans la même hypothèse, soit EF le côté opposé à D dans le triangle DEF inscrit dans S et circonscrit à $\Sigma$. Trouver le lieu des points d'intersection de EF avec les côtés du triangle ABC. — Lieu du point d'intersection du côté BC et de la tangente en A à S.

4° Trouver l'enveloppe des droites DA, DB, DC.

L. Savous, professeur au collège d'Eymoutiers.

**1303.** — On considère un point matériel pesant M, de masse $m$, suspendu par un fil sans poids à un point fixe O. Soient $l$ la longueur du fil, Oz la verticale descendante du point O.




On suppose que par un moyen quelconque le plan vertical zOM tourne d'un mouvement uniforme autour de Oz avec la vitesse angulaire $\omega$. Montrer que OM ne peut décrire un cône de révolution autour de Oz que si $\omega$ est supérieure à un certain nombre fixe qui dépend de $l$ et de $g$. Trouver alors le demi-angle au sommet du cône, la force centrifuge qui agit sur le point M et la tension du fil.

Trouver la vitesse de rupture sachant que la tension maximum du fil est égale à 20 fois le poids du point M.

E. H.

**1304.** — A quel potentiel, exprimé en volts, devrait être portée une bulle de savon de 6 centimètres de diamètre, isolée dans l'espace, pour que la pression de l'air intérieur fût la même, malgré la tension superficielle, que celle de l'air extérieur ? On sait que, dans un tube vertical de 1 millimètre de diamètre, l'eau monte par capillarité à 3 centimètres environ au-dessus du plan général de la surface libre.

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE CENTRALE (1903, 1re Session)

### Statique.

**1236.** 1° *Énoncer sans démonstration les conditions d'équilibre communes à tous les systèmes matériels libres.*

2° *Deux barres articulées en* A *à une hauteur* H *au-dessus d'un plan horizontal poli, sur lequel reposent leurs pieds* B *et* C, *sont maintenues dans un plan vertical où elles sont figurées par les lignes droites* $BA = l$, $CA = l'$. *Elles sont réunies par un fil horizontal à une hauteur h au-dessus du plan horizontal ; la barre* BA *porte un poids* P *attaché en un point* D *tel que* $BD = \mu . BA$.

*Déterminer la tension du fil et les réactions de l'articulation, en négligeant le poids des barres et en les supposant rigides, en négligeant le poids du fil et en le supposant inextensible.*

« La marche à suivre pour étudier l'équilibre d'un système matériel consiste à appliquer les conditions générales (de l'équilibre) à toutes les forces extérieures appliquées à l'ensemble, y compris les réactions des appuis ou des liaisons de cet ensemble ; puis à étudier l'équilibre des parties détachées, auxquelles, pour tenir compte de leurs liaisons avec le reste, on applique des forces de réaction convenables, qui, forces intérieures dans l'ensemble du système, deviennent forces extérieures sur les parties détachées (1) ».

Appliquons la méthode au problème proposé.

1. *Équilibre de l'ensemble du système.* — Puisqu'on néglige le poids des barres et celui du fil, il suffira de tenir compte du poids P attaché à la barre BA au point D et des réactions normales N et N′ du plan horizontal supposé poli. Ce sont trois forces parallèles situées dans un même plan ; les équations d'équilibre se réduisent à deux ; la première,

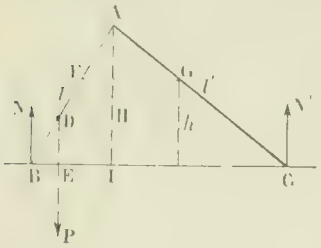
$$N + N' = P,$$

exprimant que la somme géométrique des forces est nulle, la seconde,

$$P\mu\sqrt{l^2 - H^2} = N'\left\{\sqrt{l^2 - H^2} + \sqrt{l'^2 - H^2}\right\},$$

exprimant que le moment résultant par rapport au point B est nul.

On en déduit




$$N' = \frac{P\mu\sqrt{l^2 - H^2}}{\sqrt{l^2 - H^2} + \sqrt{l'^2 - H^2}},$$

et

$$N = P - N' = \frac{P(1 - \mu)\sqrt{l^2 - H^2} + P\sqrt{l'^2 - H^2}}{\sqrt{l^2 - H^2} + \sqrt{l'^2 - H^2}}.$$

On peut écrire ces formules de la manière suivante :

$$N' = P.\frac{BE}{BC} \qquad N = P.\frac{EC}{BC},$$

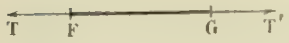
d'où

$$\frac{N}{EC} = \frac{N'}{BE} = \frac{P}{BC},$$

et déduire de là une construction graphique des vecteurs N et N′.

(1) A. Gouilly. L'Enseignement mathématique, 15 janvier 1904.

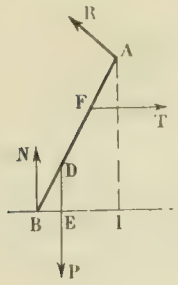
**2.** *Équilibre des parties détachées.*




*a*) Équilibre du fil FG. — Le fil peut être considéré comme soumis à l'action de deux forces T et T', dirigées comme l'indique la figure. Ces deux forces devant se faire équilibre, on aura

$$T = T'.$$

*b*) Équilibre de la tige AB. — Cette tige est en équilibre sous l'action du poids P, de la réaction N du plan, de la traction T exercée par le fil et enfin de la réaction R de l'articulation (soient X, Y ses composantes horizontale et verticale).




Toutes ces forces étant dans un même plan, nous aurons les trois équations suivantes :

$$X - T = 0,$$
$$Y - N - P = 0,$$
$$P\mu\sqrt{l^2 - H^2} + hT - HX - \sqrt{l^2 - H^2}.Y = 0,$$

cette dernière obtenue en prenant les moments par rapport au point B. On déduit de là

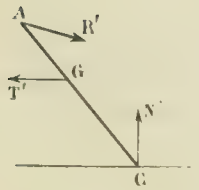
$$Y = P - N = N' = \frac{P\mu\sqrt{l^2 - H^2}}{\sqrt{l^2 - H^2} + \sqrt{l^2 - H^2}}.$$

$$X = -T = \frac{\sqrt{l^2 - H^2}}{H - h}(Y - P\mu) = -\frac{P\mu\sqrt{l^2 - H^2}\sqrt{l^2 - H^2}}{(H - h)\sqrt{l^2 - H^2} + \sqrt{l^2 - H^2}},$$

ou, plus simplement,

$$T = P.\frac{BE}{BC} \times \frac{IC}{H - h}.$$

$$X = -P.\frac{BE}{BC} \times \frac{IC}{H - h}, \qquad Y = P.\frac{BE}{BC}.$$




*c*) Équilibre de la tige AC. — Cette tige est en équilibre sous l'action de la réaction N' du plan, de la traction $T' = T$ exercée par le fil et enfin de la réaction R' de l'articulation (soient X', Y' ses composantes horizontale et verticale). Nous aurons les trois équations :

$$X' - T' = 0,$$
$$Y' + N' = 0,$$
$$-hT' + HX' + \sqrt{l^2 - H^2}.Y' = 0,$$

la dernière obtenue en prenant les moments par rapport au point C.

On en déduit

$$X' = T' = \frac{P\mu.\sqrt{l^2 - H^2}.\sqrt{l^2 - H^2}}{(H - h)\sqrt{l^2 - H^2} + \sqrt{l^2 - H^2}} = P.\frac{BE}{BC} \times \frac{IC}{H - h},$$

$$Y' = -N' = -\frac{P\mu\sqrt{l^2 - H^2}}{\sqrt{l^2 - H^2} + \sqrt{l^2 - H^2}} = -P.\frac{BE}{BC}.$$

On remarque que $T' = T$, comme on l'avait prévu en étudiant l'équilibre du fil FG; de plus : $X' = -X$, $Y' = -Y$; les réactions R et R' de l'articulation sont égales et opposées, ce qui était à prévoir également.

P. L.

Solutions de MM. Guinaud, agent-voyer à Argenteuil ; Haag, élève de l'Ecole normale supérieure ; R. Javelot, à Givet

## Géométrie analytique et Cinématique

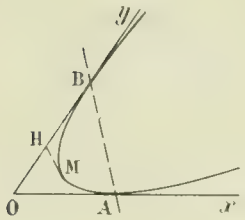
**1237.** — *On donne deux axes quelconques* $Ox$, $Oy$, *un point* $A(x = a)$ *sur l'axe des* $x$, *un point* $B(y = b)$ *sur l'axe des* $y$.

1° *Former l'équation de la parabole tangente aux axes respectivement aux points* A *et* B.

2° *Un voyageur parcourt l'axe des* $y$ *d'une vitesse constante* $v$, *dans le sens positif. Au moment où il part de l'origine des coordonnées, son chien part du point* A *se dirigeant constamment vers son maître qu'il rejoint au point* B, *après avoir parcouru l'arc de parabole* AB. *On demande les équations des projections sur les axes du mouvement du chien et la vitesse minimum de ce dernier en supposant les axes rectangulaires.*

**1.** L'équation générale des coniques tangentes aux axes en A et B, étant

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + 2\lambda xy = 0,$$




déterminons $\lambda$ de façon que $\delta = \frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{1}{ab} + \lambda\right)^2 = 0$;

nous obtenons deux valeurs, l'une $\lambda = 0$ qui donne la parabole réduite à deux droites confondues avec AB, l'autre $\lambda = -2ab$ qui correspond à la parabole demandée. L'équation de cette parabole est donc

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 - 4abxy = 0,$$

ou encore

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) + 1 = 0.$$

**2.** Le voyageur partant du point O (à l'origine des temps), son mouvement sur $Oy$ sera donné par l'équation

$$y = vt.$$

Soit H sa position à l'instant $t$; le chien se trouvera sur la parabole au point de contact M avec la seconde tangente menée du point H. En effet, le chien *se dirigeant constamment vers son maître*, sa vitesse qui est tangente à la trajectoire doit à chaque instant passer par la position H du voyageur. Pour calculer les coordonnées du point M, mettons en évidence dans l'équation de la parabole un diamètre quelconque et la tangente en l'extrémité. L'équation de la parabole peut s'écrire

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \mu\right)^2 + 2\mu\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) - 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) + 1 - \mu^2 = 0;$$

déterminons $\mu$ de façon que la tangente passe par le point $H(x = 0,\ y = vt)$, il vient

$$-2(\mu + 1)\frac{vt}{b} + 1 - \mu^2 = 0,$$

d'où, après suppression de la solution $\mu = -1$, qui correspond au point B,

$$\mu = 1 - \frac{2vt}{b}.$$

Le point M est à l'intersection du diamètre $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 - \frac{2vt}{b}$,

avec la tangente $\left(1 - \frac{2vt}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) + \frac{2vt}{b}\left(1 - \frac{vt}{b}\right) = 0.$

Cette équation, combinée avec la précédente, donne

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \frac{2vt}{b} + \frac{2v^2t^2}{b^2},$$

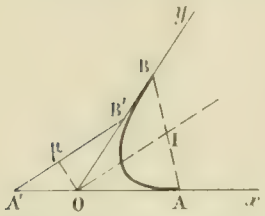
d'où l'on déduit pour les coordonnées du point M :

$$x = a\left(1 - \frac{vt}{b}\right)^2, \qquad y = \frac{v^2t^2}{b}.$$

Ces deux équations définissent le mouvement du point M. Le chien part du point A au temps $t = 0$ et rejoint son maître au point B, au temps $t = \frac{v}{b}$. Les composantes de sa vitesse ont pour expressions

$$x' = -\frac{2av}{b}\left(1 - \frac{vt}{b}\right), \qquad y' = \frac{2v^2t}{b}.$$

L'hodographe est une droite A'B' d'équation $bx' - ay' + 2av = 0$, parallèle aux diamètres de la parabole et rencontrant l'axe des $y$ au point B' d'ordonnée $2v$. La vitesse minimum sera donnée par la distance du point O à la droite A'B'; soit $O\mu$. Au point correspondant de la trajectoire, la tangente est perpendiculaire à la direction OI des diamètres; ce point est donc le sommet de la parabole. Remarquons que le point $\mu$ sera situé entre A' et B' tant que les angles IOA, IOB seront tous les deux inférieurs ou au plus égaux à un droit. Si l'un des angles était obtus, le point $\mu$ serait en dehors du segment A'B' et le sommet de la parabole serait extérieur à l'arc AB; la vitesse irait soit constamment en croissant, soit constamment en décroissant.




Si on suppose les axes rectangulaires, on aura pour expression de la vitesse

$$V = \frac{2av}{b}\sqrt{\left(1 - \frac{vt}{b}\right)^2 + \frac{v^2t^2}{a^2}} = \frac{2av}{b}\sqrt{1 - \frac{2vt}{b} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)v^2t^2}.$$

Le minimum de la vitesse a lieu au temps

$$t = \frac{a^2b}{v(a^2 + b^2)},$$

et pour la position

$$x = \frac{ab^4}{(a^2 + b^2)^2}, \qquad y = \frac{a^4b}{(a^2 + b^2)^2}$$

du point M. Il serait facile de vérifier que ce point est le sommet de la parabole. Enfin la vitesse minimum a pour expression

$$V_m = \frac{2av}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

P. L.

Solutions de MM. J. Haag, élève de l'école normale supérieure; R. Javelot à Givet; H. Lefèvre.

---

## Trigonométrie.

Problème.

**1241.** — *Dans un triangle* ABC *on connaît l'angle* A, *le périmètre* $2p$ *et le rayon* $r$ *du cercle inscrit.*

1° *Calculer les tangentes des moitiés des angles* B *et* C.

2° *Trouver les limites du rapport* $\frac{r}{p}$ *pour que le problème soit possible.*

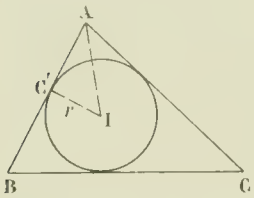
3° *Construire géométriquement le triangle* ABC *et discuter.*

4° *Faire concorder les conditions de possibilité obtenues dans les deux méthodes.*

1. Le triangle rectangle IC'A nous donne

$$AC' = r\cot g\frac{A}{2},$$

ou en posant $BC = a$,
$$p - a = r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$




De même
$$p - b = r\operatorname{cotg}\frac{B}{2}, \qquad p - c = r\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$

Ajoutons ces trois égalités membre à membre, il vient
$$p = r\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right),$$

ou
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\left(p - r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right) = r\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right).$$

D'autre part, on a
$$\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} = \frac{B}{2} + \frac{C}{2},$$

ou
$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}},$$

ou
$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) + \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

De ces deux équations on tire
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{p} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\left(p - r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{p}.$$

$\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ sont donc racines de l'équation en $x$ suivante

$$(1) \qquad x^2 - \frac{\left(p - r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{p}x + \frac{r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{p} = 0.$$

2. Pour que le problème soit possible, il faut et suffit que cette équation admette deux racines réelles et positives. Or la condition de réalité de $x$ est
$$\frac{\left(p - r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)^2\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}}{p^2} - \frac{4r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{p} > 0,$$

ou
$$\left(\frac{r}{p}\right)^2\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2} - 2\frac{r}{p}\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) + 1 > 0;$$

$\frac{r}{p}$ devra donc être extérieur aux racines de ce trinome. Or ces racines ont pour valeurs
$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{A}{2} \pm \frac{2}{\cos\frac{A}{2}}}{\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}} - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\left[1 + 2\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} \pm 2\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\right].$$

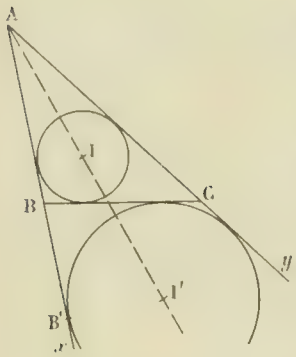
La condition de réalité étant remplie, on devra avoir en outre
$$p - r\operatorname{cotg}\frac{A}{2} > 0, \quad \text{ou} \quad \frac{r}{p} < \operatorname{tg}\frac{A}{2},$$
inégalité qui exprime que les racines de l'équation (1) sont positives.

Or $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ est compris entre les deux racines du trinome précédent. $\frac{r}{p}$ devra donc être inférieur à la plus petite racine, c'est-à-dire que l'on devra avoir

$$\frac{r}{p} < \operatorname{tg}\frac{A}{2}\left[1 + 2\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} - \frac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\right] = \frac{1 + \sin^2\frac{A}{2} - 2\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}}.$$

C'est l'unique condition de possibilité du problème ; $\frac{r}{p}$ a donc une seule limite, qui est une limite supérieure, savoir :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}}.$$




3. Supposons le problème résolu. Considérons le cercle exinscrit au triangle dans l'angle A. Soit B' son point de contact avec AB par exemple. On sait que $AB' = p$. Nous avons alors la construction suivante :

Construire un angle $xAy$ égal à l'angle donné. Inscrire dans cet angle une première circonférence de rayon $r$ et une deuxième dont les points de contact avec les côtés de l'angle soient à une distance $p$ du sommet de l'angle. Les tangentes communes intérieures à ces deux circonférences constituent les troisièmes côtés de deux triangles répondant à la question.

Ces triangles sont d'ailleurs symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $xOy$ et il n'y a en réalité qu'une solution. Pour que la construction soit possible, il faut évidemment que les deux circonférences soient extérieures, ce qui donne la condition $r + I'B' < II'$,

ou $$r + p\operatorname{tg}\frac{A}{2} < \frac{p}{\cos\frac{A}{2}} - \frac{r}{\sin\frac{A}{2}},$$ ou $$\frac{r}{p} < \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}}.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante, car elle entraine la suivante : $\frac{r}{p} < \operatorname{tg}\frac{A}{2}$ qui exprime que $AI' > AI$, c'est-à-dire que le cercle I est inscrit et non exinscrit au triangle ABC.

4. On voit que la limite obtenue pour $\frac{r}{p}$ est la même dans les deux méthodes.

J. HAAG.

## Calcul.

**1242.** — *Calculer les arcs positifs, inférieurs à 360°, qui vérifient la formule*

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{a^2}\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{3}\beta}.$$

$$a = 0{,}371258, \qquad \alpha = 141^\circ\,37'\,43'', \qquad \beta = 104^\circ\,13'\,28'',5.$$

On a

$$2\alpha = 283^\circ\,15'\,26'',$$

$$\cos 2\alpha = \cos(2\pi - 2\alpha) = \cos 76^\circ 44'\,34'',$$

$$\frac{1}{3}\beta = 34^\circ 44' 29'',5.$$

Désignons par $\varphi$ l'arc du premier quadrant défini par la formule

$$\sin\varphi = \sqrt[3]{0{,}371258^2}\cdot\frac{\cos 76^\circ 44' 34''}{\operatorname{tg} 34^\circ 44' 29'',5},$$

d'où

$$\varphi = 9^\circ 50' 5'',85.$$

L'équation à résoudre peut s'écrire

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\varphi,$$

d'où

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \varphi,$$

(1) $$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} + \varphi,$$

et

$$x - \frac{\pi}{3} = (2k+1)\pi - \varphi,$$

(2) $$x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{3} - \varphi.$$

Pour avoir les arcs compris entre 0° et 360°, il faudra prendre $k = 0$ dans les deux formules; d'où les deux valeurs

$$x' = \frac{\pi}{3} + \varphi = 69^\circ 50' 5'',85,$$

$$x'' = \pi + \frac{\pi}{3} - \varphi = 230^\circ 9' 54'',15.$$

P. L.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1208**. — *Du centre d'une ellipse on abaisse des perpendiculaires sur la tangente et sur la normale en un point variable de cette ellipse. On demande l'enveloppe de la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires. On demande de même l'enveloppe de la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur deux tangentes rectangulaires à l'ellipse.*

1. Supposons l'ellipse rapportée à ses axes et soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ son équation, avec la convention habituelle $a > b$. Désignons en outre par $\varphi$ l'anomalie excentrique du point variable de l'ellipse.

La tangente et la normale en ce point ont respectivement pour équations

$$bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab = 0,$$
$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

et leur équation quadratique s'obtient en effectuant le produit de ces deux équations; l'équation quadratique des perpendiculaires abaissées de l'origine s'obtient en annulant l'ensemble des termes du second degré; il reste alors une équation du premier degré qui représente justement la droite cherchée.

Cette équation est

$$ab(ax\sin\varphi - by\cos\varphi) + c^2\sin\varphi\cos\varphi(bx\cos\varphi + ay\sin\varphi) - c^2ab\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

ou

(1) $$bx\left(c^2\cos\varphi + \frac{a^2}{\cos\varphi}\right) + ay\left(c^2\sin\varphi - \frac{b^2}{\sin\varphi}\right) - c^2ab = 0.$$

Il est visible déjà que cette droite décrit un faisceau du sixième ordre et, par suite, enveloppe une

courbe de sixième classe. Nous aurons l'équation ponctuelle de cette courbe en prenant la dérivée de l'équation (1) par rapport à $\varphi$ et en éliminant $\varphi$ entre les deux équations. Cette dérivée est strictement

$$\frac{bx \sin\varphi}{\cos^2\varphi}(a^2 - c^2\cos^2\varphi) + \frac{ay\cos\varphi}{\sin^2\varphi}(b^2 + c^2\sin^2\varphi) = 0;$$

comme $a^2 - c^2\cos^2\varphi = b^2 + c^2\sin^2\varphi$, nous en concluons

$$\frac{bx}{\cos^3\varphi} + \frac{ay}{\sin^3\varphi} = 0,$$

puis

$$\frac{bx}{\cos^3\varphi} = \frac{ay}{-\sin^3\varphi} = \lambda,$$

et enfin, à l'aide de la première équation,

$$\lambda = \frac{c^2ab}{(2a^2 - b^2)\cos^2\varphi + (2b^2 - a^2)\sin^2\varphi};$$

donc les équations paramétriques de la courbe enveloppe sont

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{c^2a\cos^3\varphi}{(2a^2 - b^2)\cos^2\varphi + (2b^2 - a^2)\sin^2\varphi} \\[2ex] y = \dfrac{-c^2b\sin^3\varphi}{(2a^2 - b^2)\cos^2\varphi + (2b^2 - a^2)\sin^2\varphi} \end{cases}$$

elles nous montrent immédiatement que l'enveloppe est une courbe unicursale du sixième ordre. Comme cette courbe est aussi de sixième classe, elle a 6 points doubles et 4 points de rebroussement.

Pour la construire, nous nous servirons des équations (2), qui donnent les coordonnées du point courant de la courbe et aussi de l'équation (1), qui donne la tangente en chaque point ; nous poserons

$$u = c^2\cos\varphi + \frac{a^2}{\cos\varphi}, \qquad v = c^2\sin\varphi - \frac{b^2}{\sin\varphi},$$

et nous nous rappellerons que

$$u' = \sin\varphi\left(\frac{a^2}{\cos^2\varphi} - c^2\right), \qquad v' = \cos\varphi\left(\frac{b^2}{\sin^2\varphi} + c^2\right).$$

Cela posé, nous remarquons qu'on a tous les points de la courbe en faisant varier $\varphi$ de $-\pi$ à $+\pi$, que si l'on change $\varphi$ en $-\varphi$, $x$ ne change pas et $y$ change simplement de signe, enfin que si l'on change $\varphi$ en $\pi - \varphi$, $y$ ne change pas et $x$ change simplement de signe. Cela nous apprend que la courbe est symétrique par rapport aux axes et qu'il suffit pour avoir une des branches de la courbe de faire varier $y$ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

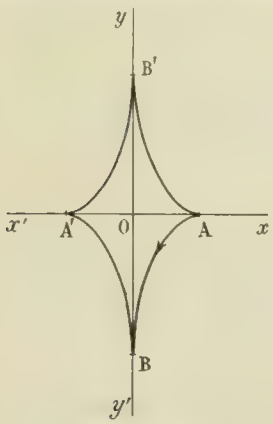


Fig. 1.

Trois cas sont alors à distinguer.

*1er Cas.* $2b^2 - a^2 > 0$. Alors $x$ et $y$ ne deviennent pas infinis, la courbe est fermée. Pour $\varphi = 0$, $x = \frac{c^2a}{2a^2 - b^2}$, $y = 0$, la courbe part d'un point A de $Ox$, et la tangente en ce point se réduit à $y = 0$ [voir l'équation (1)].

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = \frac{-c^2b}{2b^2 - a^2}$, la courbe atteint un point B de $Oy'$, et la tangente en ce point se réduit à $x = 0$. D'autre part, $u$ est positif et croissant, $v$ négatif et croissant ; donc l'arc AB a bien la forme indiquée et la courbe totale ressemble à une développée d'ellipse (*fig.* 1).

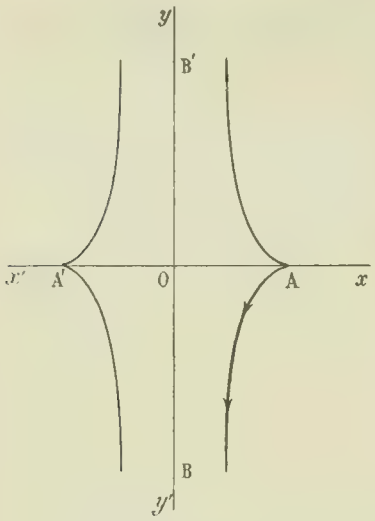


Fig. 2.

*2e cas.* $2b^2 - a^2 = 0$. Il n'y a qu'un changement à ce qui précède, c'est que OB est infini ; le point de rebroussement B est à l'infini sur $Oy'$ (*fig.* 2).

*3e cas.* $2b^2 - a^2 < 0$. Alors $x$ et $y$ peuvent devenir infinis et, en posant

$$A^2 = 2a^2 - b^2, \qquad B^2 = a^2 - 2b^2,$$

$x$ et $y$ deviennent

$$x = \frac{c^2 a \cos^3 \varphi}{A^2 \cos^2 \varphi - B^2 \sin^2 \varphi},$$

$$y = \frac{-c^2 b \sin^3 \varphi}{A^2 \cos^2 \varphi - B^2 \sin^2 \varphi}.$$

Pour $\varphi = 0$, $x = \dfrac{c^2 a}{2a^2 - b^2}$, $y = 0$, la courbe part d'un point A de $Ox$, et la tangente en ce point se réduit à $y = 0$, comme dans les deux autres cas. Pour $\varphi = \alpha - \varepsilon \left(\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{A}{B}\right)$, $x$ devient $+\infty$ et $y$ devient $-\infty$. Le point mobile sur la courbe a décrit l'arc AH. Pendant ce temps, $u$ et $v$ ont augmenté tous les deux, $u$ depuis $a^2 + c^2$ jusqu'à un certain nombre positif, et $v$ depuis $-\infty$ jusqu'à un certain nombre positif aussi ; la tangente a tourné d'un angle obtus depuis sa position initiale $Ox$ jusqu'à l'asymptote CD. Pour $\varphi = \alpha + \varepsilon$, $x$ devient $-\infty$ et $y$ devient $+\infty$. Enfin pour $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = \dfrac{c^2 b}{a^2 - 2b^2}$, et la tangente en ce point est $x = 0$ ou $Oy$. Le point mobile sur la courbe a décrit l'arc KB. Il n'y a plus alors qu'à achever la courbe par symétrie et l'on a la figure 3.

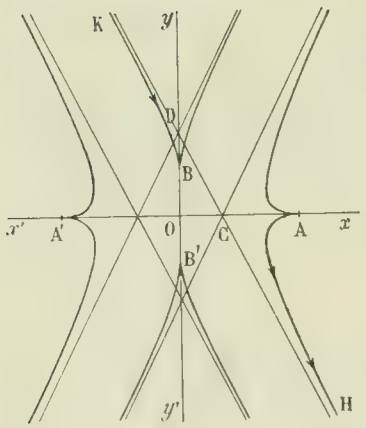


Fig. 3.

On peut enfin remarquer que cette courbe, dont nous venons d'étudier les diverses formes, est la développée de la podaire de l'ellipse par rapport à son centre.

**2.** Nous obtiendrons de la même manière l'équation de la droite dont il faut trouver l'enveloppe. Soient $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point d'où l'on mène les deux tangentes rectangulaires ; ces deux droites ont pour équation quadratique

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)^2 = 0,$$

et la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces droites s'obtient en y supprimant les termes du second degré, ce qui donne

$$2\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2}\right) - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0.$$

Or $(\alpha, \beta)$ est un point variable du cercle orthoptique ; si donc on désigne par $R^2$ la quantité $a^2 + b^2$, on peut poser $\alpha = R\cos\varphi$, $\beta = R\sin\varphi$, et l'équation précédente devient

$$(3) \qquad \frac{2x\cos\varphi}{a^2} + \frac{2y\sin\varphi}{b^2} - R\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 0.$$

Cette équation nous montre de suite que le faisceau engendré par la droite mobile est du quatrième ordre et, par suite, que l'enveloppe est une courbe de quatrième classe. L'équation ponctuelle de l'enveloppe s'obtiendra en prenant la dérivée de l'équation (3) par rapport à $\varphi$ et en éliminant $\varphi$ entre les deux

équations; ou bien nous aurons les équations paramétriques de cette courbe en résolvant les deux équations par rapport à $x$ et à $y$.

Ce dernier calcul, qu'il est inutile de détailler, nous donne

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{R}{2b^2}(2b^2 - a^2)\cos\varphi - c^2\cos^3\varphi, \\ y = \dfrac{R}{2a^2}(2a^2 - b^2)\sin\varphi - c^2\sin^3\varphi. \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} x = \dfrac{R\cos\varphi}{2b^2}(b^2 - c^2\sin^2\varphi), \\ y = \dfrac{R\sin\varphi}{2a^2}(a^2 - c^2\cos^2\varphi). \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que la courbe est une courbe unicursale du sixième ordre ; comme elle est de quatrième classe, elle a 4 points doubles et 6 points de rebroussement.

De même que dans le cas précédent, on voit aussi de suite que cette courbe admet les deux axes de coordonnées pour axes de symétrie et qu'on en obtiendra une branche en faisant varier $\varphi$ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Deux cas sont à distinguer :

1er *Cas.* $2b^2 - a^2 \geqslant 0$. Alors $x$ ne s'annule que pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Il est facile de vérifier que $x$ décroît toujours et que $y$ croît toujours. Pour $\varphi = 0$, $x = \frac{R}{2}$, $y = 0$, la courbe part d'un point A de $Ox$ et la tangente en ce point a pour équation $x = \frac{R}{2}$, c'est une perpendiculaire à $Ox$ [voir l'équation (3)].

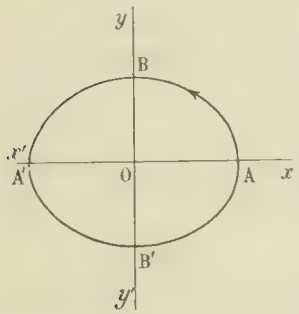


Fig. 4.

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = \frac{R}{2}$, la courbe atteint un point B de $Oy$ et la tangente en ce point a pour équation $y = \frac{R}{2}$, c'est une perpendiculaire à $Oy$. Si en outre nous appelons $p$ et $q$ les segments à l'origine de la tangente,

$$p = \frac{a^2R}{2\cos\varphi}\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right),$$
$$q = \frac{b^2R}{2\sin\varphi}\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right),$$

il est facile de voir que $p'$ est toujours positif et $q'$ toujours négatif ; par conséquent la courbe est une courbe fermée de forme ovale, sans aucune sinuosité (*fig.* 4). On a en effet :

$$\begin{cases} p' = \dfrac{R\sin\varphi(c^2\cos^2\varphi + a^2)}{2b^2\cos^2\varphi}, \\ q' = \dfrac{R\cos\varphi(c^2\sin^2\varphi - b^2)}{2a^2\sin^2\varphi}, \end{cases}$$

ce qui permet de suivre le mouvement de la tangente pour $b^2 \geqslant c^2$ et aussi dans les autres cas.

On a de même

$$\begin{cases} x' = \dfrac{R\sin\varphi[3c^2\sin^2\varphi - (2a^2 - b^2)]}{2b^2}, \\ y' = \dfrac{R\cos\varphi[3c^2\cos^2\varphi - (a^2 - 2b^2)]}{2a^2}. \end{cases}$$

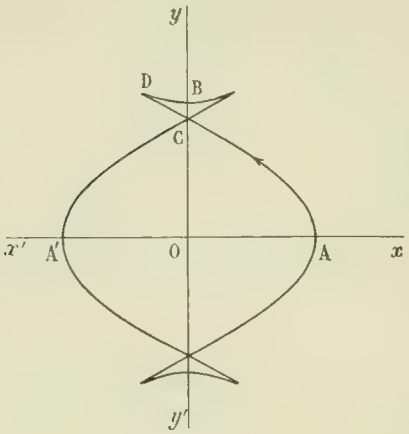


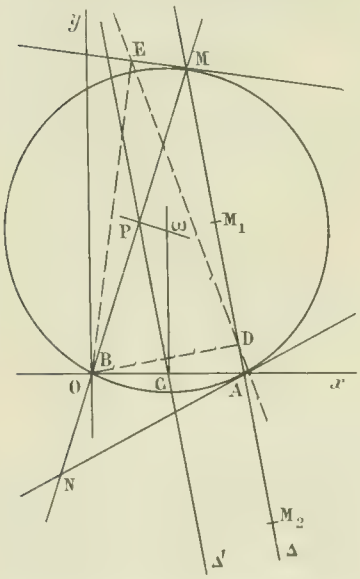
Fig. 5.

*2e Cas.* $2b^2 - a^2 < 0$. Alors $x$ s'annule deux fois, une fois pour $\varphi = \alpha$, $\cos^2\alpha = \dfrac{a^2 - 2b^2}{c^2}$, $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{b^2}{a^2 - 2b^2}$, et une autre fois pour $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; $x'$ et $y'$ changent tous les deux de signe pour $\varphi = \alpha'$, $\cos^2\alpha' = \dfrac{a^2 - 2b^2}{3c^2}$, $\sin^2\alpha' = \dfrac{2a^2 - b^2}{3c^2}$; le point correspondant est un point de rebroussement : $x$ décroît d'abord depuis $\dfrac{R}{2}$ jusqu'à une certaine valeur négative, puis croît jusqu'à 0 ; $y$ croît depuis 0 jusqu'à une certaine valeur positive, puis décroît jusqu'à $\dfrac{R}{2}$. $p$ croît toujours, $q$ décroît d'abord, puis croît ensuite ; la courbe a donc la forme signalée dans la figure 5. V. HIOUX.

Bonnes solutions : MM. J. Haag, élève de l'École normale supérieure ; T. Lemoyne.

---

**1229.** — *On considère un cercle variable qui passe par deux points fixes* A *et* B *et une droite fixe* Δ *qui passe au point* A ; *cette droite rencontre le cercle variable en un point variable* M.




1° *Trouver le lieu du point de rencontre de la tangente en* A *avec la droite* BM.

2° *Trouver le lieu du milieu de la corde* BM *et l'enveloppe du rayon perpendiculaire à cette corde.*

3° *Trouver l'enveloppe de la tangente en* M. *Cette enveloppe est une parabole. Trouver le lieu de son sommet quand la droite* Δ *tourne autour du point* A.

Prenons pour origine le point B, pour axe des $x$ la droite BA et pour axe des $y$ une perpendiculaire, et désignons par $a$ l'abscisse du point A, par

$$x - a + my = 0$$

l'équation de Δ.

1° L'équation du cercle variable sera $x^2 + y^2 - ax - 2\lambda y = 0$, celle de la tangente en A, $af'_x + f'_z = 0$,

ou $$ax - 2\lambda y - a^2 = 0;$$

quant aux coordonnées du point M, on les obtiendra, par exemple, en remplaçant $x$ par $a - my$ dans l'équation du cercle ; on trouve ainsi successivement

$$y = \frac{am + 2\lambda}{m^2 + 1}, \qquad x = \frac{a - 2\lambda m}{m^2 + 1};$$

par conséquent l'équation de la droite BM est

$$\frac{y}{x} = \frac{am + 2\lambda}{a - 2\lambda m}.$$

Nous aurons l'équation du premier lieu en éliminant $\lambda$ entre les deux équations trouvées plus haut. Ce calcul donne l'équation

$$(1) \qquad x^2 - y^2 + 2mxy - a(x + my) = 0.$$

C'est là l'équation d'une hyperbole équilatère passant aux points A et B, ayant pour tangente en B

une parallèle à $\Delta$, pour tangente en A la droite $\Delta$ elle-même, comme il est facile de s'en assurer, et, par suite, pour centre le milieu de AB; les directions asymptotiques sont les bissectrices de l'angle $\Delta$AB. La position de cette courbe est donc parfaitement connue.

2° Le milieu de BM a pour coordonnées

$$x = \frac{a - 2\lambda m}{2(1 + m^2)}, \qquad y = \frac{am + 2\lambda}{2(1 + m^2)};$$

par suite, le lieu de ce point, quand $\lambda$ varie, est $x + my - \frac{a}{2} = 0$; c'est une parallèle à $\Delta$, équidistante de $\Delta$ et de l'origine.

Le coefficient angulaire de BM est $\frac{am + 2\lambda}{a - 2\lambda m}$; le rayon perpendiculaire a donc pour équation

$$y - \lambda = \frac{2\lambda m - a}{2\lambda + am}\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Il n'y a plus qu'à développer cette équation, l'ordonner par rapport à $\lambda$ et écrire qu'elle a une racine double. Ces calculs successifs donnent

$$2\lambda^2 + 2\lambda(mx - y) - \frac{a}{2}(2x + 2my - a) = 0,$$

puis (2) $$(mx - y)^2 + a(2x + 2my - a) = 0.$$

Cette dernière équation est celle de l'enveloppe du rayon $\omega$P, elle représente une parabole ayant pour axe la perpendiculaire abaissée de B sur $\Delta$ et pour tangente au sommet la parallèle à $\Delta$ équidistante de B et de $\Delta$, c'est-à-dire le lieu du milieu de BM.

3° Les coordonnées de M étant

$$x = \frac{a - 2\lambda m}{1 + m^2}, \qquad y = \frac{am + 2\lambda}{1 + m^2},$$

la tangente en M a pour équation

$$(a - 2\lambda m)(2x - a) + (am + 2\lambda)(2y - 2\lambda) - (1 + m^2)(ax + 2\lambda y) = 0,$$

ou $$4\lambda^2 + 2\lambda(2mx + (m^2 - 1)y) + ax(m^2 - 1) - 2amy + a^2 = 0.$$

En exprimant que cette équation a une racine double en $\lambda$, nous avons l'enveloppe de la tangente en M,

(3) $$[2mx + (m^2 - 1)y]^2 - 4a(m^2 - 1)x - 2my + a] = 0;$$

cette enveloppe est une parabole dont l'axe et la tangente au sommet sont en évidence : l'axe a pour équation

$$2mx + (m^2 - 1)y = 0,$$

et la tangente au sommet,

$$(m^2 - 1)x - 2my + a = 0.$$

L'équation (3) peut d'ailleurs se mettre sous la forme

$$[(m^2 - 1)^2 + 4m^2(x^2 + y^2)] - [(m^2 - 1)x - 2my + 2a]^2 = 0;$$

sous cette forme, nous voyons que l'origine est le foyer et que la droite

$$(m^2 - 1)x - 2my + 2a = 0$$

est la directrice de cette pararabole.

Nous aurons le lieu des sommets en éliminant $m$ entre l'équation de l'axe et celle de la tangente au sommet. A cet effet, posons $m = \operatorname{tg}\varphi$, nous aurons les deux équations suivantes :

$$x \sin 2\varphi - y \cos 2\varphi = 0,$$

$$x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi - a \cos^2\varphi = 0;$$

or $\cos^2\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$, la seconde équation s'écrit donc

$$2x \cos 2\varphi + 2y \sin 2\varphi - a(1 + \cos 2\varphi) = 0.$$

La première donne

$$\frac{\cos 2\varphi}{x} = \frac{\sin 2\varphi}{y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

et la seconde devient alors

$$x(2x - a) + 2y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2},$$

ou finalement,

$$(4) \qquad (2x^2 + 2y^2 - ax)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Tel est le lieu des sommets : c'est une quartique bicirculaire ayant un point double à l'origine (point de rebroussement en lequel la tangente est $Ox$).

Pour voir la nature de cette quartique, passons aux coordonnées polaires, nous aurons

$$(2\rho - a\cos\omega)^2 - a^2 = 0,$$

ou

$$\rho = \frac{a(\cos\omega \pm 1)}{2}.$$

C'est là l'équation d'une cardioïde ayant l'origine pour pôle et pour cercle directeur le cercle

$$x^2 + y^2 - \frac{ax}{2} = 0,$$

c'est-à-dire le cercle décrit sur OC comme diamètre.

DNALLOR LECRAM.

Bonnes solutions : MM. J. Haag, élève de l'École normale supérieure ; E.-N. Barisien ; R. Javelot, à Givet ; M. Treillou ; Guinaud, agent-voyer à Écouen.

**Solution géométrique.** — 1° Les deux droites AN et BM décrivent évidemment deux faisceaux homographiques ; par conséquent le lieu du point N est une conique qui passe aux points A et B. Pour que le point N aille à l'infini, il faut que AN et BM soient parallèles, c'est-à-dire que AM = AB ; si donc on prend, de part et d'autre de A, $AM_1 = AM_2 = AB$, les deux directions asymptotiques de la conique sont $BM_1$ et $BM_2$, ce sont les parallèles aux bissectrices de l'angle BAM. D'autre part, il est facile de voir que la tangente en A est la droite $\Delta$ et que la tangente en B est parallèle à la droite $\Delta$. Le lieu de N est donc une hyperbole équilatère passant aux points A en B et ayant pour centre le milieu de AB.

2° Le lieu du point P, milieu de OM, est évidemment l'homothétique de $\Delta$ par rapport au point B dans le rapport $\frac{1}{2}$, c'est une parallèle à $\Delta$, $\Delta'$.

L'enveloppe du rayon $\omega$P perpendiculaire à BM est évidemment une parabole ayant pour foyer le point B et pour tangente au sommet la droite $\Delta'$.

3° Projetons le point B en D et en E sur $\Delta$ et sur la tangente en M, le quadrilatère BDME est inscriptible et, par suite, l'angle $\widehat{EBM}$ est égal à l'angle $\widehat{EDM}$ ; mais $\widehat{EBM}$ est le complément de $\widehat{EMB}$ qui, lui, est égal à l'angle $\widehat{MAB}$ ; il en résulte que l'angle $\widehat{EDM}$ est fixe et que la droite DE est elle-même fixe. L'enveloppe de la droite EM est donc une parabole ayant pour foyer le point B et pour tangente au sommet la droite ED.

Au surplus, l'angle $\widehat{EDB}$, égal à l'angle $\widehat{EMB}$, est aussi égal à l'angle $\widehat{DAB}$ ; donc l'enveloppe de la droite ED est le cercle décrit sur AB comme diamètre ; par conséquent le lieu du sommet de la parabole, quand $\Delta$ tourne autour de A, est la podaire de ce cercle par rapport au point B ; c'est donc une cardioïde ayant le point B comme point de rebroussement.

J. HAAG.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist ; T. Lemoyne, à Troyes.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1305.** — Soient F, F′ les foyers d'une ellipse, M un point variable sur l'ellipse, D et D′ les pieds des bissectrices issues du sommet M du triangle FMF′. Trouver et construire l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle DD′M.

E. N. Barisien.

**1306.** — D'un point quelconque du plan d'une ellipse (axes $2a$ et $2b$) on abaisse les quatre normales sur l'ellipse dont les pieds ont pour coordonnées $(x_1, y_1)$ ... $(x_4, y_4)$.

Montrer que

$$\frac{\Sigma x_1^2}{a^2} + \frac{\Sigma y_1^2}{b^2} = \text{constante}.$$

E. N. Barisien.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET. *Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

14e Année. N° 9 Juin 1904.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

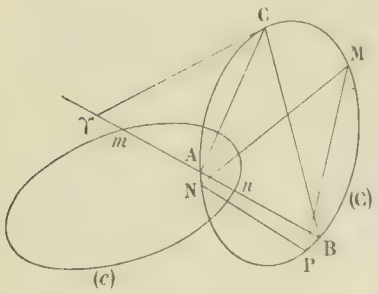
## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LES TRIANGLES INSCRITS ET CIRCONSCRITS (OU CONJUGUÉS) A DEUX CONIQUES

par M. Ch. Michel, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

1. Soit une conique (C) harmoniquement circonscrite à une conique (c), c'est-à-dire telle qu'il existe une infinité de triangles MNP qui y soient inscrits en étant conjugués par rapport à la conique (c). Étant donnée une représentation paramétrique propre de la conique (C), je me propose d'établir les relations qui existent entre les sommets de ces triangles.

Désignons par ABC une position particulière du triangle variable MNP. La droite AB rencontre la conique (c) en deux points, $m$ et $n$, conjugués harmoniques par rapport aux points A et B. Les coniques qui passent par les quatre points M, N, P, C sont harmoniquement circonscrites à la conique (c) et rencontrent par suite AB en des points conjugués harmoniques par rapport aux points $m$ et $n$. Parmi ces coniques, il en est une qui touche la droite AB au point $m$.




Appliquons à cette conique la relation que nous avons démontrée dans un précédent travail (*Sur les coniques considérées comme courbes unicursales*) et qui lie les points de rencontre d'une conique variable avec une conique et une droite fixes non tangentes entre elles. Soit $\gamma$ le point où la tangente en C à la conique (C) rencontre AB. Désignons par $R_1$, $R_2$, $R_3$ les rapports anharmoniques sur la conique (C) des points M, C, A, B ; N, C, A, B et P, C, A, B, par $r$ le rapport anharmonique des points $m$, $\gamma$, A, B. On a l'égalité

$$R_1R_2R_3 = r^2 = \text{constante}.$$

C'est une première relation entre les trois sommets du triangle variable MNP. On obtient une seconde relation en prenant, au lieu du côté AB, l'un des deux autres côtés du triangle ABC. Il ne peut d'ailleurs y avoir plus de deux relations distinctes.

Cela posé, soient $a$, $b$, $c$ les paramètres des points M, N, P et $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ceux des points A, B, C, dans une représentation propre de (C). Les relations précédentes deviennent

$$\frac{(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{m} = \frac{(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{n} = \frac{(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{p},$$

$m$, $n$, $p$ étant trois quantités constantes quand, le triangle MNP variant, le triangle ABC reste fixe. Si donc $a'$, $b'$, $c'$ sont les paramètres des sommets d'un autre triangle M'N'P', inscrit dans (C) et conjugué par rapport à (c), on a les égalités

$$\frac{(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{(a'-\lambda_1)(b'-\lambda_1)(c'-\lambda_1)} = \frac{(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{(a'-\lambda_2)(b'-\lambda_2)(c'-\lambda_2)} = \frac{(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{(a'-\lambda_3)(b'-\lambda_3)(c'-\lambda_3)}.$$

Posons

$$g(\lambda) = (\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c), \qquad h(\lambda) = (\lambda-a')(\lambda-b')(\lambda-c').$$

Ces égalités deviennent

$$\frac{g(\lambda_1)}{h(\lambda_1)} = \frac{g(\lambda_2)}{h(\lambda_2)} = \frac{g(\lambda_3)}{h(\lambda_3)}.$$

Par suite, les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les racines d'une équation du troisième degré de la forme

$$g(\lambda) - kh(\lambda) = 0,$$

$g(\lambda)$ et $h(\lambda)$ étant des polynomes dont les coefficients sont fixes quand les triangles MNP et M'N'P' restent fixes, et $k$ variant quand le triangle ABC varie.

Or, le triangle ABC est une position quelconque du triangle variable MNP. Donc,

*L'équation aux paramètres des sommets d'un triangle qui varie en restant inscrit et conjugué à deux coniques fixes est de la forme*

$$g(\lambda) - kh(\lambda) = 0,$$

*où $k$ est une quantité variable.*

La réciproque de ce théorème est vraie.

On sait que les triangles inscrits dans une conique (C) et conjugués par rapport à une conique $(c)$ sont circonscrits à une conique (C'), et, inversement, que les triangles à la fois inscrits et circonscrits à deux coniques (C) et (C') sont conjugués par rapport à une conique $(c)$. Les résultats précédents s'appliquent donc à ces derniers triangles.

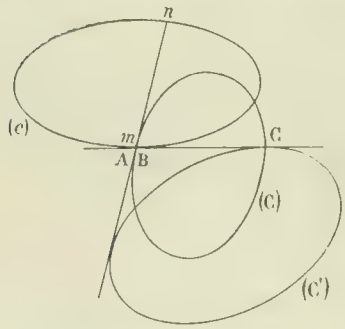
Il est inutile d'insister sur le caractère dualistique de ces résultats.

2. Voici une application de la relation précédemment établie $R_1R_2R_3 =$ constante. Reprenant les notations déjà employées, supposons que les points A et B soient les points cycliques. Alors, la conique (C) est un cercle et la conique (C') est une parabole ayant son foyer en C. On a le théorème suivant :

*On considère les triangles* MNP *circonscrits à une parabole et inscrits à un cercle passant par le foyer de la parabole. La somme des angles que font avec une direction fixe les droites qui joignent le foyer de la parabole aux sommets du triangle* MNP *est constante.*

3. Les raisonnements précédents supposent que la droite AB rencontre la conique (C) en deux points distincts. Examinons le cas où les points A et B sont confondus.

Parmi les triangles inscrits à une conique (C) et conjugués par rapport à une conique $(c)$, circonscrits en outre à une conique (C'), il en existe en général quatre infiniment aplatis. Un sommet C de l'un de ces triangles coïncide avec un point d'intersection de (C) et de (C'), et les deux autres sommets A et B sont confondus avec le point de rencontre $m$ de (C) avec la tangente en C à (C'). Le point $m$ est à l'intersection de (C) et de $(c)$, et le côté double CA ou CB est une tangente commune à (C') et à $(c)$. Enfin, le côté AB est une tangente commune à (C) et à (C'). Soit $n$ le second point de rencontre de AB avec $(c)$. Si MNP est un triangle inscrit à (C) et conjugué par rapport à $(c)$, les coniques qui passent par les quatre points M, N, P, C sont harmoniquement circonscrites à $(c)$ et rencontrent AB en des points conjugués harmoniques par rapport aux points $m$ et $n$. Parmi ces coniques, il en est une qui touche la droite en $n$.




Appliquons à cette conique la relation démontrée antérieurement (*loc. cit.*) qui lie les points de rencontre d'une conique variable avec une conique et une droite fixes tangentes entre elles. Soient, sur la conique (C), $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les paramètres des points M, N, P, $\alpha$ le paramètre du point $m$, $h$ le paramètre du point C, enfin, $\mu$ le paramètre du point de contact de la tangente, autre que AB, menée de $n$ à la conique (C). On a la relation

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_3 - \alpha} + \frac{1}{h - \alpha} = \frac{4}{\mu - \alpha},$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} + \frac{1}{\lambda_3 - \alpha} = \text{constante}.$$

On a ainsi le théorème suivant :

*S'il existe une infinité de triangles inscrits dans une conique* (C) *et circonscrits à une conique* (C'), *le pôle harmonique du point de contact avec* (C) *d'une tangente commune à* (C) *et à* (C') *par rapport au système des sommets de l'un de ces triangles est fixe, sur* (C).

*Corrélativement, le pôle harmonique d'un point commun à* (C) *et à* (C') *par rapport au système des points de contact avec* (C') *des côtés de l'un de ces triangles est fixe, sur* (C').

## SUR UNE CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT D'UNE CONIQUE

par M. R. **Bouvaist**.

Cette construction repose sur les remarques suivantes.

1° Soient S une courbe quelconque (*fig.* 1), AB, AC deux tangentes à cette courbe, NB et NC les normales en B et C ; quand C tend vers B, le cercle circonscrit au triangle ABC tend vers le cercle décrit sur Bω comme diamètre, ω étant le centre de courbure en B.

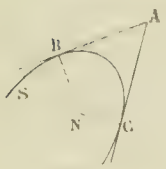


Fig. 1.

2° Soient une conique S (*fig.* 2), AB, AC deux tangentes à cette conique, NB, NC les normales en B et C, Bα, Cβ les hauteurs du triangle ABC.

Le cercle circonscrit au quadrilatère AHαβ est harmoniquement circonscrit à la conique S, il coupe en effet la droite BC en deux points conjugués harmoniques par rapport à B et C, d'après le théorème de Desargues. Lorsque C tend vers B, il tend vers le cercle décrit sur BH' comme diamètre, H' étant le symétrique du centre de courbure ω en B par rapport à B : soit ω' le centre de ce cercle, on a $B\omega' = \frac{B\omega}{2}$.

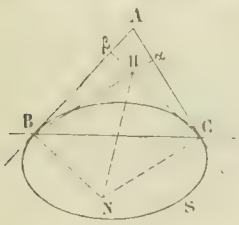


Fig. 2.

*Construction du centre de courbure.* — Pour construire le centre de courbure en un point A d'une conique, on construit le cercle tangent en A à la conique et orthogonal au cercle de Monge de cette dernière ; soit ω' son centre ; on prend, à partir de A, dans le sens ω'A, une longueur $\omega A = 2\omega' A$ et ω est le centre de courbure en A.

*Application particulière à la parabole.* — On mène la normale en A (*fig.* 3), on prend son intersection ω' avec la directrice, on prend $A\omega = 2A\omega'$, ω est le centre de courbure en A.

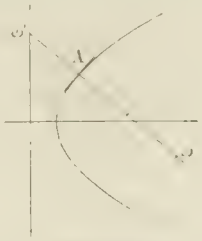


Fig. 3.

*Application particulière à l'hyperbole équilatère.* — ω' sera à l'intersection de la normale en A avec la perpendiculaire élevée au milieu de OA (*fig.* 4) ; le point est au quart de la corde interceptée par la normale.

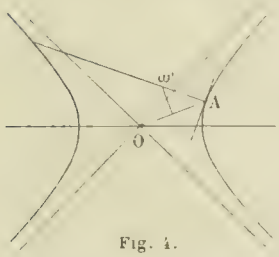


Fig. 4.

On en déduit que dans l'hyperbole équilatère la corde interceptée par une normale en un point est égale au double du rayon de courbure en ce point.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1228.** — *D'un point* P *on mène les six normales à un ellipsoïde et on considère les plans tangents à l'ellipsoïde aux pieds de ces normales.*

1° *Trouver l'enveloppe des plans coupant les plans tangents suivant six droites tangentes à une conique*

(S). *C'est une surface de quatrième classe dont on indiquera les droites et plans tangents remarquables. Trouver le lieu des centres des coniques* (S).

2° *Pour qu'une conique* (S) *se trouve sur un cône donné ayant pour sommet le centre* O *de l'ellipsoïde, il faut que le point* P *soit sur une certaine surface. Trouver dans ces conditions l'enveloppe du plan* (Q) *de la conique, le lieu de son centre, le lieu de ses asymptotes.*

3° *Le plan tangent au pied* $P_1$ *de l'une des normales est coupé par les cinq autres plans tangents suivant cinq droites qui touchent une parabole, dont la directrice est la projection de* OP *sur son plan. Montrer que lorsque le point* P *se déplace sur la normale en* $P_1$ *à l'ellipsoïde, cette parabole reste fixe.*

4° *Trouver toutes les coniques* (S) *qui sont des paraboles; donner une génération de leurs plans et montrer que la définition du* 3° *s'applique aux directrices de ces paraboles. Les directrices sont situées sur une surface du quatrième ordre qui a une droite triple.*

5° *Toutes les paraboles sont situées sur une surface* (Σ) *du quatrième ordre dont on cherchera les génératrices rectilignes. Montrer que les sections planes de* (Σ) *possèdent en général trois rebroussements et trouver le lieu des points de rebroussement quand le plan de la section varie. Quels sont les plans qui donnent des cubiques, des coniques? Examiner en particulier les plans perpendiculaires à* OP.

6° *Réciproquement, étant donné un plan* (Q), *le lieu des points* P *tels que les six droites d'intersection de ce plan par les plans tangents aux pieds des six normales issues de* P *soient tangentes à une conique est un hyperboloïde équilatère qui contient la droite* Δ, *perpendiculaire au plan donné mené par son pôle. Le lieu des centres des coniques est une conique. Que deviennent ces résultats lorsque le plan donné passe par le centre* O *de l'ellipsoïde?*

1. Parmi les surfaces de deuxième classe tangentes aux six plans considérés, il en est une infinité qui se réduisent à une conique. Il s'agit de trouver l'enveloppe des plans de ces coniques.

Supposons l'ellipsoïde rapporté à ses axes, et soient $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées du point P.

Posons, pour abréger l'écriture, $b^2 - c^2 = \alpha$, $c^2 - a^2 = \beta$, $a^2 - b^2 = \gamma$. L'équation générale des quadriques tangentes aux six plans tangents à l'ellipsoïde aux pieds des normales issues de P est en coordonnées tangentielles

$$f(u, v, w, r) \equiv a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 + 2\lambda[\alpha vw + (y_0w - z_0v)r]$$
$$+ 2\mu[\beta wu + (z_0u - x_0w)r] + 2\nu[\gamma uv + (x_0v - y_0u)r] = 0,$$

équation que nous écrivons aussi $E + \lambda P + \mu Q + \nu R = 0$.

Cette surface se réduit à une conique si le discriminant H est nul:

$$H = \begin{vmatrix} a^2 & \gamma\nu & \beta\mu & \mu z_0 - \nu y_0 \\ \gamma\nu & b^2 & \alpha\lambda & \nu x_0 - \lambda z_0 \\ \beta\mu & \alpha\lambda & c^2 & \lambda y_0 - \mu x_0 \\ \mu z_0 - \nu y_0 & \nu x_0 - \lambda z_0 & \lambda y_0 - \mu x_0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais les coordonnées $u, v, w, r$ du plan de la conique satisfont aux relations

$$f'_u = 0, \qquad f'_v = 0, \qquad f'_w = 0, \qquad f'_r = 0,$$

et si on élimine les trois paramètres $\lambda, \mu, \nu$ entre ces quatre équations, on a

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a^2u & 0 & \beta w + z_0 r & \gamma v - y_0 r \\ b^2v & \alpha w - z_0 r & 0 & \gamma u + x_0 r \\ c^2w & \alpha v + y_0 r & \beta u - x_0 r & 0 \\ -r & y_0 w - z_0 v & z_0 u - x_0 w & x_0 v - y_0 u \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation où $u, v, w, r$ sont considérés comme coordonnées courantes représente une surface de quatrième classe.

*Droites remarquables de la surface.* — Il est géométriquement évident que la surface passe par les quinze droites, intersections des six plans tangents deux à deux et par chacune des dix droites joignant les deux sommets des dix groupes de trièdres que l'on peut former avec les six plans tangents.

*Plans tangents remarquables.* — On reconnaît facilement sur l'équation (1) que les trois plans principaux de l'ellipsoïde donné (E) sont tangents à la surface, de même que le plan mené par O perpendiculairement à OP, $x_0x + y_0y + z_0z = 0$, ainsi que les six plans

$$\frac{y}{b} \pm \frac{z}{c} = 0, \qquad \frac{z}{c} \pm \frac{x}{a} = 0, \qquad \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0,$$

et le plan polaire de P,

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} - 1 = 0.$$

En outre la surface est évidemment tangente aux six plans tangents à (E) aux pieds des normales. On le vérifie d'ailleurs facilement. Si, en effet, on multiplie les éléments des quatre lignes du déterminant (1) par $u, v, w, r$ et qu'on ajoute par colonnes, on trouve E, P, Q, R, qui s'annulent pour les coordonnées $u, v, w, r$ des six plans tangents.

Bien plus, la surface touche tous les plans tangents communs (en nombre infini) aux coniques $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, c'est-à-dire les plans tangents aux pieds des normales menées de P à toutes les surfaces homofocales à (E), ou encore les plans polaires par rapport à (E) des points de la cubique aux pieds des normales relatives à P :

$$\frac{u}{r} = -\frac{x_0}{a^2+\theta}, \qquad \frac{v}{r} = -\frac{y_0}{b^2+\theta}, \qquad \frac{w}{r} = -\frac{z_0}{c^2+\theta},$$

où $\theta$ est un paramètre quelconque.

En effet, après avoir transformé le déterminant (1) comme nous venons de l'indiquer, le coefficient de E est le mineur encadré en pointillé. En tenant compte des équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, on le ramène immédiatement à la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{rwx_0}{u} & -\frac{rvx_0}{u} \\ -\frac{rwy_0}{v} & 0 & \frac{ruy_0}{v} \\ \frac{rvz_0}{w} & -\frac{ruz_0}{w} & 0 \end{vmatrix}$$

qui est identiquement nul.

Enfin la surface est tangente au plan de l'infini.

*Lieu des centres des coniques* (S). — L'équation tangentielle du centre étant $f'_r = 0$, on a pour les coordonnées de ce point

$$x = \nu y_0 - \mu z_0, \qquad y = \lambda z_0 - \nu x_0, \qquad z = \mu x_0 - \lambda y_0,$$

et le lieu cherché est le plan perpendiculaire à OP

$$x_0x + y_0y + z_0z = 0.$$

C'est d'ailleurs le lieu des centres de toutes les quadriques tangentes aux six plans.

2. Les équations tangentielles du cône de sommet O contenant la conique (S) sont $\varphi(u, v, w) = 0$ $r = 0$.

$$\varphi(u, v, w) \equiv a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + 2\lambda\alpha vw + 2\mu\beta wu + 2\nu\gamma uv = 0.$$

Pour que ce cône soit fixe, il faut que les coefficients $\lambda, \mu, \nu$ soient invariables. Nous poserons alors $\lambda\alpha = L$, $\mu\beta = M$, $\nu\gamma = N$. Si $\Phi(x, y, z) = 0$ est l'équation ponctuelle du cône, l'équation $H = 0$ peut s'écrire

(2) $$\Phi(\nu y_0 - \mu x_0, \quad \lambda z_0 - \nu x_0, \quad \mu x_0 - \lambda y_0) + \Delta = 0,$$

avec

$$\begin{vmatrix} a^2 & N & M \\ N & b^2 & L \\ M & L & c^2 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Le lieu du point P est le cylindre du second ordre (2) dont l'axe est la droite

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}.$$

Le lieu du centre $\omega$ des coniques (S) est la conique intersection du plan $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, et de la quadrique concentrique à (E)

(3) $$\Phi(x, y, z) + \Delta = 0.$$

Mais le cône asymptote de cette surface est précisément le cône donné $\varphi(u, v, w) = 0$, $r = 0$. Il en résulte que le plan de la conique est le plan tangent en $\omega$ à la surface (3). L'enveloppe des plans (Q) est donc le cylindre circonscrit à cette surface le long de la section par le plan $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$. De même le plan (Q) coupe la surface (3) suivant les asymptotes de la conique (S).

3. Soient $u_1$, $v_1$, $w_1$, $r_1$ les coordonnées du plan tangent en $P_1$. L'équation de la conique (S) est de la forme

$$\lambda P + \mu Q + \nu R + \rho E = 0,$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ étant déterminés par les équations

$$f'_{u_1} = 0, \qquad f'_{v_1} = 0, \qquad f'_{w_1} = 0, \qquad f'_{r_1} = 0,$$

qui, en tenant compte de ce que $u_1$, $v_1$, $w_1$, $r_1$ annulent P, Q, R, peuvent être remplacées par les suivantes

$$\mu w_1 - \nu v_1 + \rho \frac{a^2 u_1^2}{x_0 r_1} = 0,$$

$$\nu u_1 - \lambda w_1 + \rho \frac{b^2 v_1^2}{y_0 r_1} = 0,$$

$$\lambda v_1 - \mu u_1 + \rho \frac{c^2 w_1^2}{z_0 r_1} = 0,$$

$$\lambda(y_0 w_1 - z_0 v_1) + \mu(z_0 u_1 - x_0 w_1) + \nu(x_0 v_1 - y_0 u_1) - \rho r_1 = 0.$$

Si l'on multiplie les trois premières respectivement par $u_1$, $v_1$, $w_1$ et qu'on ajoute, on a

$$\rho \Sigma \frac{a^2 u_1^2}{x_0} = 0,$$

$r_1$ n'étant pas infini.

La quantité $\Sigma \dfrac{a^2 u_1^2}{x_0}$ n'étant pas nulle en général, il faut qu'on ait $\rho = 0$.

Les quatre équations se réduisent alors aux deux suivantes

$$\frac{\lambda}{u_1} = \frac{\mu}{v_1} = \frac{\nu}{w_1}.$$

La conique considérée est comme on voit une parabole. Cette courbe est fixe, lorsque P se déplace sur la normale en $P_1$. Son équation $\Sigma u_1[\alpha v w + (y_0 w - z_0 v) r] = 0$ peut en effet s'écrire, en remarquant que $y_0 w_1 - z_0 v_1 = -\dfrac{\alpha v_1 w_1}{r_1}$, etc,

$$\Sigma \alpha (u_1 r_1 v w + v_1 w_1 u r) = 0,$$

qui ne dépend plus que de $u_1$, $v_1$, $w_1$, $r_1$.

L'équation du plan projetant OP sur le plan tangent est

$$(y_0 w_1 - z_0 v_1) x + (z_0 u_1 - x_0 w_1) y + (x_0 v_1 - y_0 u_1) z = 0,$$

ou

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0.$$

Ce plan est bien perpendiculaire à l'axe de la parabole, dont les paramètres directeurs sont $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Pour démontrer que la projection de OP est la directrice, il suffit évidemment de prouver que les deux

plans tangents menés à la parabole par la perpendiculaire OH au plan tangent, sont rectangulaires. Or les coordonnées de ces plans satisfont aux équations

(1) $$u_1u + v_1v + w_1w = 0, \qquad r = 0.$$

Ils sont tangents au cône de sommet O et ayant pour directrice la parabole :

(2) $$\alpha u_1vw + \beta v_1wu + \gamma w_1uv = 0, \qquad r = 0.$$

Or si on élimine $w$ par exemple entre les équations (1) et (2), on trouve

$$\beta u_1v_1u^2 + \alpha u_1v_1v^2 - (\alpha u_1^2 + \beta v_1^2 - \gamma w_1^2)uv = 0.$$

D'où la relation

$$\frac{u'u''}{v'v''} = \frac{\alpha}{\beta},$$

et par analogie,

$$\frac{u'u''}{\alpha} = \frac{v'v}{\beta} = \frac{w'w}{\gamma}.$$

Comme $\Sigma\alpha = 0$, on a $\Sigma u'u'' = 0$, ce qui montre que les deux plans sont bien rectangulaires.

4. Les coordonnées $u_0$, $v_0$, $w_0$, $r_0$ du plan d'une parabole satisfont aux équations

(1) $$\left\{\begin{array}{l} (\beta w_0 + z_0r_0)\mu + (\gamma v_0 - y_0r_0)\nu = 0, \\ (\gamma u_0 + x_0r_0)\nu + (\alpha w_0 - z_0r_0)\lambda = 0, \\ (\alpha v_0 + y_0r_0)\lambda + (\beta u_0 - x_0r_0)\mu = 0 : \end{array}\right.$$

or l'axe de la parabole, qui a pour direction la droite

$$\frac{x}{\mu z_0 - \nu y_0} = \frac{y}{\nu x_0 - \lambda z_0} = \frac{z}{\lambda y_0 - \mu x_0},$$

est évidemment parallèle à l'intersection du plan de la parabole et du plan lieu des centres des coniques (S) $x_0x + y_0y + z_0z = 0$,

$$\frac{x}{v_0z_0 - w_0y_0} = \frac{y}{w_0x_0 - u_0z_0} = \frac{z}{u_0y_0 - v_0x_0}.$$

On en déduit $$\frac{\lambda}{u_0} = \frac{\mu}{v_0} = \frac{\nu}{w_0},$$

et en portant dans (1), on retombe sur les équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$.

Les plans donnant des paraboles sont donc les plans tangents communs en nombre infini à ces trois coniques.

Les équations des paraboles sont les mêmes que celles des courbes contenues dans les plans tangents aux pieds des normales :

$$\Sigma\alpha(u_0r_0vw + v_0w_0ur) = 0.$$

Elles restent fixes lorsque (E) varie en faisant partie d'un faisceau homofocal.

La projection de OP sur le plan de la parabole est encore la directrice de la courbe. Cette droite est l'intersection du plan (Π) de la parabole et du plan perpendiculaire mené par OP :

$$u_0x + v_0y + w_0z + r_0 = 0, \qquad \frac{\alpha x}{u_0} + \frac{\beta y}{v_0} + \frac{\gamma z}{w_0} = 0.$$

On peut poser comme on sait

$$\frac{u_0}{r_0} = -\frac{x_0}{a^2 + \theta}, \qquad \frac{v_0}{r_0} = -\frac{y_0}{b^2 + \theta}, \qquad \frac{w_0}{r_0} = -\frac{z_0}{c^2 + \theta}.$$

On aura alors à éliminer $\theta$ entre

$$\frac{x_0x}{a^2 + \theta} + \frac{y_0y}{b^2 + \theta} + \frac{z_0z}{c^2 + \theta} - 1 = 0,$$

$$\frac{\alpha(a^2 + \theta)x}{x_0} + \frac{\beta(b^2 + \theta)y}{y_0} + \frac{\gamma(c^2 + \theta)z}{z_0} = 0.$$

Après quelques réductions, on arrive à l'équation

$$\Sigma\frac{\alpha x}{x_0}\Sigma\alpha x_0 x\left(\frac{x}{x_0}-\frac{y}{y_0}\right)\left(\frac{x}{x_0}-\frac{z}{z_0}\right)+\alpha\beta\gamma\left(\frac{y}{y_0}-\frac{z}{z_0}\right)\left(\frac{z}{z_0}-\frac{x}{x_0}\right)\left(\frac{x}{x_0}-\frac{y}{y_0}\right)=0,$$

qui est celle d'une surface du quatrième ordre admettant visiblement pour droite triple la droite OP (le plan $\Sigma\frac{\alpha x}{x_0}=0$ contient OP, puisque $\Sigma\alpha=0$).

**5.** Toutes les paraboles sont évidemment situées sur la développable $(\Sigma)$ circonscrite aux trois paraboles $P=0$, $Q=0$, $R=0$, puisque, étant de la forme $u_0P+v_0Q+w_0R=0$, ces paraboles touchent tous les plans tangents à $(\Sigma)$ suivant les génératrices de cette surface.

On peut d'ailleurs le vérifier directement.

Le point de contact de la parabole $f(u, v, w, r)\equiv u_0P+v_0Q+w_0R=0$, et du plan tangent à $(\Sigma)$, $u_1, v_1, w_1, r_1$, a pour coordonnées

$$\frac{x}{f'_{u_1}}=\frac{y}{f'_{v_1}}=\frac{z}{f'_{w_1}}=\frac{1}{f'_{r_1}},$$

qui, en tenant compte des relations $P_1=0$, $Q_1=0$, $R_1=0$, s'écrivent

$$\frac{\dfrac{u_1x}{x_0}}{v_0w_1-w_0v_1}=\frac{\dfrac{v_1y}{y_0}}{w_0u_1-u_0w_1}=\frac{\dfrac{w_1z}{z_0}}{u_0v_1-v_0u_1}=\frac{-r_1^2}{\Sigma\alpha u_0v_1w_1}.$$

Quels que soient $u_0, v_0, w_0$, on a

$$u_1x+v_1y+w_1z+r_1=0,\qquad \frac{u_1^2x}{x_0}+\frac{v_1^2y}{y_0}+\frac{w_1^2z}{z_0}=0.$$

Ces équations sont celles de la droite G, lieu des points de contact de toutes les paraboles. Or en remplaçant $\frac{u_1}{r_1}$, $\frac{v_1}{r_1}$, $\frac{w_1}{r_1}$ respectivement par $-\frac{x_0}{a^2+\theta}$, $-\frac{y_0}{b^2+\theta}$, $-\frac{z_0}{c^2+\theta}$, elles prennent la forme

$$(1)\qquad \frac{x_0x}{a^2+\theta}+\frac{y_0y}{b^2+\theta}+\frac{z_0z}{c^2+\theta}-1=0,\qquad (2)\qquad \frac{x_0x}{(a^2+\theta)^2}+\frac{y_0y}{(b^2+\theta)^2}+\frac{z_0z}{(c^2+\theta)^2}=0.$$

On voit bien que G est la droite de contact du plan (1) avec son enveloppe, c'est-à-dire une génératrice de $(\Sigma)$.

La développable $(\Sigma)$ est une surface de troisième classe.

En éliminant $\theta$ entre les équations (1) et (2), on obtient une équation dont les termes de degré le plus élevé en $x, y, z$ sont

$$(x_0x+y_0y+z_0z)^2(\Sigma\alpha^2x_0^2x^2-2\Sigma\beta\gamma y_0z_0yz).$$

La surface $(\Sigma)$ est donc du quatrième ordre.

Par suite la section de $(\Sigma)$ par un de ses plans tangents se compose d'une parabole et d'une droite (comptée deux fois).

On peut exprimer les coordonnées d'un point de la surface en fonction de deux paramètres. Posons en effet $x_0x+y_0y+z_0z=k$.

Nous pourrons résoudre par rapport à $x, y, z$ les équations (1) et (2), et nous aurons

$$x_0x=\frac{1}{\beta\gamma}(\theta+a^2)^2(2\theta+b^2+c^2-k),$$

ou, en posant $2\theta+a^2+b^2+c^2-k=-\rho$, et $\beta\gamma x_0x=X$, etc.,

$$X=-(\theta+a^2)^2(\rho+a^2),$$
$$Y=-(\theta+b^2)^2(\rho+b^2),$$
$$Z=-(\theta+c^2)^2(\rho+c^2).$$

Les courbes $\rho=C^{te}$ sont les paraboles, et les courbes $\theta=C^{te}$ les droites situées sur la surface.

Les génératrices rectilignes de toute surface développable sont, comme on sait, tangentes à une

courbe qu'on appelle l'*arête de rebroussement*, parce que toute section plane de la surface présente des points de rebroussement aux points de rencontre avec la courbe.

Dans le cas particulier qui nous occupe, les sections planes de $(\Sigma)$ sont en général des quartiques tricuspidales.

Soit en effet un plan quelconque, que, pour la commodité des calculs, nous écrirons

$$AX + BY + CZ + D = 0.$$

Cette équation, où l'on remplace X, Y, Z par leurs valeurs, détermine $\rho$ en fonction de $\theta$,

$$\text{(I)} \qquad \rho\Sigma A(\theta + a^2)^2 + \Sigma Aa^2(\theta + a^2) + D = 0.$$

Si l'on tire $\rho$ de cette équation pour le porter dans les valeurs de X, Y, Z, on trouve des expressions rationnelles du quatrième degré en $\theta$, qui montrent que la section est bien une quartique.

Or on a

$$\frac{dX}{d\theta} = -(\theta + a^2)(2\rho + \theta\rho_\theta' + a(2 + \rho_\theta')),$$

$$\frac{dY}{d\theta} = -(\theta + b^2)(2\rho + \theta\rho_\theta' + b(2 + \rho_\theta')),$$

$$\frac{dZ}{d\theta} = -(\theta + c^2)(2\rho + \theta\rho_\theta' + c(2 + \rho_\theta')).$$

Le point (X, Y, Z) sera un rebroussement si les trois dérivées s'annulent pour une même valeur de $\theta$. On voit immédiatement que cette valeur de $\theta$ doit être telle que :

$$2\rho + \theta\rho_\theta' = 0, \qquad 2 + \rho_\theta' = 0.$$

On en conclut $\rho = \theta$, et en portant dans l'équation (I),

$$\Sigma A(\theta + a^2)^2 + D = 0,$$

équation qui donne trois valeurs de $\theta$ correspondant aux trois points de rebroussement.

Les équations $\rho - \theta = 0$, $2 + \rho_\theta' = 0$ sont bien compatibles, car la seconde peut se mettre sous la forme

$$\Sigma A(\theta + a^2)^2 + D = \Sigma A(\theta + a^2) = 0.$$

Lorsque le plan varie, le lieu des points de rebroussement [arête de rebroussement de la surface $(\Sigma)$] est la cubique gauche

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} X = -(\theta + a^2), \\ Y = -(\theta + b^2), \\ Z = -(\theta + c^2). \end{cases}$$

Les trois plans de coordonnées sont plans osculateurs de cette cubique, comme d'ailleurs tous les plans tangents à $(\Sigma)$.

Nous avons dit que les sections planes de $(\Sigma)$ sont en général des quartiques tricuspidales. Ces courbes se décomposent lorsque le plan passe par une génératrice G de $(\Sigma)$ : la section comprend la droite G et une cubique cuspidale, car la cubique $(\Gamma)$, tangente à G, rencontre le plan en un point différent du point de contact.

Comme exercice, vérifions que la tangente à la courbe $(\Gamma)$ est une génératrice G.

Les équations de la tangente au point $\theta$ sont

$$\text{(II)} \qquad \frac{X + (\theta + a^2)^3}{(\theta + a^2)^2} = \frac{Y + (\theta + b^2)^3}{(\theta + b^2)^2} = \frac{Z + (\theta + c^2)^3}{(\theta + c^2)^2} = \sigma.$$

Or les équations d'une génératrice G s'écrivent, en introduisant les variables X, Y, Z,

$$\text{(3)} \qquad \frac{\alpha X}{\theta + a^2} + \frac{\beta Y}{\theta + b^2} + \frac{\gamma Z}{\theta + c^2} - \alpha\beta\gamma = 0, \qquad \frac{\alpha X}{(\theta + a^2)^2} + \frac{\beta Y}{(\theta + b^2)^2} + \frac{\gamma Z}{(\theta + c^2)^2} = 0.$$

Si l'on tient compte des relations $\Sigma\alpha = 0$, $\Sigma a^2\alpha = 0$, $\Sigma a^4\alpha = -\alpha\beta\gamma$, on voit que les équations sont vérifiées lorsqu'on y porte les valeurs de X, Y, Z tirées de (II).

On constaterait tout aussi facilement que le plan (3) est le plan osculateur à la cubique $(\Gamma)$.

Revenons maintenant à la discussion des sections planes de $(\Sigma)$.

Une des génératrices G est rejetée à l'infini. C'est la droite de l'infini du plan $x_0x + y_0y + z_0z = 0$. Il en résulte que toutes les sections perpendiculaires à OP ne comprennent qu'une cubique cuspidale à distance finie.

Pour avoir les équations de cette cubique dans le plan $x_0x + y_0y + z_0z = k$, il suffit d'ailleurs de considérer $k$ comme constante ; en posant par exemple $k - \Sigma a^2 = h$, on a

$$X = (\theta + a^2)^2(2\theta - a^2 - h),$$
$$Y = (\theta + b^2)^2(2\theta - b^2 - h),$$
$$Z = (\theta + c^2)^2(2\theta - c^2 - h).$$

Le point de rebroussement de cette cubique correspond à la valeur $3\theta = h$.

Enfin les sections par les plans tangents comprennent, comme on a vu, une parabole et une droite comptée deux fois. Ce sont les seules sections coniques de $(\Sigma)$.

6. Pour avoir le lieu cherché, il suffit, dans l'équation (1) du 1°, de considérer $u, v, w, r$ comme des constantes, et $x_0, y_0, z_0$ comme les coordonnées ponctuelles courantes.

En développant, on voit que les termes du troisième degré en $x_0, y_0, z_0$ disparaissent, de sorte que le lieu est une surface du deuxième ordre

$$\begin{aligned} 2uvwr(a^2\alpha x_0^2 + b^2\beta y_0^2 + c^2\gamma z_0^2 - \alpha\beta\gamma) \\ + \Sigma[\alpha(a^2u^2 + r^2) + \alpha'(b^2v^2 - c^2w^2)]ury_0z_0 \\ + \Sigma[\alpha'(a^2u^2 + r^2) + \alpha(b^2v^2 - c^2w^2)]\alpha vwx_0 = 0. \end{aligned}$$

(On a posé $\gamma - \beta = 2a^2 - b^2 - c^2 = \alpha'$, etc.)

C'est bien un hyperboloïde équilatère, car $\Sigma a^2\alpha = \Sigma a^2(b^2 - c^2) = 0$. Nous avons vu que l'équation (1) du 1° était satisfaite par

$$\frac{u}{r} = -\frac{x_0}{a^2 + \theta}, \qquad \frac{v}{r} = -\frac{y_0}{b^2 + \theta}, \qquad \frac{w}{r} = -\frac{z_0}{c^2 + \theta},$$

quel que soit $\theta$.

$u, v, w, r$ étant ici des constantes, ces équations représentent tous les points de la droite $\Delta$ menée par le pôle du plan $(u, v, w, r)$ perpendiculairement à ce plan.

Cherchons le lieu du centre $(x, y, z)$ de la conique (S) :

$$x = \nu y_0 - \mu z_0, \qquad y = \lambda z_0 - \nu x_0, \qquad z = \mu x_0 - \lambda y_0,$$

lorsque le point $(x_0, y_0, z_0)$ se déplace sur l'hyperboloïde.

On a les équations $f'_u = 0$, $f'_v = 0$, $f'_w = 0$, $f'_r = 0$,

ou

$$a^2u + \gamma\nu v + \beta\mu w - xr = 0,$$
$$\gamma\nu u + b^2v + \alpha\lambda w - yr = 0,$$
$$\beta\mu u + \alpha\lambda v + c^2w - zr = 0,$$
$$\text{(I)} \qquad xu + yv + zw + r = 0.$$

Tirons des trois premières les valeurs de $\lambda, \mu, \nu$ :

$$2\alpha vw\lambda = a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 - r^2 - 2rux, \ldots,$$

et portons dans l'équation $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$ ; nous obtiendrons

$$\text{(II)} \qquad \frac{u^2x^2}{\alpha} + \frac{v^2y^2}{\beta} + \frac{w^2z^2}{\gamma} - \frac{Crux}{2\alpha} - \frac{C'rvy}{2\beta} - \frac{C''rwz}{2\gamma} = 0,$$

avec

$$C = a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 - r^2, \qquad \text{etc.}$$

Le lieu des centres est la conique d'intersection du plan (I) et de la surface (II).

Si le plan passe par le centre de l'ellipsoïde, $r = 0$, et la surface se réduit à

$$\Sigma[\alpha'(a^2u^2 + r^2) + \alpha(b^2v^2 + c^2w^2)]\alpha vwx_0 = 0,$$

plan passant par l'origine et par la perpendiculaire au plan donné menée par ce point.

$\lambda, \mu, \nu$ sont alors des constantes, et le lieu des centres des coniques (S) est la droite d'intersection

du plan donné et du plan

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$

ou

$$\frac{Cux}{\alpha} + \frac{C'vy}{\beta} + \frac{C''wz}{\gamma} = 0.$$

VASNIER.

Très bonnes solutions : MM. J. Haag, élève de l'École normale supérieure ; Houdinière ; R. Bouvaist.

---

**1234.** — *On considère l'ellipse* E *qui a pour équation, rapportée à ses axes,* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *et un point* M *variable sur cette ellipse.*

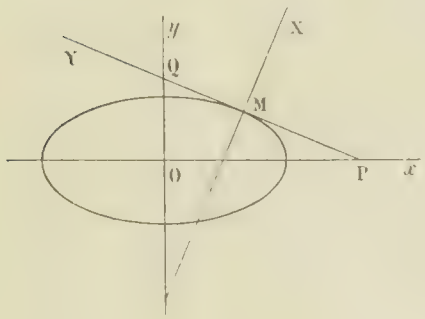
1° *Équation de l'ellipse* C *qui admet pour axes la tangente* MT *et la normale* MN *à l'ellipse* E *et qui est tangente en* O *à* O$y$ ; *la construire géométriquement ; montrer que son grand axe conserve la même longueur.*

2° *Lieu des points de contact des tangentes à l'ellipse* C *qui sont parallèles à* OM.

3° *Lieu des foyers de l'ellipse* C.

4° *Résoudre les mêmes questions pour l'hyperbole* H *qui a pour axes* MT *et* MN *et qui est tangente en* O *à* O$x$. *Enveloppe de ses asymptotes.*

Soient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse E rapportée à ses axes, et $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées du point M. La tangente MY et la normale MX en ce point à l'ellipse ont respectivement pour équations




$$bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab = 0,$$

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

L'équation générale des coniques (Γ) admettant pour axes les droites MX et MY est, *en prenant ces deux droites pour axes de coordonnées,*

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} - 1 = 0,$$

et comme dans cette équation X désigne la distance d'un point quelconque de la courbe à la droite MY, et Y la distance de ce point à la droite MX, les formules de transformation de coordonnées sont

$$X = \frac{bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}}, \qquad Y = \frac{ax\sin\varphi - by\cos\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}}.$$

et par suite, l'équation générale des coniques (Γ) est *par rapport aux axes* O$x$ et O$y$

$$(1) \qquad \frac{(bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab)^2}{A(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)} + \frac{(ax\sin\varphi - by\cos\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi)^2}{B(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)} - 1 = 0,$$

A et B désignant les carrés des demi-longueurs d'axes situés respectivement sur MX et MY.

1. Écrivons que la conique (1) est tangente en O à O$y$ : il faut pour cela annuler le coefficient de $y$ et le terme indépendant. Nous obtenons ainsi les deux équations

$$\frac{-a^2b\sin\varphi}{A} + \frac{bc^2\sin\varphi\cos^2\varphi}{B} = 0, \qquad \frac{a^2b^2}{A(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)} + \frac{c^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{B(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)} - 1 = 0.$$

Nous en tirons aisément

$$A = a^2, \qquad B = c^2\cos^2\varphi ;$$

et nous voyons d'abord que cette conique est une *ellipse* dont le grand axe est égal au grand axe de l'ellipse donnée, et est porté sur la normale MX.

L'équation de cette ellipse (C) est donc

$$(C) \qquad \frac{(bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab)^2}{a^2(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)} + \frac{(ax\sin\varphi - by\cos\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi)^2}{c^2\cos^2\varphi(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)} - 1 = 0.$$

Il est aisé de construire cette ellipse. En effet, soient P et Q les points où la tangente MY rencontre $Ox$ et $Oy$ ; d'après une propriété bien connue, les foyers de l'ellipse (C) sont à l'intersection de la droite MX et du cercle décrit sur PQ comme diamètre.

2. Le diamètre conjugué de OM dans l'ellipse (C) est parallèle à $Oy$, puisque $Oy$ est tangente au point O à l'ellipse. Soient H et H' les extrémités de ce diamètre. Le premier théorème d'Apollonius nous donne

$$\overline{MO}^2 + \overline{MH}^2 = a^2 + c^2 \cos^2 \varphi,$$

ou

$$\overline{MH}^2 = a^2 + c^2 \cos^2 \varphi - (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) = c^2.$$

On a donc $MH = MH' = c$, par suite le lieu des points H et H' se compose des deux ellipses obtenues en imprimant à l'ellipse E deux translations parallèles à l'axe des $y$ et égales à $c$, l'une dans le sens $Oy$ et l'autre dans le sens opposé.

3. Les demi-axes de l'ellipse (C) étant égaux à $a$ et à $c \cos \varphi$, la demi distance focale est $\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}$, et comme les foyers sont situés sur la normale au point M à l'ellipse E, les coordonnées $(x, y)$ de ces points sont données par les équations

$$\frac{x - a \cos \varphi}{b \cos \varphi} - \frac{y - b \sin \varphi}{a \sin \varphi} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}} = \pm 1.$$

On en déduit

$$\begin{cases} x = (a + b) \cos \varphi, \\ y = (a + b) \sin \varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (a - b) \cos \varphi, \\ y = -(a - b) \sin \varphi ; \end{cases}$$

il en résulte que le lieu de ces points se compose des deux cercles

$$x^2 + y^2 = (a \pm b)^2$$

qui ont pour centre le point O et pour rayons $a + b$ et $a - b$.

4. Écrivons que l'équation (1) représente une conique tangente en O à $Ox$, nous avons les conditions

$$\frac{-ab^2 \cos \varphi}{A} - \frac{ac^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{B} = 0, \qquad \frac{a^2 b^2}{A(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)} + \frac{c^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{B(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)} - 1 = 0 ;$$

Nous en tirons sans difficulté

$$A = b^2, \qquad B = -c^2 \sin^2 \varphi.$$

La conique ainsi obtenue (H) est une hyperbole qui admet MX pour axe réel, et la longueur de cet axe est égale à $2b$, elle est constante.

Cette hyperbole est homofocale à l'ellipse (C), puisque ces deux courbes ont mêmes axes et sont orthogonales au point O. Le lieu des foyers de l'hyperbole se compose donc des deux cercles

$$x^2 + y^2 = (a \pm b)^2.$$

D'ailleurs, si l'on désigne ces foyers par $\varphi$ et $\varphi'$, on a

$$O\varphi + O\varphi' = 2a, \qquad O\varphi - O\varphi' = 2b,$$

on en déduit

$$O\varphi = a + b, \qquad O\varphi' = a - b.$$

Le diamètre conjugué de OM rencontre l'hyperbole en des points imaginaires.

Comme l'équation de (H) est

$$\frac{(bx \cos \varphi + ay \sin \varphi - ab)^2}{b^2(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)} - \frac{(ax \sin \varphi - by \cos \varphi - c^2 \sin \varphi \cos \varphi)^2}{c^2 \sin^2 \varphi (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)} - 1 = 0,$$

l'équation de l'ensemble des asymptotes est

$$\frac{(bx \cos \varphi + ay \sin \varphi - ab)^2}{b^2} - \frac{(ax \sin \varphi - by \cos \varphi - c^2 \sin \varphi \cos \varphi)^2}{c^2 \sin^2 \varphi} = 0.$$

Chaque asymptote peut donc être représentée par l'équation

$$(bx \cos \varphi + ay \sin \varphi - ab)c \sin \varphi + \varepsilon b(ax \sin \varphi - by \cos \varphi - c^2 \sin \varphi \cos \varphi) = 0,$$

où $\varepsilon$ désigne $\pm 1$, ou encore par

$$(x - \varepsilon c)(bc \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon ab \sin \varphi) + y(ac \sin^2 \varphi - \varepsilon b^2 \cos \varphi) = 0.$$

On voit ainsi que les asymptotes de l'hyperbole H passent par les foyers de l'ellipse E.

Ce résultat était à prévoir, car les asymptotes de H ont pour bissectrices MX et MY, et rencontrent $Ox$ en des points équidistants du point O ; ces points ne peuvent être que les foyers de l'ellipse E.

PARROD, à Vesoul.

Bonnes solutions par MM. E.-N. Barisien ; Blanchot, à Aurillac ; J. Haag ; M. Treillou ; Dnallor Legram ; R. Bouvaist.

## PHYSIQUE

**1227.** — *Deux surfaces sphériques de centre O ont respectivement pour rayon un centimètre et un grand nombre de centimètres. Elles sont conductrices et portent des charges électriques* M *et* $-M$ ($M = 10^{-8}$ *coulombs*).

1° *Prenant pour origine des potentiels le potentiel de la sphère extérieure, on demande quel est le potentiel sur la petite sphère, quel est le potentiel à un mètre du centre, et quelle est l'énergie accumulée dans le condensateur formé par les deux sphères.*

2° *Un corpuscule portant une charge* $\mu = 10^{-19}$ *coulombs, constitue un élément de surface de la petite sphère ; quelle est la valeur de la force qui le sollicite à se détacher, et à quelle force serait-il soumis s'il se trouvait à une distance finie mais très petite de cette surface ? Ce corpuscule s'étant détaché sans vitesse initiale, et se déplaçant ensuite suivant le rayon ; on demande de calculer à un pour cent près le travail effectué par les forces électriques quand le corpuscule sera arrivé à un mètre du centre, et l'on demande quelle sera alors sa vitesse, sachant que sa masse est* $m = 10^{-22}$ *grammes.*

3° *Supposant maintenant que le corpuscule subisse une résistance proportionnelle à la vitesse, on écrira d'abord l'équation qui permettrait de trouver le mouvement de ce corpuscule, dans l'hypothèse où l'on pourrait négliger le produit de sa masse par son accélération devant les forces mises en jeu. On calculera ensuite sa vitesse à un mètre du centre, sachant que si ce corpuscule était lancé avec une vitesse de un centimètre par seconde dans la direction des lignes de forces d'un champ uniforme de un volt par centimètre, il continuerait à se déplacer d'un mouvement rectiligne et uniforme.*

(*École normale supérieure, concours de 1903.*)

1° Par définition, le potentiel à une distance $x$ du centre est égal au travail des forces électriques sur une charge égale à l'unité qui se transporterait depuis le point considéré jusqu'à la sphère extérieure. Ce travail, exprimé en unités électrostatiques, est égal à $\int_x^\infty \frac{M}{x^2}\,dx = \frac{M}{x}$.

Sur la sphère, $x = 1$, tandis que $M = 10^{-8} \times 3 \times 10^9 = 30$ unités électrostatiques, donc $V = 30$.

A un mètre du centre, $x = 100$ ; le potentiel est 100 fois plus petit : $V' = 0{,}3$.

L'énergie a pour expression générale $U = \frac{1}{2}\Sigma MV$, ce qui donne ici $U = 450$ ergs.

2° La force s'exerçant en un point d'un conducteur électrisé est égale à $2\pi\sigma$, $\sigma$ désignant la densité superficielle, toujours en unités électrostatiques ; or $\sigma = \frac{M}{4\pi}$ et $\mu = 3 \times 10^{-11}$, d'où $f = \frac{9}{2} \times 10^{-9}$ dynes.

A une distance finie mais très petite, le champ est $4\pi\sigma$ et la force cherchée est $f' = 9 \times 10^{-9}$.

Le travail effectué par les forces électriques est égal, par définition du potentiel, à $(V - V')\mu$ ; comme $V' = \frac{1}{100}V$, on peut, à un pour cent près, ne prendre que le terme $V\mu$, ce qui donne $W = 9 \times 10^{-9}$ ergs.

La vitesse est liée au travail par la relation $W = \frac{1}{2}mv^2$, qui donne ici $v^2 = 2 \times 9 \times 10^{13}$.

3° L'équation du mouvement est $\frac{M}{x^2}\mu - k\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$, ou simplement $k\frac{dx}{dt} = \frac{M}{x^2}\mu$.

A un mètre la vitesse serait $\frac{dx}{dt}\ \frac{M\mu}{k \times \overline{100}^2}$.

Or, dans un champ de 1 volt par centimètre, la force est $\frac{1}{300}$ et l'action sur le corpuscule $\frac{\mu}{300}$, cette action serait égale à la résistance $k \times 1$; donc $k = \frac{\mu}{300}$. Portons cette valeur dans l'expression de la vitesse et nous trouvons $\frac{dx}{dt} = 0{,}9$.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1307**. — On considère deux axes rectangulaires fixes $Ox$ et $Oy$ et un cercle fixe (C) tangent à ces deux droites.

Cela posé, on mène en un point M variable sur le cercle (C) une tangente à ce cercle qui rencontre les axes en A et B.

1° Former l'équation du cercle $(C_1)$ circonscrit au triangle OAB. Trouver le lieu du point de ce cercle qui est diamétralement opposé au point O. Trouver aussi l'enveloppe de $(C_1)$ et indiquer la relation qui existe entre ces deux courbes.

2° Former l'équation de la parabole tangente à $Ox$, $Oy$ et à AB en son milieu. Trouver l'axe, le foyer et le lieu du foyer de cette parabole.

3° Trouver le lieu de l'ombilic commun à la parabole et au cercle (C) et situé sur AB.

E. H.

**1308**. — On considère une ellipse, un point P et les cordes de l'ellipse qui passent en ce point. Sur chacune de ces cordes prise pour diamètre on décrit un cercle.

Trouver l'enveloppe de ces cercles.

Cette enveloppe est une quartique bicirculaire. Trouver pour quelles positions du point P elle se décompose en deux cercles.

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE CENTRALE (1903, 2e Session)

### Statique.

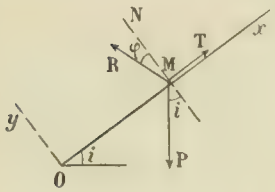
**1260**. — *Énoncer les lois du frottement des solides.*

*Quelle est la charge* P, *supposée concentrée en un point matériel, que pourrait traîner, en le remontant sur un plan incliné de l'angle i sur l'horizon, un cheval exerçant un effort de traction* T *supposé parallèle à la ligne de plus grande pente du plan, sachant que le coefficient du frottement de la charge sur le plan est f?*

*Quelle est, avec ces données, le minimum de poids du cheval, sachant que le coefficient du frottement de ses pieds sur le plan est $f_1$?*

*Appliquer à* $T = 110^{kg}$, $f = 0{,}05$, $f_1 = 0{,}30$, $\tan i = 0{,}03$.

Supposons la charge P concentrée en un point matériel M. Ce point peut être considéré comme libre sous l'action des forces T, P et de la réaction R du plan, qui fait avec la normale MN un angle égal à l'angle $\varphi$ du frottement ($\operatorname{tg}\varphi = f$), en sens contraire du mouvement, supposé ascendant.




Les équations du mouvement du point M par rapport aux axes $Ox$, $Oy$ de la figure sont

$$mx'' = T - R\sin\varphi - P\sin i.$$
$$my'' = R\cos\varphi - P\cos i.$$

On a d'ailleurs $x'' \geqslant 0$ (mouvement ascendant), $y'' = 0$; d'où

$$R = \frac{P\cos i}{\cos\varphi},$$

$$T - P\cos i\operatorname{tg}\varphi - P\sin i \geqslant 0$$

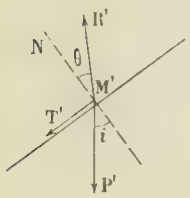
ou, en remplaçant $\operatorname{tg}\varphi$ par $f$,

$$P \leqslant \frac{T}{f\cos i + \sin i}.$$

On a ainsi la charge maxima que peut traîner le cheval avec un effort T.

D'autre part le cheval M′ est soumis à l'action de son poids P′, il éprouve de la part de la charge une réaction T′ égale et opposée à l'action T qu'il exerce sur elle. Ces deux forces tendraient à le faire glisser sur le plan incliné vers le bas.

Pour qu'il reste en équilibre, il faut que la réaction R′ du plan sur le cheval fasse avec la normale un angle $\theta$, inférieur ou au plus égal à l'angle $\varphi_1$ du frottement ($\operatorname{tg}\varphi_1 = f_1$). Cette réaction R′ sera évidemment dans le plan déterminé par la ligne de plus grande pente et la normale. Écrivons que les trois forces T′, P′, R′ se font équilibre, nous aurons les deux équations




$$-T' - P'\sin i + X' = 0,$$
$$-P'\cos i + Y' = 0,$$

d'où on tire pour les composantes de la réaction R′

$$X' = T' + P'\sin i,$$
$$Y' = P'\cos i,$$

et

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{X'}{Y'} = \frac{T' + P'\sin i}{P'\cos i}.$$

La condition d'équilibre sera $\operatorname{tg}\theta \leqslant \operatorname{tg}\varphi_1 = f_1$,

$$\frac{T' + P'\sin i}{P'\cos i} \leqslant f_1,$$

$f_1$ étant d'ailleurs plus grand que $\operatorname{tg} i$, sans quoi le cheval ne pourrait pas se tenir sur le plan incliné. On en déduit

$$P' \geqslant \frac{T}{f_1\cos i - \sin i},$$

d'où le minimum de poids du cheval.

*Application.* — $T = 110^{kg}$, $f = 0{,}05$, $f_1 = 0{,}30$, $\operatorname{tg} i = 0{,}03$.

$$P_M = \frac{110.\sqrt{1{,}0009}}{0{,}08} = 1375^{kg}{,}62 \ldots,$$

$$P'_m = \frac{110.\sqrt{1{,}0009}}{0{,}27} = 407^{kg}{,}59 \ldots$$

On a pris $\sqrt{1,0009}$, qui est la moyenne géométrique entre 1 et 1,0009 égal à la moyenne arithmétique 1,00045. P. L.

Solution exacte de M. J. Haag.

## Géométrie analytique et Cinématique.

**1261.** — 1° *Construire la courbe* S *représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$20y = 3x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 34x.$$

2° *Sachant qu'un mobile parcourt la trajectoire* S *d'une vitesse donnée par la formule* $v^2 = \beta - y$, *indiquer pour diverses valeurs de* $\beta$ *les limites d'excursion sur la trajectoire. Indiquer la forme générale de l'hodographe pour l'excursion correspondante à* $\beta = 1,25$, *ainsi que les points pour lesquels l'accélération tangentielle est nulle et ceux pour lesquels la composante normale de l'accélération est nulle.*

1. La courbe passe à l'origine et admet pour tangente en ce point la droite $20y = 34x$. Elle présente deux branches infinies paraboliques dans la direction $Oy$. Enfin, les points de rencontre avec l'axe des $x$ correspondent aux racines de l'équation

$$3x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 34x = 0,$$

savoir $x = 0$, $x = -2$; les deux autres racines sont imaginaires.

*Variation de* $y$. — La dérivée

$$y' = \frac{1}{10}(6x^3 - 12x^2 - 11x + 17)$$

s'annule pour $x = 1$ et pour deux autres valeurs, racines de l'équation

$$6x^2 - 6x - 17 = 0$$

d'où

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{17}{6}} = \begin{cases} -1,25\ldots \\ 2,25\ldots \end{cases}$$

Les valeurs correspondantes de $y$ sont : pour $x = 1$, $y = \frac{18}{20} = 0,9$ (maximum, M); et pour

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{17}{6}},$$

$$y = \frac{1}{20}\left[-\frac{181}{12} \pm \frac{37}{3}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{17}{6}}\right] = \begin{cases} -1,87 \text{ (minimum, } m_1), \\ 0,33 \text{ (minimum, } m_2). \end{cases}$$

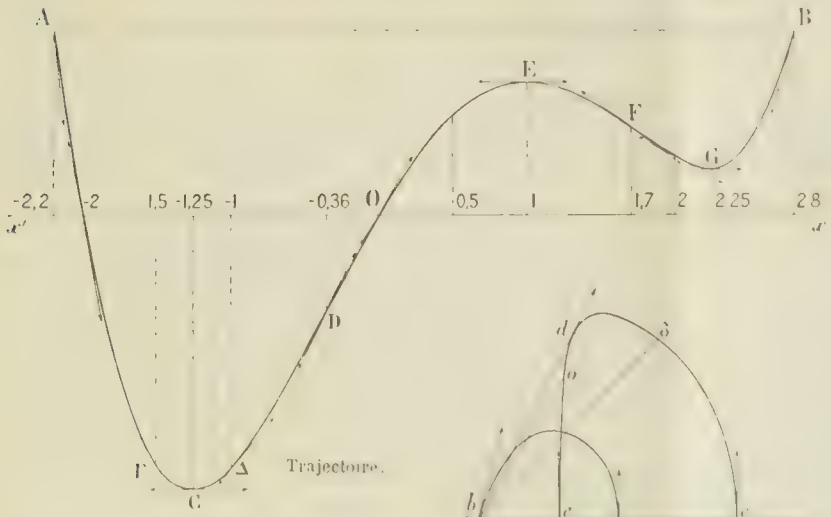
Ces valeurs étant calculées au moyen du reste de la division de $y$ par le trinome $6x^2 - 6x - 17$, à savoir

$$\frac{1}{20}\left[\frac{37}{3}x - \frac{85}{4}\right].$$

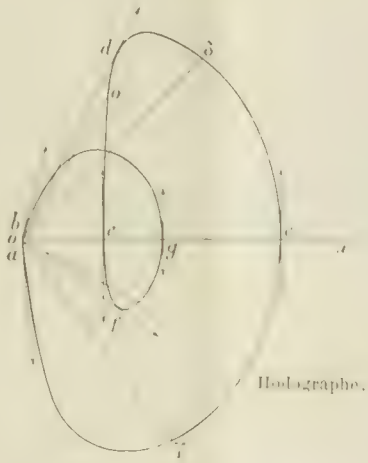
*Concavité.* — La dérivée seconde $y'' = \frac{1}{10}(18x^2 - 24x - 11)$ s'annule pour

$$x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{19}{2}} = \begin{cases} -0,36 \\ 1,69. \end{cases}$$

Elle est positive en dehors de ces deux valeurs, négative dans l'intervalle. Pour ces valeurs de $x$ la




Trajectoire.



Hodographe.

courbe présente des points d'inflexion. Les valeurs correspondantes de $y$ peuvent se calculer au moyen du reste de la division du polynome $y$ par le trinome $x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{11}{18}$, à savoir

$$\frac{1}{20}\left[\frac{110}{9}x - \frac{319}{36}\right],$$

et les valeurs correspondantes de $y'$ au moyen du reste de la division de $y'$ par le même trinome, savoir

$$\frac{1}{10}\left[-\frac{38}{3}x \quad \frac{131}{9}\right].$$

On trouve ainsi pour

$$x = -0{,}36, \qquad y = -0{,}66,$$
$$y' = 1{,}91,$$
$$x = 1{,}69, \qquad y = 0{,}59$$
$$y' = -0{,}69.$$

Pour construire la courbe, nous calculerons également les valeurs de $y$ et de $y'$ pour les valeurs entières de $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, afin d'avoir aussi exactement que possible la forme de la portion de courbe qui est parcourue par le mobile de la seconde partie.

2. Un mobile parcourant la trajectoire S d'une vitesse donnée par la formule $v^2 = \beta - y$, il faut pour que le mouvement se produise que $y$ soit plus petit que $\beta$.

Cela étant, soit :

$\beta < m_1$, la droite $y = \beta$ est toute entière au-dessous de la trajectoire ; le mouvement n'a pas lieu.

$m_1 < \beta < m_2$, la droite $y = \beta$ coupe la trajectoire en deux points A,B, le mouvement a lieu sur l'arc $Am_1B$ (*fig.* 1).

$m_2 < \beta < M$, la droite $y = \beta$ coupe la trajectoire en A et B, puis en C et D ; le mouvement peut avoir lieu soit sur l'arc $Am_1B$, soit sur l'arc $Cm_2D$ (*fig.* 2).

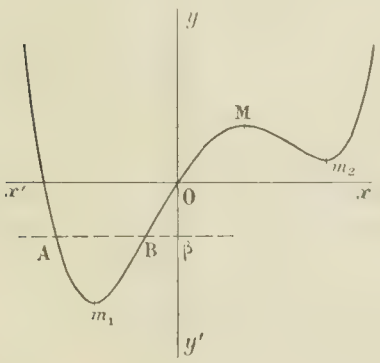



Fig. 1.

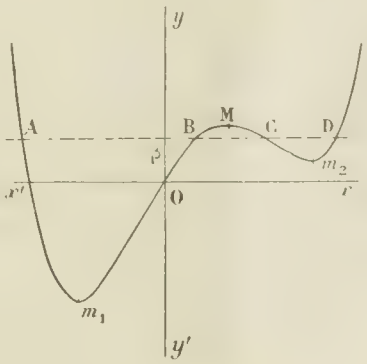



Fig. 2.

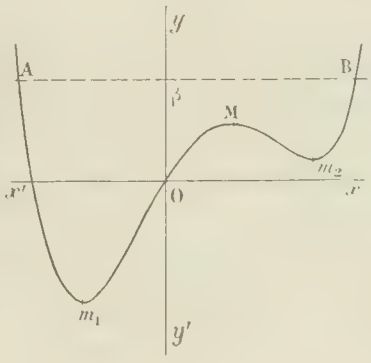



Fig. 3.

$M < \beta$, la droite $y = \beta$ coupe la trajectoire en deux points A et B, le mouvement aura lieu sur l'arc $Am_1Mm_2B$ (*fig.* 3). C'est ce qui arrive en particulier dans l'hypothèse $\beta = 1{,}25$.

Les abscisses des points A et B sont les racines réelles de l'équation

$$3x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 34x - 25 = 0.$$

On constate facilement que cette équation n'admet pas de racine entière ; il conviendrait d'appliquer la méthode des racines fractionnaires, puis, s'il y a lieu, l'une des méthodes d'approximation, ce qui conduirait à des calculs longs et inutiles, les points A et B étant déterminés graphiquement avec une exactitude suffisante.

La trajectoire étant construite avec soin, nous aurons les différents points de l'hodographe en menant par un point O des vecteurs équipollents aux vecteurs vitesses aux différents points de la trajectoire. La direction est donnée par la valeur de $y'$ ; sur la direction ainsi obtenue, il faudra porter une longueur égale à $v = \sqrt{\beta - y} = \sqrt{1,25 - y}$, dans le sens positif si le mouvement a lieu de A vers B (mouvement direct), dans le sens négatif si le mouvement a lieu de B vers A (mouvement rétrograde). Le tableau suivant donne les valeurs numériques qui ont servi à la construction des deux courbes. On n'a tracé que la portion de l'hodographe qui correspond au mouvement de A vers B ; pour le mouvement de B vers A, on aurait une courbe symétrique par rapport au point O.

Les points pour lesquels l'accélération tangentielle $v_T = \gamma'$ est nulle sont les points de la trajectoire pour lesquels

$$v' = \frac{-y'}{2\sqrt{\beta - y}} = 0.$$

Ce sont les points C, E, G de la trajectoire $(y' = 0)$ ; à ces points correspondent les points $c, e, g$ de l'hodographe situés sur l'axe polaire et où la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur.

| $x$ | $y''$ | $y'$ | $y$ | $\beta - y$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3$ | | $-22$ | 12,9 | $-11,65$ | » |
| $-2$ | | $-5,7$ | 0 | 1,25 | 1,25 |
| $-1,25$ | + | 0 | $-1,84$ | 3,09 | 1,76 |
| $-1$ | | 1 | $-1,7$ | 2,95 | 1,72 |
| $-0,36$ | 0 | 1,90 | $-0,66$ | 1,91 | 1,38 |
| 0 | | 1,7 | 0 | 1,25 | 1,12 |
| 1 | | 0 | 0,9 | 0,35 | 0,59 |
| 1,69 | 0 | $-0,69$ | 0,59 | 0,66 | 0,81 |
| 2 | | $-0,5$ | 0,4 | 0,85 | 0,92 |
| 2,25 | + | 0 | 0,33 | 0,92 | 0,96 |
| 3 | | 3,8 | 1,5 | $-0,25$ | » |

Ceux pour lesquels la composante normale de l'accélération $v_N = \frac{v^2}{\rho}$ est nulle, sont ceux qui correspondent, soit à $v = 0$ (ce sont les limites d'excursion A et B ; les points correspondants de l'hodographe $a$ et $b$ sont confondus avec l'origine O suivant les deux rayons vecteurs O$a$ et O$b$) ; soit à $\rho = \infty$ (ce sont les points d'inflexion D, F ; les points correspondants de l'hodographe sont les points $d$ et $f$ ; en ces points l'hodographe est tangente aux rayons vecteurs $od$, $of$). Il en devait être ainsi car en ces points l'accélération du mobile est dirigée suivant la vitesse ; les points correspondants sur l'hodographe sont donc les points où cette courbe est tangente au rayon vecteur issu du pôle.

P. L.

## Trigonométrie.

PROBLÈME.

**1265.** — *Soit le triangle* ABC *dans lequel la hauteur* AD *rencontre en* I *une seconde hauteur et en* D *le côté* BC. *Le point* I *étant supposé situé entre les points* A *et* D, *on donne* $AI = m$, $ID = \mu$, *ainsi que le rayon* R *du cercle circonscrit à* ABC.

1° *Calculer le côté* $a$ *et une ligne trigonométrique de l'angle* A.

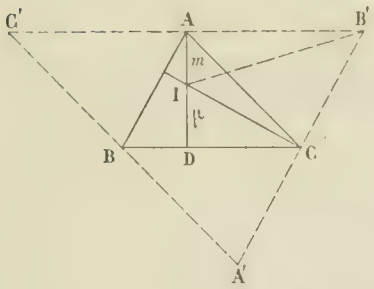
2° *Calculer les côtés* $b, c$ *en fonction des données.*

3° *Donner la condition de grandeur de* R.

4° *Construire géométriquement le triangle* ABC *dans le cas où le point* I *est entre les points* A *et* D. *Discuter.*

5° *Construire le triangle* ABC *quelle que soit la position relative des points* A, I, D *sur la hauteur. Discuter.*

1. Si nous menons par A, B, C les parallèles à BC, CA, AB, nous obtenons un triangle A'B'C' dont le cercle circonscrit a pour centre I. On a alors dans le triangle rectangle AIB'




$$a = \sqrt{4R^2 - m^2}$$

et
$$\cos A = \frac{m}{2R}.$$

2. On a $bc \sin A = a(m + \mu) = 2R \sin A(m + \mu)$,

d'où
$$bc = 2R(m + \mu).$$

D'autre part
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

d'où
$$(b + c)^2 = (m + 2R)(m + 2\mu + 2R),$$
$$(b - c)^2 = (2R - m)(2R - m - 2\mu),$$

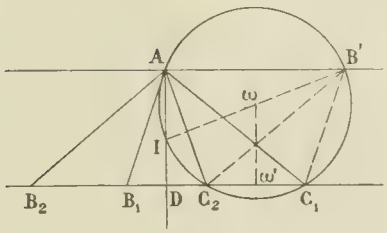
$$b = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(m + 2R)(m + 2\mu + 2R)} \pm \sqrt{(2R - m)(2R - m - 2\mu)}\right],$$

$$c = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(m + 2R)(m + 2\mu + 2R)} \mp \sqrt{(2R - m)(2R - m - 2\mu)}\right].$$

3. La réalité de $b$ et de $c$ exige que R soit extérieur à l'intervalle $\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2} + \mu\right)$. Or la réalité de $a$ nous donne la condition
$$R > \frac{m}{2}.$$

La condition à laquelle doit satisfaire R est donc $R > \mu + \frac{m}{2}$.

4. Construisons le triangle rectangle IAB', dans lequel nous connaissons l'hypoténuse $IB' = 2R$ et le côté $IA = m$. Prenons ensuite sur AI le point D tel que $ID = \mu$ et tel que I soit entre A et D. Menons en D la perpendiculaire à AD. Le cercle circonscrit à IAB' coupe cette droite en deux points $C_1$ et $C_2$. Si l'on mène par A les parallèles $AB_1$ et $AB_2$ à $B'C_1$ et $B'C_2$, on obtient deux triangles $AB_1C_1$ et $AB_2C_2$ qui répondent à la question. Ces deux triangles sont d'ailleurs visiblement symétriques par rapport à AD. Il n'y a donc qu'une solution, à condition toutefois que l'on ait




$$\omega\omega' < R,$$

ou
$$\mu + \frac{m}{2} < R.$$

5. La construction précédente est applicable quelle que soit la position relative des points $A_1$, $I_1$, D, à condition de porter la longueur $ID = \mu$ dans un sens convenable. Si A est entre I et D, la condition de grandeur pour R est

$$R > \mu - \frac{m}{2}.$$

Si D est entre A et I, le problème est toujours possible. J. HAAG.

Autre solution de M. G. Lach, école normale de Douai.

---

## Calcul

**1266.** — *Calculer les arcs compris entre* 180° *et* 360° *qui vérifient la formule*

$$\operatorname{cotg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{\sin 3\alpha}}{a^3 \cos \frac{1}{2}\beta},$$

$$a = 0{,}586047, \qquad \alpha = 41°53'12'',1 \qquad \beta = 243°53'23''.$$

On déduit des données

$$3\alpha = 125°39'36'',3, \qquad \pi - 3\alpha = 54°20'23'',7,$$

$$\frac{\beta}{2} = 121°56'41'',5, \qquad \pi - \frac{\beta}{2} = 58°\ 3'18'',5.$$

La formule donnée peut s'écrire

$$\operatorname{cotg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cotg}\varphi,$$

$\varphi$ étant l'angle du premier quadrant donné par la formule

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{\sqrt{\sin(\pi - 3\alpha)}}{a^3 \cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right)}.$$

On trouve

$$\log \operatorname{cotg}\varphi = 0{,}9275714,$$

$$\varphi = 6°44'17'',4.$$

On a d'ailleurs

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi - \varphi.$$

On en déduit, en prenant les valeurs comprises entre 180° et 360°,

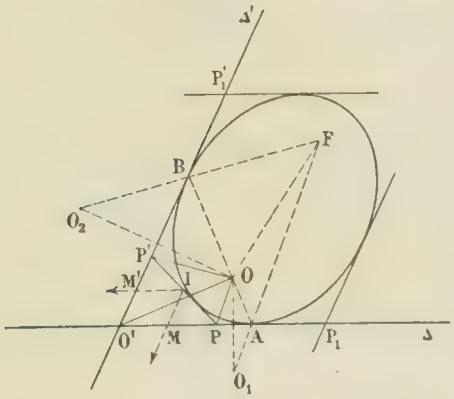
$$x_1 = 244°7'51'',28,$$

$$x_2 = 334°7'51'',28.$$

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1244.** — *Les deux extrémités d'un segment vu d'un point fixe O sous un angle droit glissent sur deux droites fixes Δ et Δ'. Trouver l'enveloppe de la droite qui porte ce segment et le lieu de son milieu.*

1. Appelons O' le point de rencontre des deux droites Δ et Δ'. Joignons OO' et élevons en O une perpendiculaire à cette droite qui rencontre les deux droites Δ et Δ' en A et B. Nous pouvons construire une conique ayant pour foyer le point O et touchant les droites Δ et Δ' en A et B ; nous prendrons pour cela les deux symétriques de O par rapport à Δ et à Δ', et nous les joindrons respectivement aux points A et B, ces deux droites se couperont au second foyer F ; dès lors, rien n'est plus aisé que de construire la conique indiquée. Toute portion de tangente à cette conique comprise entre les deux tangentes fixes O'Δ et O'Δ' est vue du foyer O sous un angle moitié de l'angle AOB, c'est-à-dire sous un angle droit. L'enveloppe demandée est donc cette conique.




On pourrait encore parvenir au résultat que nous venons de trouver par la considération des deux séries homographiques que les extrémités du segment mobile tracent sur les deux droites fixes données.

Enfin, on peut démontrer d'une manière générale que si une corde d'une conique est vue d'un point fixe sous un angle droit, elle enveloppe une autre conique ayant pour foyer le point fixe et pour directrice relative la polaire de ce point par rapport à la conique donnée. Il n'y a qu'à appliquer ce résultat au cas actuel pour obtenir la solution du problème proposé.

Il nous reste, pour être complet, à traiter le problème actuel par le calcul. A cet effet, prenons pour origine le point O, pour axe des $x$ la droite OO' et pour axe des $y$ une perpendiculaire. En désignant par $a$ l'abscisse du point O', les deux droites Δ et Δ' pourront être représentées par

$$x - a + \alpha y = 0 \qquad \text{et} \qquad x - a + \beta y = 0.$$

Nous allons chercher maintenant combien il y a de droites de l'espèce indiquée qui passent par un point donné du plan $(x, y)$.

Soit $Y - y = m(X - x)$ une de ces droites ; le rayon qui joint l'origine au point où elle coupe la droite Δ a pour équation

$$Y - mX - \frac{(y - mx)}{a}(X + \alpha Y) = 0,$$

son coefficient angulaire est donc

$$\frac{am + y - mx}{a - \alpha(y - mx)};$$

celui du rayon qui joint l'origine au point où elle coupe la droite Δ' est

$$\frac{am + y - mx}{a - \beta(y - mx)},$$

et il n'y a qu'à écrire que le produit de ces deux coefficients angulaires est égal à $-1$, ce qui donne

$$(am + y - mx)^2 + [a - \alpha(y - mx)][a - \beta(y - mx)] = 0.$$

Cette équation est du second degré en $m$, donc il y a deux droites qui passent par un point quel-

conque du plan $(x, y)$. Cela prouve que l'enveloppe de ces droites est de seconde classe, et, par suite, que l'enveloppe est une conique. Pour exprimer que le point $(x, y)$ est sur cette conique, il suffit d'écrire que les deux tangentes sont confondues, c'est-à-dire que l'équation en $m$ a une racine double. Ce calcul donne

$$[2xy(1+\alpha\beta)-2ay-a(\alpha+\beta)x]^2-4[x^2(1+\alpha\beta)-2ax+a^2][y^2(1+\alpha\beta)-a(\alpha+\beta)y+a^2]=0,$$

ou, toutes réductions faites,

$$[2y-(\alpha+\beta)x]^2-4(1+\alpha\beta)(x^2+y^2)+8ax+4ay(\alpha+\beta)-4a^2=0.$$

Cette équation peut encore s'écrire

$$[2y-(\alpha+\beta)x]^2+[2x+(\alpha+\beta)y]^2-4(1+\alpha\beta)(x^2+y^2)=[2x+(\alpha+\beta)y-2a]^2,$$

ou enfin

$$(1)\qquad (\alpha-\beta)^2(x^2+y^2)-[2x+(\alpha+\beta)y-2a]^2=0.$$

Sous cette forme, on reconnaît de suite que l'enveloppe est une conique ayant l'origine pour foyer et pour directrice une droite passant au point d'abscisse $a$, au point $O'$; cette droite est la conjuguée harmonique de $Ox$, c'est-à-dire de $OO'$, par rapport aux droites $\Delta$ et $\Delta'$. Si l'on remplace $x-a$ par $-\alpha y$ ou par $-\beta y$ dans la fonction linéaire

$$2x+(\alpha+\beta)y-2a,$$

l'équation se réduit à $x^2$; cela montre que la conique (1) est tangente aux droites $\Delta$ et $\Delta'$ aux points où elles percent l'axe des $y$.

2. Pour traiter la deuxième partie, pour avoir le lieu du milieu I de la portion de droite mobile comprise entre $\Delta$ et $\Delta'$, nous adjoindrons à l'équation de cette droite le diamètre conjugué de sa direction par rapport au couple $(\Delta, \Delta')$. Or ce couple a pour équation quadratique

$$\Delta\Delta' \equiv (x-a+\alpha y)(x-a+\beta y)=0,$$

et le diamètre conjugué de la direction $y=mx$ a pour équation

$$\Delta+\Delta'+m(\alpha\Delta'+\beta\Delta)=0.$$

D'autre part, la droite variable que nous avions représentée par

$$Y-mX=y-mx,$$

peut se représenter plus simplement par

$$Y-mX=p,$$

en posant

$$p=y-mx.$$

La relation trouvée entre $m$ et $p$ est alors

$$(am+p)^2+(a-\alpha p)(a-\beta p)=0,$$

et nous avons à éliminer $m$ et $p$ entre les trois équations

$$\Delta+\Delta'+m(\alpha\Delta'+\beta\Delta)=0,$$
$$y=mx+p,$$
$$(am+p)^2+(a-\alpha p)(a-\beta p)=0.$$

L'élimination est immédiate : la première donne $m$, la seconde donne $p$ et la troisième donne alors l'équation du lieu.

Cette équation se décompose en $\Delta\Delta'=0$, qui représente les deux droites fixes $\Delta$ et $\Delta'$ et en

$$4(\alpha\beta+1)\Delta\Delta'+2a(\alpha-\beta)(\beta\Delta-\alpha\Delta')-a^2(\alpha-\beta)^2=0,$$

qui représente une hyperbole ayant ses deux asymptotes parallèles aux droites $\Delta$ et $\Delta'$.

C'est cette hyperbole qui est le vrai lieu; le premier lieu est un lieu exceptionnel qui correspond au cas où la droite mobile vient se placer soit sur $\Delta$, soit sur $\Delta'$.

La solution géométrique de cette dernière question est évidente. En effet, soient P et P′ les points de rencontre de la tangente à la première conique avec les droites $\Delta$ et $\Delta'$; les deux points P et P′ décrivent sur ces droites deux divisions homographiques, il en est donc de même des milieux M et M′ de O′P et O′P′; or le point I, milieu de PP′, est à l'intersection des parallèles à $\Delta'$ et à $\Delta$ menées par les points M et M′, et, comme ces deux droites décrivent deux faisceaux homographiques, le lieu de ce point est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à $\Delta$ et à $\Delta'$. Nous aurons les asymptotes elles-mêmes en cherchant ce que deviennent les points M et M′ quand l'un d'eux s'éloigne à l'infini; il n'y a pour cela qu'à mener les tangentes parallèles à $\Delta$ et à $\Delta'$ et prendre les milieux des segments $O'P_1$ et $O'P'_1$ ainsi obtenus.

**J. HAAG, élève de l'École normale supérieure.**

Bonne solution géométrique : M. R. Bouvaist.
Bonnes solutions : MM. Dnallor Lecram; R. Javelot, à Givet; Michel Constandaki.

## QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

### ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (1903).

#### I. — Algèbre.

**145.** — Limite de $\cos^m \frac{x}{m}$ pour $m$ infini.

**146.** — Dérivées successives de $\frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

**147.** — Discuter les équations :

$$(a-\lambda a')x^3+(b-\lambda b')x+c-\lambda c'=0, \qquad x^5+x^4-4x^3-x^2-1=0, \qquad x^4-3x^2-7x+4=0,$$
$$x^3+(2\lambda+1)x^2-x+2\mu=0, \qquad x^4+(\lambda+\mu+2)x^2+\mu-1=0, \qquad x^4+3\lambda x+2\mu=0,$$
$$x^4-\mu x^2-(\lambda-1)x-1=0, \qquad \pi x^3+x+\sqrt{2}=0.$$

**148.** — Calculer $\Sigma\frac{a^2b}{c^2}$ pour l'équation $x^5+2x^4-x^3+2x-1=0$.

**149.** — Exprimer que les équations $ax^4+bx^2+cx+d=0$, $mx^2+nx+p=0$ ont une racine commune.

**150.** — On donne l'équation $x^7-x^6-10x^5+14x^4+17x^3-25x^2-8x+12=0$, résoudre cette équation sachant qu'elle admet trois racines doubles dont l'une est racine de l'équation $x^3+x-2=0$.

#### II. — Géométrie analytique.

**151.** — Construire les courbes définies par les équations :

$$x^5-y^5+4x^3-y=0, \qquad x^5+x^4-4x^3y-x^2-y^2=0, \qquad y=\frac{e^x+e^{-x}-x^2+2}{x^2(x-1)},$$
$$(x+y)(x^3+y^3)+x^3-2xy^2+y^3+4y^2-2xy+x=0, \qquad y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \qquad y=x^{\frac{1}{x}},$$
$$(x-y)^2(x^3+y^3)+(x^2+y^2)(x-y)-x^2-x=0, \qquad y(x+y)(x^2-y^2)+(x+y)(x^2+y^2)+3x^2+2xy+x=0,$$
$$(x+y)(x^3+y^3)+x^3-2xy^2+y^3+(x+y)^2=0, \qquad (x-y)^3x^2+(x-y)^2(x^2+y^2)+x^2-y=0;$$

$y=a^{\frac{x^2}{x^2-a^2}}$ (lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée); $e^{xy}=(\cos x)^{\frac{b}{x}}$ (lieu des points d'où l'on peut mener à cette courbe deux tangentes rectangulaires);

$$x^2(x-y)^2+2x^2y-2x^3-4x^2-2y^2+7xy+6x-y=0, \qquad y=(\cos x)^{\frac{1}{x}},$$

$x^4-x^2y-(y-1)x-1=0$ (lieu des milieux des cordes parallèles à $Ox$);

$$\begin{cases} x=\dfrac{t}{(t-1)^2(t+2)(t^2+1)}, \\ y=\dfrac{t-3}{(t-1)(t+2)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=\dfrac{\sin t}{t^2}, \\ y=\dfrac{\cos t}{(2t-1)^2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{t-2}{t+1}, \\ y=\dfrac{t^2+2t-1}{(t+1)^2(t-2)}; \end{cases}$$

$$\rho=\frac{1+\cos\omega}{1+\cos 2\omega}, \qquad \rho=\frac{\cos\omega-\sin\omega}{(\cos\omega+\sin\omega)^2}, \qquad \rho=\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}, \qquad e^\rho=1+\cos\omega,$$

$$\rho=\frac{1+\sin\omega}{1-2\cos\omega}, \qquad \rho=\frac{\sin\omega}{2\omega-3\cos\omega}, \qquad \rho=\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\cos\frac{\omega}{3}}, \qquad \rho^3\sin^2\omega+a\rho^2\cos^2\omega-ab^2=0,$$

$$\rho^3(\sin\omega - \cos\omega) - 3\rho\cos\omega + 1 - \cos\omega = 0, \qquad \rho^3(\sin\omega - \cos\omega) - \rho\sin\omega + 1 - \cos\omega = 0,$$

$$\rho^4\cos\omega - 3\rho\sin\omega - 5 = 0, \qquad \rho^3\sin\omega - 3\rho^2\cos\omega + 1 = 0, \qquad \rho^2\omega^2 - 3\rho\omega + \sin\frac{\omega}{2} = 0.$$

**152.** — Équation générale des coniques circonscrites à un triangle. — Paraboles. — Hyperboles équilatères.

**153.** — Lieu des points qui divisent en moyenne et extrême raison les cordes parallèles d'une conique.

**154.** — Équation générale des coniques qui ont un cercle principal donné.

**155.** — Équation générale des coniques de grandeur constante qui sont vues de l'origine sous un angle droit.

**156.** — On considère toutes les coniques tangentes à $Oy$ en un point B et passant par un point A de $Ox$, et telles que le diamètre conjugué de $Ox$ ait une direction donnée $m$. 1° Équation générale. 2° Lieu de l'intersection de la tangente en A avec le diamètre conjugué de $Oy$. 3° Lieu des pôles de $Ox$. 4° Hyperboles équilatères du faisceau. Lieu de leurs centres quand $m$ varie.

**157.** — Étant donné un tétraèdre SABC, on mène par le point S dans la face SBC une droite D perpendiculaire à SA, puis les droites analogues D′ et D″ dans les plans SCA et SAB. Démontrer que les droites D, D′, D″ sont dans un même plan.

**158.** — Étudier les surfaces définies par les équations :

$$x^2 - 3y^2 - 6yz + 2zx - 8xy - 4x + 2y - 2z + \lambda = 0 \qquad \text{(plans cycliques)},$$
$$y(y+z) - x - y - z + 1 = 0 \qquad \text{(génératrices, axes, sommets)},$$
$$xy - z^2 - 2az = 0 \qquad \text{(génératrices)},$$
$$3x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 4zx - 4xy - 3x - z - 1 = 0,$$
$$2(3x + 3z - 2)^2 - 6(z - y + 1)^2 + (6y + 2)^2 + \lambda - 1 = 0,$$
$$x^2 - y^2 + 2z^2 - 2yz - 4xz + 2x - 4y - 1 = 0 \qquad \text{(équation réduite)},$$
$$x^2 - 3y^2 - 6yz + 2zx - 8xy - 4x + 2y - 2z + \lambda = 0,$$
$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 4zx - 4xy - 3x - z = 0,$$
$$x^2 - 5y^2 + 4xy - 2yz + 4z - 1 = 0, \qquad \text{(directions principales)},$$
$$ay(y+z) + bx(x+z) + cxy = 1,$$
$$2x^2 + 2y^2 + (\lambda + 1)z^2 - 4yz + 2y + 4(\lambda - 2)z + 4\lambda - 5 = 0.$$

**159.** — Étant donnée l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2uzx + 2vyz - 2ax - 2by + 2cz = 0,$$

où $a$, $b$, $c$ sont fixes et $u$, $v$ variables, lieu des centres des quadriques définies par cette équation. Ce lieu est une quadrique dont on demande de trouver les axes.

**160.** — Lieu des centres des sphères qui coupent trois sphères données suivant des grands cercles.

**161.** — Équation générale des quadriques de révolution passant par une conique donnée. Cônes et paraboloïdes de l'ensemble.

**162.** — Lieu des points d'un paraboloïde hyperbolique par où passent deux génératrices rectangulaires.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1309.** — Un cône ayant pour sommet un point fixe du plan des $xz$ passe par un cercle de rayon constant du plan des $xy$, dont le centre décrit une parallèle à l'axe des $y$.

On demande l'enveloppe des axes et le lieu des sommets de la section de ce cône par le plan des $yz$.

(Les axes sont supposés rectangulaires.) M. O.

**1310.** — On donne deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$ et un point fixe A $(a, b)$ dans leur plan. Un point mobile M possède une accélération constamment dirigée de M vers A et dont la valeur est $\gamma = -k^2\mathrm{AM}$ ($k$ étant une constante).

La position initiale du mobile est l'origine et sa vitesse initiale fait un angle $\alpha$ avec $Ox$.

1° Former les équations du mouvement de M, indiquer quelle sera la nature de la trajectoire.

2° Le point A étant situé sur $Ox$, déterminer l'angle $\alpha$ sous lequel on doit lancer le mobile avec la vitesse $v_0$ pour atteindre un point donné $M_0$ du plan. Séparer les régions où se trouvent les points $M_0$ que l'on peut atteindre.

Examiner le cas où $M_0$ est situé sur l'axe des $x$.

3° A étant n'importe où dans le plan et la vitesse initiale dirigée suivant $Oy$, déterminer la longueur du diamètre conjugué de OA dans la trajectoire.

4° Trouver le lieu géométrique des points M que l'on peut atteindre avec une *valeur* $v_0$ donnée de la vitesse initiale, de telle façon que la vitesse en M soit parallèle à OA. J. Demeunynck.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

14e Année. N° 10 Juillet 1904.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LES TÉTRAÈDRES INSCRITS A UNE QUADRIQUE ET CIRCONSCRITS A UNE AUTRE

par M. **G. Fontené.**

**1.** Dans le numéro de Juillet 1902 de la *Revue*, une faute de raisonnement conduit à une prétendue condition d'invariance pour l'existence de tétraèdres inscrits à une quadrique et circonscrits à une autre : de ce que deux quadriques sont, l'une circonscrite, l'autre inscrite à deux tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique $\Gamma$, il ne résulte pas que ces deux quadriques sont polaires réciproques par rapport à $\Gamma$, puisque 8 points ne déterminent pas une quadrique. La question de savoir s'il y a, ou non, une condition d'invariance reste donc entière ; on va voir qu'il n'y en a pas.

**2.** Lorsqu'un point $(x, y, z, t)$ et un plan $(u, v, w, r)$ sont liés par une relation

$$F(x, y, z, t, u, v, w, r) = 0,$$

on dit que le point et le plan appartiennent à un *connexe*. Le degré $m$ de l'équation par rapport à $x, y, z, t$ est l'ordre du connexe, le degré $n$ par rapport à $u, v, w, r$ est la classe du connexe ; si l'on se donne le plan, le point décrit une surface d'ordre $m$, et, si l'on se donne le point, le plan reste tangent à une surface de classe $n$. On peut dire alors :

Théorème. — *Étant données deux quadriques* S′ *et* S, *si l'on considère un tétraèdre variable* ABCD *inscrit à* S′ *et circonscrit à* S, *l'ensemble formé par le point* D *de la quadrique* S′ *et par le plan* ABC *tangent à la quadrique* S *appartient à un connexe de premier ordre et de première classe. Un point* D *de la quadrique* S′, *et un plan* $d$ *tangent à la quadrique* S *qui satisfont à la relation du connexe, donnent une simple infinité de tétraèdres inscrits à* S′ *et circonscrits à* S.

*A priori*, sauf un paradoxe possible, mais qui ne se présente pas, les tétraèdres ABCD doivent dépendre de 4 paramètres. Soit un point D sur la quadrique S′, soit un plan $d$ tangent à la quadrique S ; si l'on coupe par ce plan le cône de sommet D circonscrit à S, et la quadrique S′, on obtient deux coniques $\sigma$, $\sigma'$, et la recherche du tétraèdre ABCD est ramenée à celle d'un triangle ABC circonscrit à la première de ces coniques et inscrit à la seconde. Sans le paradoxe de Poncelet, on aurait donc les deux paramètres du point D et les deux paramètres du plan $d$ ; à cause de ce paradoxe, les choses se passent autrement : le point D étant donné, le plan $d$ n'est pas quelconque, mais on retrouve le paramètre perdu par le fait de l'existence d'une infinité de triangles ABC pour un même plan $d$. Il aurait pu arriver que la condition d'invariance relative aux deux coniques se réduisît à une condition d'invariance relative aux deux quadriques, auquel cas les tétraèdres ABCD auraient dépendu de 5 paramètres ; mais cela n'arrive pas.

Voici le résultat du calcul. Les équations des deux quadriques étant

$$(S) \quad ax^2 + by^2 + \cdots = 0,$$
$$(S') \quad a'x^2 + b'y^2 + \cdots = 0.$$

si l'on pose $\frac{a'}{a} = \alpha$, $\frac{b'}{b} = \beta$, ..., la condition d'invariance relative aux deux coniques $\sigma$, $\sigma'$ aboutit à ceci : les coordonnées $x, y, z, t$ du sommet D, et les coordonnées $u, v, w, r$ du plan de la face

opposée ABC, sont liées par la relation

$$(1) \qquad A\Sigma ux + 4B\Sigma\alpha ux - 8\Sigma\alpha^2 ux = 0,$$

en posant

$$A = \Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\alpha\beta, \qquad B = \Sigma\alpha.$$

Si l'on se donne le point D, le plan ABC doit passer par un certain point D′ ; en menant par ce point un plan tangent à la quadrique S, on aura deux coniques $\sigma$ et $\sigma'$ donnant une infinité de triangles ABC.

Lorsque les quadriques sont deux sphères concentriques, l'équation du connexe est

$$ux + vy + wz + 3 = 0,$$

de sorte que le centre O est au quart de chacun des segments A′A, B′B, C′C, D′D : c'est donc le centre G des moyennes distances des sommets du tétraèdre. Alors le tétraèdre a ses hauteurs égales, ses quatre faces sont équivalentes, ses arêtes opposées sont égales deux à deux : de tels tétraèdres sont bien connus, et leurs propriétés sont faciles à établir géométriquement. (Relativement à la fixité du point G, je rappelle que M. G. Humbert a indiqué les conditions dans lesquelles le centre des moyennes distances des sommets d'un polygone de Poncelet est un point fixe : *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXVII, p. 71.)

**3.** La relation (1) devient illusoire, si l'on a par exemple $\beta = \gamma$, $\delta = \alpha$, c'est-à-dire *si les deux quadriques ont quatre génératrices communes : les tétraèdres* ABCD *dépendent alors de cinq paramètres au lieu de quatre.* J'avais signalé ce fait dans les *Nouvelles Annales*, 1899, p. 67, et j'en avais déduit l'existence du point D′ dans le cas général.

**4.** J'ai donné au même endroit ce théorème :

*Pour que deux quadriques* U *et* V *admettent des tétraèdres dont les arêtes leur soient tangentes, il faut que les racines du discriminant de la forme* $\lambda U + V$ *vérifient la relation*

$$\Sigma(\varepsilon\sqrt{\lambda}\,.\,\varepsilon'\sqrt{\lambda'}) = 0\,;$$

*il existe alors une infinité de tétraèdres répondant à la question.*

On peut appliquer ici la méthode de Duporcq (*Revue*, endroit cité). Les tétraèdres considérés doivent en effet être conjugués par rapport à l'une des 8 quadriques relativement auxquelles U et V sont polaires réciproques, et la condition ci-dessus résulte alors de la condition $\Phi = 0$ (Salmon, p. 255) appliquée à cette quadrique et l'une des quadriques U et V.

**5.** Sur des hexaèdres et des octaèdres de Poncelet, on peut consulter les *Nouvelles Annales*, 1899, p. 72 et 1903, p. 381.

## AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1903).

### Mathématiques spéciales.

**1246.** — *On considère une droite fixe* A *et deux droites fixes* B *et* B′ *qui rencontrent* A *mais qui ne sont pas situées dans un même plan.*

*On sait que si on considère une surface du second ordre* S *qui passe par les trois droites* A, B *et* B′, *son centre* C *est situé dans le plan* P *parallèle aux deux droites* B *et* B′ *et équidistant de ces deux droites.*

1° *Lorsque le centre* C *décrit une droite dans le plan* P, *la surface* S *passe par une quatrième droite fixe s'appuyant sur* B *et* B′.

2° *Lorsque le point* C *décrit, dans le plan* P, *une courbe* (Γ) *de classe* $m$, *la surface* S *enveloppe une surface réglée* Σ *d'ordre* $2m$ *et, par chacune des trois droites* A, B, *et* B′, *il passe* $m$ *nappes de cette surface* Σ.

*Montrer que la surface* Σ *peut être considérée comme engendrée par une droite qui se meut en s'ap-*

*puyant sur les deux droites* B *et* B′ *et en restant tangente à un cylindre de classe* $m$ *dont les génératrices sont parallèles à* A. *Trouver l'équation de ce cylindre.*

3° *Dans le cas particulier où la courbe* (Γ) *est une conique, la surface* Σ *est du quatrième ordre et admet la droite* A *comme droite double.*

*Tout plan passant par* A *coupe alors cette surface en dehors de* A, *suivant une conique ; trouver le lieu du centre de cette conique.*

*Que deviennent les résultats précédents, lorsque la conique* (Γ) *est tangente soit au plan déterminé par les droites* A *et* B, *soit au plan déterminé par* A *et* B′, *soit à ces deux plans à la fois ?*

Prenons pour axe des $z$ la droite A, pour plan des $xy$ le plan P, pour axes des $x$ et des $y$ des parallèles à B et B′. Les équations de ces droites sont alors de la forme

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} y = 0, \\ z - h = 0, \end{cases} \qquad (\mathrm{B}')\quad \begin{cases} x = 0, \\ z + h = 0. \end{cases}$$

L'équation générale des quadriques contenant l'axe des $z$ est

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy + 2\mathrm{C}x + 2\mathrm{C}'y = 0\,;$$

Pour $y = 0$, nous avons

$$x(\mathrm{A}x + 2\mathrm{B}'z + 2\mathrm{C}) = 0,$$

ce qui donne d'abord $x = 0$ correspondant à l'axe des $z$, puis la droite $\mathrm{A}x + 2\mathrm{B}'z + 2\mathrm{C} = 0$. Pour que cette droite coïncide avec B, il faut qu'on ait $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{C} = -\mathrm{B}'h$.

De même pour que la quadrique contienne la droite B′, on doit avoir $\mathrm{A}' = 0$, $\mathrm{C}' = \mathrm{B}h$, et il en résulte que l'équation générale des quadriques passant par les droites A, B, B′ est

$$\mathrm{B}yz + \mathrm{B}'zx + \mathrm{B}''xy - \mathrm{B}'hx + \mathrm{B}hy = 0.$$

Le centre de cette quadrique est défini par les équations

$$\begin{aligned} \mathrm{B}'z + \mathrm{B}''y - \mathrm{B}'h &= 0, \\ \mathrm{B}z + \mathrm{B}''x + \mathrm{B}h &= 0, \\ \mathrm{B}y + \mathrm{B}'x &= 0\,; \end{aligned}$$

nous en tirons aisément

$$x = -\frac{\mathrm{B}h}{\mathrm{B}''}, \qquad y = \frac{\mathrm{B}'h}{\mathrm{B}''}, \qquad z = 0.$$

Désignons par $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du centre dans le plan des $xy$, nous avons

$$\alpha = -\frac{\mathrm{B}h}{\mathrm{B}''}, \qquad \beta = \frac{\mathrm{B}'h}{\mathrm{B}''},$$

d'où

$$\mathrm{B} = -\frac{\alpha\mathrm{B}''}{h}, \qquad \mathrm{B}' = \frac{\beta\mathrm{B}''}{h}.$$

Remplaçons B et B′ par ces valeurs dans l'équation de la quadrique, et divisons par B″, nous obtenons

$$(\mathrm{S})\qquad -\alpha yz + \beta zx + hxy - h\beta x - h\alpha y = 0.$$

Telle est l'équation générale des quadriques passant par les droites A, B et B′.

1. Supposons que le centre $(\alpha, \beta)$ décrive une droite dans le plan des $xy$, $ux + vy + w = 0$ ; nous avons $u\alpha + v\beta + w = 0$, d'où l'on tire $\alpha = -\dfrac{v\beta + w}{u}$, et en remplaçant $\alpha$ par cette valeur dans l'équation de la quadrique, on a

$$\frac{v\beta + w}{u}yz + \beta zx + hxy - h\beta x + h\frac{v\beta + w}{u}y = 0.$$

Quel que soit $\beta$, cette surface passe par l'intersection des deux quadriques

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{v}{u}y(z + h) + x(z - h) = 0, \\[2ex] \dfrac{w}{u}y(z + h) + hxy = 0. \end{cases}$$

Multiplions ces équations respectivement par $w$ et $-v$, puis ajoutons, nous avons

$$wx(z-h) - vhxy = 0,$$

ce qui montre que le système (1) est équivalent au suivant

$$y[w(z+h) + hux] = 0,$$
$$x[w(z-h) - hvy] = 0.$$

Ces deux équations représentent deux ensembles de plans qui se coupent suivant quatre droites

$$A \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \qquad B \begin{cases} y = 0, \\ z - h = 0, \end{cases} \qquad B' \begin{cases} x = 0, \\ z + h = 0, \end{cases}$$

et

$$D \begin{cases} w(z+h) + hux = 0, \\ w(z-h) - hvy = 0. \end{cases}$$

On voit ainsi que lorsque le centre de la surface (S) décrit une droite dans le plan des $xy$, cette surface passe par une quatrième droite fixe, la droite D qui rencontre B et B'.

**2.** Considérons deux points C et C' voisins sur la courbe (Γ), et soient S et S' les quadriques correspondantes, qui ont pour centres les points C et C'. Ces deux quadriques ont en commun les droites A, B, B' et la droite D définie par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} w(z+h) + hux = 0, \\ w(z-h) - hvy = 0, \end{cases}$$

en désignant par $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite CC'.

Supposons que C' se rapproche indéfiniment du point C, S' se rapproche indéfiniment de S, et la droite D a pour limite une droite Δ qui est la caractéristique de la surface S. D'autre part, la droite CC' a pour limite la tangente au point C à la courbe (Γ). On peut donc dire que la droite Δ est définie par les équations (2), dans lesquelles $u, v, w$ sont les coefficients de la tangente au point C à la courbe (Γ).

Cela posé, soit

$$(3) \qquad F(u, v, w) = 0$$

l'équation tangentielle de (Γ), le premier membre étant homogène et de degré $m$ par rapport à $u, v, w$; nous aurons le lieu de la droite Δ, c'est-à-dire l'enveloppe de la surface S en éliminant $u, v, w$ entre les équations (2) et (3). Les équations (2) peuvent s'écrire

$$\frac{u}{-y(z+h)} = \frac{v}{x(z-h)} = \frac{w}{hxy},$$

et comme l'équation (3) est homogène, le résultat de l'élimination est

$$(\Sigma) \qquad F[-y(z+h), x(z-h), hxy] = 0.$$

Cette équation représente une surface Σ de degré $2m$ passant par les droites A, B, B'.

Coupons cette surface par un plan passant par A, $y - \lambda x = 0$; l'intersection est définie par les deux équations

$$y - \lambda x = 0, \qquad F[-\lambda x(z+h), x(z-h), h\lambda x^2] = 0,$$

ou

$$y - \lambda x = 0, \qquad x^m F[-\lambda(z+h), z-h, h\lambda x] = 0.$$

Cette intersection se compose de $m$ fois l'axe des $z$ et d'une courbe du $m^e$ degré. Il en résulte que la droite A est une génératrice multiple d'ordre $m$ de la surface Σ.

De même, un plan passant par B, $z - h = \mu x$, coupe la surface Σ suivant la courbe qui est définie par les équations

$$z - h = \mu y, \qquad F[-y(z+h), -\mu xy, hxy] = 0,$$

ou

$$z - h = \mu y, \qquad y^m F[-(z+h), -\mu x, hx] = 0,$$

ce qui montre que la droite B est une génératrice multiple d'ordre $m$ de Σ. Même démonstration pour la droite B'.

D'après ce qui précède, on peut considérer la surface $\Sigma$ comme engendrée par la droite $\Delta$ qui rencontre B et B'. La projection $\delta$ de cette droite sur le plan des $xy$ est $ux+vy+2w=0$, ou

$$(\delta) \qquad u\frac{x}{2}+v\frac{y}{2}+w=0;$$

cette droite est homothétique de la tangente en C à la courbe (Γ) par rapport à l'origine dans le rapport 2. Par suite, la droite $\delta$ enveloppe la courbe (Γ') homothétique de (Γ) par rapport à l'origine, le rapport d'homothétie étant égal à 2.

Il en résulte que la droite $\Delta$ est tangente au cylindre qui a pour directrice (Γ') et dont les génératrices sont parallèles à A.

L'équation ponctuelle de ce cylindre se déduit de l'équation ponctuelle de la courbe (Γ) en y remplaçant $x$ par $\frac{x}{2}$ et $y$ par $\frac{y}{2}$.

3. Supposons maintenant que la courbe (Γ) soit une conique ayant pour équation tangentielle

$$au^2+2buv+cv^2+2duw+2evw+fw^2=0.$$

La surface $\Sigma$ est alors du quatrième degré, son équation est

$$ay^2(z+h)^2-2bxy(z^2-h^2)+cx^2(z-h)^2-2dhxy^2(z+h)+2ehx^2y(z-h)+fh^2x^2y^2=0.$$

Coupons cette surface par un plan passant par A, $y=mx$. Remplaçons dans l'équation de la surface $y$ par $mx$, divisons par $x^2$, il nous reste l'équation de la projection de la conique intersection sur le plan des $xz$ :

$$am^2(z+h)^2-2bm(z^2-h^2)+c(z-h)^2-2dhm^2x(z+h)+2ehmx(z-h)+fh^2m^2x^2=0,$$

ou

$$fh^2m^2x^2+(am^2-2bm+c)z^2+2hmzx(-dm+e)-2h^2mx(dm+e)+2hz(am^2-c)+h^2(am^2+2bm+c)=0.$$

Comme le centre d'une conique se projette au centre de la conique projection, le centre de la conique considérée est déterminé par les équations

$$y=mx,$$
$$fh^2m^2x+hm(-dm+e)z-h^2m(dm+e)=0,$$
$$hmx(-dm+e)+(am^2-2bm+c)z+h(am^2-c)=0.$$

Résolvons les deux dernières par rapport à $x$ et $z$, nous avons

$$\frac{x}{2[(ae-bd)m+cd-be]}=\frac{z}{h[(d^2-af)m^2-e^2+cf]}=\frac{1}{(af-d^2)m^2-2(bf-ed)m+cf-e^2},$$

ou, en introduisant les coefficients de l'équation ponctuelle de la conique (Γ),

$$\frac{x}{-2(Em+D)}=\frac{z}{h(-Cm^2+A)}=\frac{1}{Cm^2+2Bm+A};$$

on tire de là les valeurs de $x$ et de $z$, et on en déduit celle de $y$ au moyen de l'équation $y=mx$.

Le centre de la conique a donc pour coordonnées

$$x=\frac{-2(Em+D)}{Cm^2+2Bm+A},$$
$$y=\frac{-2m(Em+D)}{Cm^2+2Bm+A},$$
$$z=\frac{h(-Cm^2+A)}{Cm^2+2Bm+A}.$$

Ce point décrit une conique qui est de même nature que la conique (Γ). On voit en particulier que la projection de cette conique sur le plan des $xy$ a pour équation

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey=0,$$

cette courbe est homothétique et concentrique à la conique (Γ).

Si la conique (Γ) est tangente au plan AB, c'est-à-dire au plan $zOx$, elle est tangente à $Ox$, le

coefficient $c$ est nul. Alors, dans l'équation de $\Sigma$, $y$ est en facteur. Cette surface se décompose en le plan des $zx$ et en une surface du troisième degré

$$ay(z+h)^2 - 2bx(z^2-h^2) - 2dxy(z+h) + 2ehx^2(z-h) + fh^2x^2y = 0.$$

Cette surface passe par les trois droites A, B, B', seulement A et B sont des droites simples et B' une droite double.

Si la conique (Γ) est tangente au plan AB' c'est-à-dire à $Oy$, la surface se décompose en le plan des $yz$ et en une surface du troisième degré qui admet A et B' comme droites simples et B comme droite double.

Enfin si la conique (Γ) est tangente aux deux plans AB et AB', c'est-à-dire aux axes $Ox$ et $Oy$, $a$ et $c$ sont nuls tous les deux, la surface $\Sigma$ se décompose en deux plans $x=0$, $y=0$ et en une quadrique

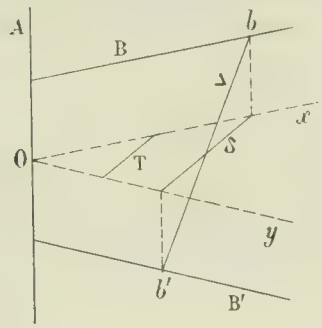
$$-2b(z^2-h^2) - 2dhy(z+h) + 2ehx(z-h) + fh^2xy = 0.$$

Cette quadrique passe par les droites B et B', mais elle ne contient pas A.

Dans ces trois cas particuliers, le lieu du centre de la conique section par un plan passant par A est toujours une conique.

**Solution géométrique. — 1.** Les plans menés par B et B' parallèlement au plan P sont deux plans tangents parallèles à la quadrique S ; le centre C de cette quadrique est donc dans le plan P. Supposons que le point C décrive une droite T du plan P.

Considérons le plan parallèle à T et passant par A ; il est tangent à S. Il en est de même du plan symétrique par rapport à T, car la symétrie a lieu en même temps par rapport à tout point C de la droite T. Ce dernier plan coupe donc S suivant deux génératrices. Mais la génératrice de même système que A doit rencontrer B et B'. Or, il n'y a qu'une droite Δ appartenant au plan considéré et s'appuyant sur B et B'. Cette droite fixe Δ appartient donc à toutes les surfaces S dont le centre est sur T. Pour la construire, on mène la droite δ homothétique de T par rapport au point O dans le rapport 2, par les points où δ rencontrent $Ox$ et $Oy$ on mène des parallèles à $Oz$ qui rencontrent B et B' aux points $b$ et $b'$, et il n'y a plus qu'à joindre $bb'$ pour obtenir la droite Δ.




**2.** Supposons maintenant que le point C décrive une courbe (Γ) de classe $m$, et soient C et C' deux points voisins de cette courbe. Les quadriques S et S' correspondantes se coupent suivant une quatrième génératrice D qui se déduit de la droite CC' comme Δ se déduit de T. Si C' se rapproche indéfiniment de C, CC' a pour limite la tangente T au point C à la courbe (Γ), et la génératrice D a pour limite la caractéristique Δ de la surface S.

L'enveloppe $\Sigma$ de S est donc le lieu des droites Δ déduites des tangentes à (Γ) comme il a été indiqué plus haut.

La projection δ de Δ sur le plan P (les projetantes étant parallèles à A) enveloppe une courbe (Γ') homothétique de Γ par rapport au point O, le rapport d'homothétie étant égal à 2. Donc la droite Δ est tangente à un cylindre ayant pour directrice (Γ') et dont les génératrices sont parallèles à A.

Par suite, la surface $\Sigma$ peut être considérée comme engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur les deux droites B et B' et en restant tangente à un cylindre de classe $m$.

Pour déterminer le degré de cette surface, cherchons combien il y a de points sur une droite quelconque H, c'est-à-dire combien il y a de droites Δ rencontrant H. Toutes les droites qui rencontrent B, B' et H forment un hyperboloïde dont le contour apparent sur le plan P parallèlement à A est une conique (γ). Les droites Δ qui rencontrent B, B', H se projettent suivant des tangentes communes à la conique (γ) et à la courbe (Γ'). Le nombre de ces tangentes est égal à $2m$, puisque (Γ') comme (Γ) est de classe $m$. Il existe donc $2m$ droites Δ rencontrant H, la surface $\Sigma$ est de degré $2m$.

Puisque la droite Δ s'appuie constamment sur B et B', ces droites sont situées sur la surface $\Sigma$. Il en est de même de A qui est une position particulière de Δ, correspondant au cas où la tangente δ à (Γ') passe par le point O. Comme de ce point on peut mener $m$ tangentes à (Γ'), on voit que A est une droite multiple d'ordre $m$ de la surface.

Cherchons maintenant l'ordre de multiplicité de B. Considérons un point quelconque M de B, et cherchons combien il existe de points de la surface sur une droite H passant par le point M. Toutes les droites Δ rencon-

trant B et H sont situées dans le plan BH, et comme elles rencontrent B′, elles passent par la trace I de B′ sur le plan BH. Les projections de Δ sur le plan P passent alors par la projection du point I, et comme elles sont tangentes à (Γ′), elles sont au nombre de $m$. Il existe donc $m$ points de la surface sur la droite H qui passe au point M. Donc le point M est un point multiple d'ordre $m$. Par suite, la droite B est multiple d'ordre $m$. Même raisonnement pour la droite B′.

**3.** Si la courbe (Γ) est une conique, la surface Σ est du quatrième degré et admet comme droites doubles A, B, B′.

Tout plan Π passant par A coupe Σ suivant la droite A et suivant une conique Q. Cherchons le lieu du centre ω de cette conique. Pour cela cherchons d'abord les points de Q situés sur une droite $d$ du plan Π parallèle à A. Il suffit de mener par $d$ des plans tangents au cylindre qui a pour directrice (Γ′), de déterminer les droites Δ situées dans ces plans et de prendre les points de rencontre de ces droites et de la droite $d$. Si, en particulier $d$ est l'une des génératrices du cylindre situées dans le plan Π, les deux points de rencontre de $d$ et de la conique Q sont confondus. Par suite, les deux génératrices du cylindre situées dans le plan Π sont tangentes à la conique (Q). Le centre ω se trouve donc sur la droite du plan Π parallèle à ces deux génératrices et équidistante. Or, quand Π tourne autour de A, la droite considérée engendre un cylindre (R) ayant ses génératrices parallèles à A et ayant pour base le lieu des milieux des cordes de (Γ′) passant par le point O. On sait que ce lieu est une conique homothétique à (Γ′) et passant par l'origine.

Le lieu du centre ω se trouve donc sur le cylindre (R).

Pour avoir une deuxième surface contenant ce lieu, on peut chercher les points de la conique (Q) qui sont situés sur les droites intersections du plan π et des plans menés par B et B′ parallèlement au plan P. On obtient ainsi par une construction simple deux cordes parallèles de la conique, et la droite qui joint leurs milieux passe par le point ω. Il est aisé de voir que cette droite engendre une quadrique (L) passant par la droite A′ et par la parallèle à A menée par le centre de (Γ′).

La quadrique (L) et le cylindre R ayant deux génératrices communes parallèles à A se coupent suivant une conique qui est le lieu du centre de la conique (Q).

Supposons que la conique (Γ) soit tangente à $Ox$ ; il en est de même de la conique (Γ′).

Cherchons dans cette hypothèse le degré de la surface Σ, c'est-à-dire le nombre de droites Δ qui rencontrent une droite quelconque H. Toutes les droites qui rencontrent B, B′ et H engendrent un hyperboloïde dont le contour apparent sur le plan $xOy$ parallèlement à $Oz$ est une conique (γ) tangente aux axes $Ox$ et $Oy$. Les droites Δ qui rencontrent B, B′ et H se projettent suivant les tangentes communes aux coniques (Γ′) et (γ). Ces deux coniques étant tangentes à $Oy$ admettent en outre trois tangentes communes, donc Σ est du troisième degré.

Si (Γ) est tangente à $Ox$ et à $Oy$, Σ est du second degré.

J. HAAG.

Très bonne solution analytique et géométrique : M. L. Bickart.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist ; J. D. Dufaut, professeur à l'école primaire supérieure de Poitiers ; A. Chatelet, élève au lycée de Douai ; L. Barré.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1235.** — *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* $Ox$, $Oy$, $Oz$, *une droite* Δ *et un point* I *sur cette droite, on considère deux points variables de la droite,* $M_1$, $M_2$, *équidistants de* I, *que l'on projette sur les axes en* $A_1$, $B_1$, $C_1$ *et* $A_2$, $B_2$, $C_2$, *et on considère en outre un plan* P *coupant les axes aux points* A, B, C *tels que*

$$OA = d\,\frac{OA_1}{OA_2}, \qquad OB = d\,\frac{OB_1}{OB_2}, \qquad OC = d\,\frac{OC_1}{OC_2},$$

*$d$ étant une constante donnée.*

1° *Déterminer l'ordre et la classe de la surface* Σ *enveloppe des plans* P, *et trouver les traces de cette surface sur les plans de coordonnées.*

2° *Montrer qu'il existe une infinité de systèmes* (Δ, I) *qui conduisent à la même surface* Σ. *Trouver le*

*lieu des droites* $\Delta$ *passant par un point donné, l'enveloppe des droites* $\Delta$ *qui sont contenues dans un plan donné, et, à chaque fois, le lieu des points* I *correspondants.*

3° *Montrer qu'à un plan* P *on peut associer un plan* P′ *tel que les six points* A, B, C, A′, B′, C′ soient *sur une même sphère* S. *Lieu des centres et enveloppe des sphères* S. *Enveloppe des plans de contact des sphères* S *avec leur enveloppe. Lieu des droites d'intersection des plans* P *et* P′.

1. Au lieu du point I, nous nous donnerons deux points $m_1(a_1, b_1, c_1)$, $m_2(a_2, b_2, c_2)$, positions particulières des points $M_1$, $M_2$ sur la droite $\Delta$.

En posant $\dfrac{\overline{M_1m_1}}{\overline{M_1m_2}} = -\lambda$, les coordonnées des points $M_1$, $M_2$ seront respectivement

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1 + \lambda a_2}{1+\lambda}, \\ y_1 = \dfrac{b_1 + \lambda b_2}{1+\lambda}, \\ z_1 = \dfrac{c_1 + \lambda c_2}{1+\lambda}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{a_2 + \lambda a_1}{1+\lambda}, \\ y_2 = \dfrac{b_2 + \lambda b_1}{1+\lambda}, \\ z_2 = \dfrac{c_2 + \lambda c_1}{1+\lambda}, \end{cases}$$

et l'équation du plan P

$$\frac{x_2 x}{x_1} + \frac{y_2 y}{y_1} + \frac{z_2 z}{z_1} - d = 0,$$

s'écrira

$$(1) \qquad \frac{1+\lambda a}{\lambda + a}x + \frac{1+\lambda b}{\lambda + b}y + \frac{1+\lambda c}{\lambda + c}z - d = 0,$$

avec

$$\frac{a_1}{a_2} = a, \qquad \frac{b_1}{b_2} = b, \qquad \frac{c_1}{c_2} = c.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, on a une équation du troisième degré en $\lambda$. Par un point $M(x, y, z)$ de l'espace, il passe donc trois plans P, et l'enveloppe des plans P est une surface développable $\Sigma$ de la troisième classe.

$\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ étant les trois racines de l'équation (1), il est aisé d'exprimer en fonction de ces quantités les coordonnées du point M. Il suffit d'identifier le premier membre de (1) à

$$(2) \qquad \frac{k(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)}{(\lambda + a)(\lambda + b)(\lambda + c)};$$

(1) peut se mettre sous la forme

$$ax + by + cz - d + \Sigma \frac{(1 - a^2)x}{\lambda + a} = 0,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$k = ax + by + cz - d.$$

Puis, décomposant la fraction (2) en éléments simples par le procédé connu, on trouve

$$x = \frac{a'\Pi(\lambda_1 + a)}{F}, \qquad y = \frac{b'\Pi(\lambda_1 + b)}{F}, \qquad z = \frac{c'\Pi(\lambda_1 + c)}{F},$$

où l'on a posé

$$a' = \frac{(b-c)d}{1-a^2}, \qquad b' = \frac{(c-a)d}{1-b^2}, \qquad c' = \frac{(a-b)d}{1-c^2}$$

$$\text{et} \quad F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{d}\Sigma\, aa'\Pi(\lambda_1 + a) - (b-c)(c-a)(a-b)$$

Lorsque le point $M(x, y, z)$ est sur la surface $\Sigma$, deux des racines deviennent égales $\lambda_2 = \lambda_3$, et les formules précédentes expriment les coordonnées d'un point quelconque de la surface en fonction de deux paramètres $\lambda_1$, $\lambda_2$.

Pour que le point $(x, y, z)$ reste sur un plan donné

$$ux + vy + wz + r = 0,$$

il faut qu'on ait

$$\Sigma a'\left(u + \frac{r}{d}\right)(\lambda_1 + a_1\lambda_2 + a)^2 - r(b - c)(c - a)(a - b) = 0.$$

Si l'on transporte dans les expressions de $x, y, z$ la valeur de $\lambda_1$ tirée de la précédente équation, on arrive à des formules qui ne contiennent plus que le paramètre $\lambda_2$, et qui montrent que la section par le plan donné est une courbe unicursale du quatrième ordre. C'est donc également l'ordre de la surface $\Sigma$.

La trace de la surface sur le plan $z = 0$ est l'enveloppe des droites

$$\frac{1 + \lambda a}{\lambda + a}x + \frac{1 + \lambda b}{\lambda + b}y - d = 0.$$

C'est une conique à centre dont l'équation tangentielle s'obtient immédiatement en éliminant $\lambda$ entre les équations

$$\begin{cases} (\lambda + a)du + (1 + \lambda a)v = 0, \\ (\lambda + b)dv + (1 + \lambda b)u = 0, \end{cases}$$

$$-d^2uv + kd(u - v) + r^2 = 0,$$

où

$$k = \frac{1 - ab}{a - b}.$$

Les traces sur les plans $x = 0$, $y = 0$ sont de même

$$-d^2vw + gd(v - w)r + r^2 = 0,$$
$$-d^2wu + hd(w - u)r + r^2 = 0,$$

avec

$$g = \frac{1 - bc}{b - c}, \qquad h = \frac{1 - ca}{c - a}.$$

On a d'ailleurs identiquement

(3) $$gh + gk + hk + 1 = 0.$$

**2.** La surface $\Sigma$ pouvant être considérée comme la développable circonscrite à deux des trois coniques à centre que l'on vient de trouver dépend seulement de trois paramètres, par exemple $d$, $g$, $h$, $k$ liés par la relation (3).

Or les équations

$$bc + g(b - c) - 1 = 0, \qquad ca + h(c - a) - 1 = 0, \qquad ab + k(a - b) - 1 = 0,$$

où $g$, $h$, $k$ sont des constantes, comparées aux équations tangentielles des coniques précédentes, font voir que si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont une solution de ces équations, les autres s'en déduisent par les formules

$$a = \frac{1 + \lambda\alpha}{\lambda + \alpha}, \qquad b = \frac{1 + \lambda\beta}{\lambda + \beta}, \qquad c = \frac{1 + \lambda\gamma}{\lambda + \gamma}.$$

Si l'on astreint la droite $\Delta$ à passer par un point fixe, on peut supposer que ce point fixe est le point $M_2(a_2, b_2, c_2)$. Le lieu du point $M_1$ est alors la cubique gauche

$$x = a_2\frac{1 + \lambda\alpha}{\lambda + \alpha}, \qquad y = b_2\frac{1 + \lambda\beta}{\lambda + \beta}, \qquad z = c_2\frac{1 + \lambda\gamma}{\lambda + \gamma}$$

passant par $M_2(\lambda = 1)$, et le symétrique de ce point par rapport à l'origine $O(\lambda = -1)$. Il en résulte évidemment que le lieu de la droite $\Delta$ est un cône du deuxième ordre ayant pour sommet le point $M_2$, et passant par le point O. On a d'ailleurs facilement son équation en éliminant $\lambda$, $\mu$ entre les trois équations de la forme

$$X = x - a_2 = \mu(a_1 - a_2),$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} X & \alpha X & (\alpha-1)a_2 \\ Y & \beta Y & (\beta-1)b_2 \\ Z & \gamma Z & (\gamma-1)c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le lieu du point I est la cubique gauche homothétique dans le rapport $\frac{1}{2}$ de la cubique lieu de $M_1$. Elle passe donc par $M_2$ et O.

Pour avoir l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites $\Delta$ contenues dans un plan $(u_0, v_0, w_0, r_0)$, il nous faut éliminer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ entre les relations

$$u_0a_2 + v_0b_2 + w_0c_2 + r_0 = 0, \qquad ua_2 + vb_2 + wc_2 + r = 0,$$
$$u_0(a_1 - a_2) + v_0(b_1 - b_2) + w_0(c_1 - c_2) = 0, \qquad u(a_1 - a_2) + \cdots = 0.$$

On peut remplacer les deux premières par

$$(r_0u - u_0r)a_2 + (r_0v - v_0r)b_2 + (r_0w - w_0r)c_2 = 0.$$

Remplaçant $a_1, b_1, c_1$ par leurs valeurs en fonction de $a_2, b_2, c_2$ et éliminant $a_2, b_2, c_2$ il vient

$$\begin{vmatrix} r_0u - u_0r & r_0v - v_0r & r_0w - w_0r \\ (a-1)u_0 & (b-1)v_0 & (c-1)w_0 \\ (a-1)u & (b-1)v & (c-1)w \end{vmatrix} = 0,$$

ou en posant $r_0u - u_0r = l$, $v_0w - w_0v = L$, etc.,

$$\frac{\lambda+\alpha}{1-\alpha}lL + \frac{\lambda+\beta}{1-\beta}mM + \frac{\lambda+\gamma}{1-\gamma}nN = 0.$$

Comme on a $lL + mM + nN = 0$, le premier membre de l'équation précédente est divisible par $\lambda + 1$, et il reste

$$(4) \qquad \frac{lL}{1-\alpha} + \frac{mM}{1-\beta} + \frac{nN}{1-\gamma} = 0.$$

L'enveloppe est, comme on voit, toujours une parabole.

*Remarque.* — L'équation (4), où $l, m, n, L, M, N$ sont considérés comme les coordonnées pluckériennes de la droite, est l'équation du complexe des droites $\Delta$. On peut également écrire cette équation

$$glL + hmM + knN = 0.$$

Il nous faut maintenant trouver le lieu des points I correspondants.

Les coordonnées de ce point étant

$$2x = a_1 + a_2 = a_2\frac{(\lambda+1)(1+\alpha)}{\lambda+\alpha}, \quad \text{etc.},$$

l'équation $u_0a_2 + v_0b_2 + w_0c_2 + r_0 = 0$ devient

$$\Sigma\frac{u_0x(\lambda+\alpha)}{1+\alpha} + \frac{r_0}{2}(\lambda+1) = 0.$$

ou

$$(\lambda-1)\left(\Sigma\frac{u_0x}{1+\alpha} + \frac{r_0}{2}\right) + u_0x + v_0y + w_0z + r_0 = 0.$$

Comme on a $u_0x + v_0y + w_0z + r_0 = 0$, on voit que le lieu de I est la droite d'intersection du plan donné et du plan

$$\frac{u_0x}{1+\alpha} + \frac{v_0y}{1+\beta} + \frac{w_0z}{1+\gamma} + \frac{r_0}{2} = 0.$$

3. Si l'on remplace $\lambda$ par $\frac{1}{\lambda}$ dans l'équation du plan P, on obtient un plan P'

$$\frac{\lambda+a}{1+\lambda a}x + \frac{\lambda+b}{1+\lambda b}y + \frac{\lambda+c}{1+\lambda c}z - d = 0,$$

qui est bien celui de l'énoncé, puisque l'on a entre les coordonnées $x, y, z$ et $x', y', z'$ des points où les deux plans rencontrent les axes, les deux relations

$$xx' = yy' = zz' = d^2.$$

Les coordonnées du centre de la sphère S sont

$$\xi = \frac{x + x'}{2} = \frac{d}{2}\left(\frac{a^2 - 1}{a(\lambda^2 + 1) - 2\lambda} + \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda(a^2 + 1) - 2a}\right), \quad \text{etc.},$$

ou en posant

$$\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} = \mu, \qquad \frac{a^2 + 1}{a} = A, \ldots$$

$$\xi = \frac{d}{2}\,\frac{A\mu + 4}{\mu + A}, \qquad \eta = \frac{d}{2}\,\frac{B\mu + 4}{\mu + B}, \qquad \zeta = \frac{d}{2}\,\frac{C\mu + 4}{\mu + C}.$$

Le lieu du centre de la sphère S est donc une cubique gauche Γ, que nous mettrons sous la forme

$$\xi = \xi' + \frac{A'}{\mu + A}, \qquad \eta = \eta' + \frac{B'}{\mu + B}, \qquad \zeta = \zeta' + \frac{C'}{\mu + C}.$$

La puissance de l'origine par rapport à la sphère S étant égale à $d^2$, on peut écrire immédiatement son équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\xi x - 2\eta y - 2\zeta z + d^2 = 0,$$

ou bien

$$(5) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\xi' x - 2\eta' y - 2\zeta' z + d^2 - 2\left(\frac{A'}{\mu + A}x + \frac{B'}{\mu + B}y + \frac{C'}{\mu + C}z\right) = 0.$$

Cette sphère touche son enveloppe suivant un cercle contenu dans le plan Q

$$Q = \frac{A'}{(\mu + A)^2}x + \frac{B'}{(\mu + B)^2}y + \frac{C'}{(\mu + C)^2}z = 0.$$

Si l'on exprime que l'équation (5), du troisième degré en $\mu$, a une racine double, on trouve que l'enveloppe $\Sigma'$ est une surface du huitième ordre quadricirculaire.

Le plan Q de contact est le plan mené par O perpendiculairement à la tangente à la cubique Γ au point $(\xi, \eta, \zeta)$. Il en résulte que le centre du cercle de contact est sur la tangente. Comme la puissance de l'origine est $d^2$, on voit comme de la cubique Γ on peut déduire une génération de $\Sigma$ comme lieu d'un cercle.

L'enveloppe du plan Q est un cône ayant pour sommet l'origine. On obtient aisément son équation tangentielle ; il suffit pour cela d'éliminer $\mu$ entre les équations

$$\frac{\mu + A}{\left(\frac{A'}{u}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu + B}{\left(\frac{B'}{v}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu + C}{\left(\frac{C'}{w}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

On obtient ainsi

$$(B - C)\left(\frac{A'}{u}\right)^{\frac{1}{2}} + (C - A)\left(\frac{B'}{v}\right)^{\frac{1}{2}} + (A - B)\left(\frac{C'}{w}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

avec

$$r = 0.$$

C'est un cône de quatrième classe, admettant pour plans tangents d'inflexion les trois plans de coordonnées.

Il nous reste à trouver le lieu $\Sigma'$ des droites d'intersection des plans P et P'.

Par un point $(x, y, z)$ d'une de ces droites, il passe trois plans tangents à la développable $\Sigma$, correspondant aux trois racines de l'équation en $\lambda$

$$(1) \qquad \frac{1 - \lambda a}{\lambda + a}x + \frac{1 - \lambda b}{\lambda + b}y + \frac{1 - \lambda c}{\lambda + c}z - d = 0.$$

On aura donc l'équation de la surface $\Sigma'$ en exprimant simplement que l'équation du troisième degré en $\lambda$ a deux racines dont le produit est 1.

Cette condition est pour l'équation

$$A_0\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0,$$
$$A_0^2 - A_0A_2 + A_1A_3 - A_3^2 = 0.$$

Dans le cas présent, les coefficients de l'équation en $\lambda$ étant linéaires en $x$, $y$, $z$, la surface $\Sigma'$ est du deuxième ordre.

VASNIER.

Bonne solution de M. J. Haag.

---

**1247.** — *On considère dans l'espace, une parabole et un point fixe* M.

1° *Équation de la surface* S, *lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point* M *sur les plans tangents à la parabole; discuter ces sections par des plans parallèles au plan* P *de la parabole.*

2° *La surface* S *est coupée par un plan variable passant par* M *et perpendiculaire au plan* P *suivant un cercle et une droite. Lieu du centre du cercle.*

3° *La surface* S *a deux points singuliers; définir géométriquement les cônes des tangentes et les sections planes passant par l'un ou l'autre de ces points.*

4° *Trouver les droites et les coniques tracées sur la surface* S.

**1.** Soient $y^2 - 2px = 0$, $z = 0$ les équations de la parabole et $a, b, c$ les coordonnées du point M. Un plan $ux + vy + wz + r = 0$ est tangent à la parabole si sa trace sur le plan des $xy$ touche la parabole, c'est-à-dire si l'on a $pv^2 - 2ur = 0$ ou $r = \frac{pv^2}{2u}$; il en résulte que l'équation générale des plans tangents à la parabole est $ux + vy + wz + \frac{pv^2}{2u} = 0$, ou

$$(1) \qquad 2u(ux + vy + wz) + pv^2 = 0.$$

La perpendiculaire abaissée du point M sur ce plan a pour équations $\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} = \frac{z-c}{w}$; nous aurons donc le lieu cherché en remplaçant dans l'équation (1) $u, v, w$ par les quantités proportionnelles $x - a$, $y - b$, $z - c$. Nous trouvons ainsi

$$2(x-a)[x(x-a) + y(y-b) + z(z-c)] + p(y-b)^2 = 0.$$

Cette équation représente une surface du troisième degré admettant le point M pour point double, passant par la parallèle à Oz menée par le point M et contenant le cercle de l'infini.

D'autre part, la variable $z$ ne figure que dans le produit $z(z-c)$ qui peut s'écrire $\left(z - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4}$; on en conclut que la surface est symétrique par rapport au plan $z - \frac{c}{2} = 0$. Nous appellerons ce plan le plan Q, il est parallèle au plan P de la parabole et il est à égale distance du point M et du plan P.

Transportons l'origine des coordonnées au point M, l'équation de la surface se simplifie et s'écrit

$$x(x^2 + y^2 + z^2) + x(ax + by + cz) + \frac{p}{2}y^2 = 0,$$

et sous cette forme nous avons en évidence l'équation du cône des tangentes au point M,

$$x(ax + by + cz) + \frac{p}{2}y^2 = 0;$$

nous le définirons géométriquement un peu plus loin.

La section de la surface par le plan $z - h = 0$ est une cubique plane dont la projection sur le plan des $xy$ a pour équation

$$x(x^2 + y^2) + ax^2 + bxy + \frac{p}{2}y^2 + h(h + c)x = 0.$$

Dans le cas particulier où $h(h+c)=0$, cette cubique a un point double à l'origine, et les tangentes en ce point sont réelles si $b^2-2ap>0$, c'est-à-dire si le point M', projection du point M sur le plan des $xy$ est situé à l'extérieur de la parabole donnée. D'ailleurs il est aisé de vérifier que cette cubique à point double est la podaire du point M' par rapport à la parabole.

Si $h(h+c)$ n'est pas nul, la cubique n'a pas de point double, elle est tangente à l'origine à l'axe des $y$.

2° Soit $y=mx$ l'équation d'un plan variable passant par le point M et perpendiculaire au plan P. L'intersection de ce plan avec la surface (S) est la même qu'avec la surface

$$x(x^2+y^2+z^2)+x(ax+by+cz)+\frac{p}{2}m^2x^2=0$$

celle-ci se décompose en un plan $x=0$, et en une sphère

$$x^2+y^2+z^2+\left(a+\frac{p}{2}m^2\right)x+by+cz=0.$$

Il en résulte que l'intersection du plan $y-mx=0$ et de la surface (S) se compose de l'axe des $z$, c'est-à-dire de la droite MM et d'un cercle. Le centre $\omega$ de ce cercle est la projection sur le plan sécant du centre de la sphère ; il est donc défini par les équations

$$(2)\qquad y-mx=0,\qquad \frac{x+\frac{a}{2}+\frac{p}{4}m^2}{-m}=\frac{y+\frac{b}{2}}{1}=\frac{z+\frac{c}{2}}{0}.$$

Le lieu du point $\omega$ est donc une courbe plane située dans le plan $z+\frac{c}{2}=0$ (le plan Q) ; l'équation de la projection de cette courbe sur le plan des $xy$ s'obtient en éliminant $m$ entre les deux premières équations (2). Le résultat de cette élimination est

$$2x(x^2+y^2)+ax^2+bxy+\frac{py^2}{2}=0;$$

cette équation représente une courbe homothétique de la podaire de M' par rapport à la parabole.

3. Nous avons vu que le point M était un point double de la surface (S). Comme cette surface est symétrique par rapport au plan Q, le point M', symétrique de M par rapport au plan Q est également un point double. On peut montrer que la surface n'a pas d'autres points singuliers en discutant les équations $f'_x=0$, $f'_y=0$, $f'_z=0$, $f'_t=0$, mais nous l'établirons géométriquement.

Tout plan passant par l'un des points M ou M' coupe la surface suivant une cubique circulaire ayant un point double au point considéré ; dans le cas où le plan passe par la droite MM', il coupe la surface suivant la droite MM' et suivant un cercle passant par M et M'.

4. Cherchons d'abord les droites de la surface. Les directions asymptotiques de la surface sont données par l'équation

$$x(x^2+y^2+z^2)=0,$$

par suite, si nous excluons les droites isotropes, les génératrices de la surface sont parallèles au plan $x=0$, c'est-à-dire au plan des $yz$.

Coupons la surface par un plan parallèle à ce plan $x=\lambda$, la section est une conique,

$$\lambda(\lambda^2+y^2+z^2)+\lambda(a\lambda+by+cz)+\frac{p}{2}y^2=0,$$

ou

$$\left(\lambda+\frac{p}{2}\right)y^2+\lambda z^2+\lambda by+\lambda cz+\lambda^2(\lambda+a)=0,$$

et déterminons $\lambda$ en sorte que cette équation représente deux droites. Nous obtenons la condition

$$\lambda^2\left[\lambda(\lambda+a)\left(\lambda+\frac{p}{2}\right)-\frac{\lambda b^2}{4}-\frac{c^2}{4}\left(\lambda+\frac{p}{2}\right)\right]=0.$$

A la solution $\lambda = 0$ correspond une conique réduite à une droite double $y^2 = 0$; nous obtenons ainsi la droite $x = 0$, $y = 0$ située sur la surface, c'est l'axe des $z$ ou la droite MM'.

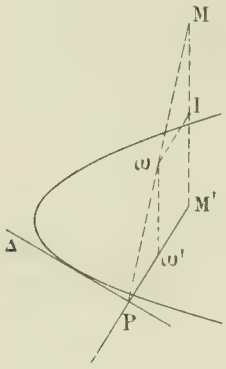
Il nous reste en outre une équation du troisième degré, à chaque racine de laquelle correspondent deux droites de la surface (S).

Nous trouvons ainsi sept génératrices; il faut y ajouter la droite de l'infini du plan $x = 0$.

Tout plan passant par l'une de ces huit droites coupe la surface suivant une conique, qui est un cercle pour les sept premières droites.

**Remarques géométriques**. — Tous les plans parallèles au plan P sont tangents à la parabole en son point à l'infini ; par suite tous les points de la droite MM' sont des points simples du lieu. Donc la droite MM' est une génératrice simple de la surface (S).

Cherchons les points de cette surface qui sont situés dans un plan R passant par MM', et rencontrant le plan de la parabole suivant une droite M'P. Ces points sont les projections du point M sur les plans tangents à la parabole qui sont perpendiculaires au plan R ; or, tous ces plans passent par une même droite $\Delta$ qui est la tangente à la parabole perpendiculaire à MP, et par suite le lieu des pieds des perpendiculaires menées du point M sur le plan passant par $\Delta$ est le cercle décrit sur MP comme diamètre.




Il résulte de là que la surface est du troisième degré et qu'elle est symétrique par rapport au plan Q perpendiculaire au milieu I de MM'.

Le centre $\omega$ du cercle considéré est le milieu de MP, il se projette sur le plan de la parabole au milieu $\omega'$ de M'P. Le lieu du point P est la podaire de M' par rapport à la parabole, celui de $\omega'$ est la courbe homothétique de cette podaire dans le rapport $\frac{1}{2}$. On en déduit aisément le lieu du point $\omega$.

Remarquons aussi que la surface (S) est coupée par le plan P suivant la podaire du point M' par rapport à la parabole.

Une droite quelconque (D) passant par le point M rencontre la surface (S) en un seul point H qui est l'intersection de (D) et du plan tangent à la parabole perpendiculaire à (D). Donc le point M est un point double. Pour que le point H coïncide avec le point M, il faut que le plan tangent considéré passe par le point M. Il en résulte que le cône des tangentes au point M est le cône supplémentaire du cône qui a pour sommet le point M et pour directrice la parabole.

Comme la surface est symétrique par rapport au plan Q, le point M' est aussi un point double, et on a aisément le cône des tangentes.

Je dis que la surface ne peut admettre un autre point double. En effet si elle admettait un point double N en dehors de M et M', le plan NMM' couperait la surface suivant les trois côtés du triangle NMM', or cela est impossible, puisque tout plan passant par MM' coupe la surface suivant un cercle.

Etudions enfin la section de la surface (S) par un plan quelconque ($\Pi$) passant par le point M. Les plans tangents à la parabole correspondant aux points de cette section sont tous perpendiculaires à ($\Pi$) ; leurs traces sur ce plan enveloppent une parabole (K), projection orthogonale de la parabole donnée sur le plan ($\Pi$). La section de la surface par ce plan est donc la polaire de M par rapport à la parabole (K).

J. HAAG.

Bonnes solutions par MM. R. Bouvaist, Dnallor Lecram et J. Ména à Poitiers.

---

**1248**. — *Le cercle passant par les projections d'un point* P *d'une hyperbole équilatère, sur les côtés d'un triangle inscrit, passe par le centre de la courbe.*

Soient $x$ et $y = \frac{1}{x}$ les coordonnées d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes. La droite qui joint les points $M_1\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right)$, $M_2\left(x_2, \frac{1}{x_2}\right)$, et la perpendiculaire à cette droite menée par le point $P\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$ de la courbe, ont respectivement pour équations :

(1) $$X + x_1x_2Y = x_1 + x_2,$$

(2) $$x_1x_2X - Y = x_1x_2\xi - \frac{1}{\xi}.$$

Soit

(3) $$X^2 + Y^2 = \lambda X + \mu Y$$

l'équation d'un cercle passant par le centre de l'hyperbole. Nous allons exprimer que ce cercle passe par le point d'intersection des droites (1) et (2). Il faut, pour cela, éliminer X et Y entre les équations (1), (2) et (3). A cet effet, élevons au carré les deux membres de chacune des équations (1) et (2) et ajoutons; il vient

$$X^2 + Y^2 = \frac{(x_1 + x_2)^2 + \left(x_1x_2\xi - \frac{1}{\xi}\right)^2}{1 + x_1^2x_2^2} = \frac{N}{D},$$

en sorte que l'on peut remplacer l'équation (3) par la suivante

(4) $$\lambda X + \mu Y = \frac{N}{D}$$

La condition cherchée s'écrit dès lors

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \frac{N}{D} \\ 1 & x_1x_2 & x_1 + x_2 \\ x_1x_2 & -1 & x_1x_2\xi - \frac{1}{\xi} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

(5) $$\lambda\left[x_1x_2\left(x_1x_2\xi - \frac{1}{\xi}\right) - x_1 + x_2\right] + \mu\left[x_1x_2(x_1 + x_2) - x_1x_2\xi + \frac{1}{\xi}\right] - N = 0.$$

Soit

(6) $$X^3 - \alpha X^2 + \beta X - \gamma = 0$$

l'équation du troisième degré admettant pour racines les abscisses $x$, $x_1$ et $x_2$ des sommets M, $M_1$, $M_2$ du triangle considéré. Remplaçons dans (5) le produit $x_1x_2$ par $\frac{\gamma}{x}$ et la somme $x_1 + x_2$ par $\alpha - x$ : cette condition pourra s'écrire :

(7) $$x^4 - (2\alpha - \lambda)x^3 + \left[-\lambda\alpha + \mu\left(\gamma - \frac{1}{\xi}\right) + \alpha^2 - \frac{1}{\xi^2}\right]x^2 - \left[-\lambda\frac{\gamma}{\xi} + \mu\gamma(\alpha - \xi) + 2\gamma\right]x + \gamma^2(\xi\xi - \lambda) = 0.$$

Elle devra être pareillement vérifiée par les abscisses $x_1$ et $x_2$ des sommets $M_1$ et $M_2$. Par suite, si l'on considère la condition (7) comme une équation en $x$, cette équation devra admettre les trois racines de l'équation (6). Le premier membre de (7) sera identique au produit du premier membre de (6) par un facteur du premier degré, $x - h$, et cette identité donnera lieu aux quatre équations suivantes :

(8) $$\begin{cases} 2\alpha - \lambda = h + \alpha, \\ -\lambda\alpha + \mu\left(\gamma - \frac{1}{\xi}\right) + \alpha^2 - \frac{1}{\xi^2} = h\alpha - \beta, \\ -\lambda\frac{\gamma}{\xi} + \mu\gamma(\alpha - \xi) + 2\gamma = h\beta - \gamma, \\ \gamma^2(\xi\xi - \lambda) = h. \end{cases}$$

Nous avons donc quatre équations et trois inconnues seulement : $\lambda$, $\mu$ et $h$. Mais il est facile de voir

que ces quatre équations se réduisent en réalité à trois. La 1re et la 4e donnent immédiatement

$$(9) \qquad \lambda = \frac{\alpha - \gamma\xi^2}{1 - \gamma\xi}, \qquad h = \frac{\gamma\xi(\xi - \alpha)}{1 - \gamma\xi}$$

La seconde s'écrit en tenant compte de la première

$$\mu\left(\gamma - \frac{1}{\xi}\right) = \beta - \frac{1}{\xi^2}$$

et donne

$$(10) \qquad \mu = \frac{1 - \beta\xi^2}{(1 - \gamma\xi)\xi}.$$

Il suffit de porter ces valeurs de $\lambda$, $\mu$, $h$ dans la troisième équation, pour constater qu'elle est identiquement vérifiée.

Cette réduction des quatre équations (8) à trois distinctes établit le théorème, puisqu'elle permet de déterminer $\lambda$ et $\mu$ de manière que le cercle (3), qui passe par le centre de l'hyperbole, soit en même temps circonscrit au triangle ayant pour sommets les projections du point P sur les côtés du triangle $MM_1M_2$.

Les équations (9) et (10) donnent de plus les coordonnées du centre de ce cercle en fonction du paramètre $\xi$, qui définit la position du point P et elles montrent que, le point P décrivant l'hyperbole, le centre en question décrit une cubique unicursale à point double. Cette cubique a trois asymptotes réelles correspondant aux valeurs $0, \infty, \frac{1}{\gamma}$ du paramètre $\xi$. Les deux premières sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole. La troisième correspond à un point P particulier facile à déterminer. La condition pour que quatre points de l'hyperbole soient situés deux à deux sur deux droites rectangulaires est

$$xx_1x_2x_3 = -1.$$

Donc $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{xx_1x_2} = -\frac{1}{x_3}$. La position particulière, dont il s'agit, s'obtient donc en prenant le symétrique par rapport à O du point de concours H des hauteurs du triangle $MM_1M_2$. Géométriquement, ce résultat est immédiat.

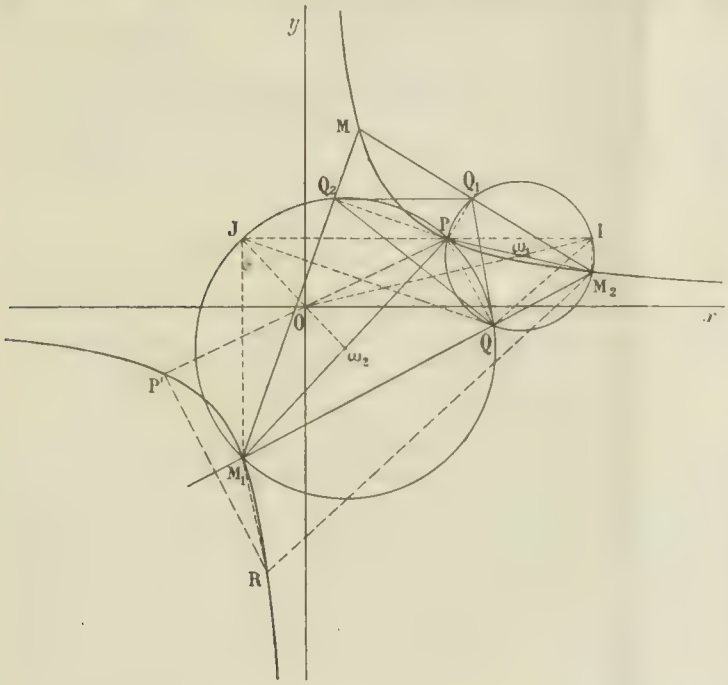
Soit en effet H′ le symétrique de H par rapport au point O. C'est un point du cercle circonscrit au triangle $MM_1M_2$, puisque ce cercle et le cercle d'Euler sont homothétiques, le centre et le rapport d'homothétie étant H et $\frac{1}{2}$. Les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés du triangle sont en ligne droite ; le centre du cercle correspondant est rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite de Simpson relative à H′.

Quant à l'enveloppe du cercle considéré, c'est la courbe homothétique de la podaire de la cubique précédente relative au point O, le centre d'homothétie étant en O et le rapport d'homothétie étant 2.

**Solution géométrique.** — Soit $MM_1M_2$ un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère et soient Q, $Q_1$, $Q_2$ les projections d'un point P de cette courbe sur les côtés du triangle.

Imaginons que $M_1$, $M_2$ et P restent fixes, mais que le point M se déplace sur l'hyperbole. Le point Q reste fixe. Quant aux points $Q_1$ et $Q_2$ ils décrivent deux cercles $(\omega_1)$ et $(\omega_2)$ admettant respectivement $PM_2$ et $PM_1$ comme diamètres. D'ailleurs les droites $QQ_1$ et $QQ_2$ engendrent visiblement deux faisceaux homographiques de même sommet, dans lesquels le rayon QP est à lui-même son propre homologue. Dès lors, dans toute inversion de pôle Q, les points inverses de $Q_1$ et de $Q_2$ décrivent sur les deux droites, inverses des cercles $(\omega_1)$ et $(\omega_2)$, des divisions homographiques telles que la droite qui joint deux points homologues passe par un point fixe. Or cette droite est l'inverse du cercle $(\Gamma)$ circonscrit au triangle $QQ_1Q_2$. Ce cercle passe donc lui-même par un point fixe, autre que le point Q, lorsque M décrit l'hyperbole, et toute la question revient à faire voir

que ce point n'est autre que le centre de la courbe. Il suffit pour cela de montrer que dans deux positions particulières le cercle (Γ) passe par O.




Plaçons le point M à l'infini sur $Oy$. Les points $Q_1$ et $Q_2$ sont alors en I et J sur la parallèle à l'asymptote $Ox$ menée par P. Les droites OI et OJ sont, comme on sait, les diamètres conjugués des cordes parallèles à $PM_2$ et à $PM_1$, de sorte que l'angle $\widehat{IOJ}$ est égal à l'angl^e $\widehat{M_1PM_2}$. Or on a

$$\widehat{M_1PM_2} = \widehat{PM_1J} + \widehat{PM_2I}$$
$$= \widehat{PQJ} + \widehat{PQI} = \widehat{JQI}.$$

Donc $\widehat{IOJ} = \widehat{IQJ}$, et, par suite, le cercle (Γ) relatif au point à l'infini sur $Oy$ passe par O. Comme le cercle (Γ) relatif au point à l'infini sur $Ox$ passe aussi par O, le théorème se trouve établi.

Cette dernière partie peut encore s'établir de la manière suivante: Plaçons le point M au point de concours des hauteurs du triangle $PM_1M_2$, le cercle (Γ) correspondant est le cercle d'Euler, il passe par le centre de l'hyperbole.

Plaçons d'autre part le point M au quatrième point d'intersection R du cercle circonscrit au triangle $PM_1M_2$ avec l'hyperbole. Comme nous l'avons remarqué plus haut, l'orthocentre du triangle $RM_1M_2$ est le symétrique P' de P par rapport à O. Le cercle (Γ) correspondant est la droite de Simpson relative au point P et au triangle $RM_1M_2$. Elle est équidistante de P et de P'. Elle passe donc aussi par O.

HOUDINIÈRE.

**Autre solution.** — Soient $\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$ les coordonnées du point P et $\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$, $\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$, $\left(\gamma, \frac{1}{\gamma}\right)$ celles des sommets d'un triangle ABC inscrit dans l'hyperbole équilatère $xy - 1 = 0$.

Nous aurons démontré la proposition si nous prouvons que la conique qui a pour foyer le point P et qui est tangente aux trois côtés du triangle est aussi tangente à la perpendiculaire élevée au centre O de l'hyperbole à la droite OP.

L'équation tangentielle d'une conique inscrite dans le triangle ABC est

$$\lambda(u\beta^2 + v + w\beta)(u\gamma^2 + v + w\gamma) + \mu(u\gamma^2 + v + w\gamma)(u\alpha^2 + v + w\alpha) + \nu(u\alpha^2 + v + w\alpha)(u\beta^2 + v + w\beta) = 0.$$

Le point P sera foyer de cette conique si dans l'équation obtenue en éliminant $w$ entre l'équation de la conique et celle du point P les coefficients de $u^2$ et de $v^2$ sont égaux et si le coefficient de $uv$ est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$\lambda(\beta - x_0)(\gamma - x_0)(\beta + \gamma) + \mu(\gamma - x_0)(\alpha - x_0)(\gamma + \alpha) + \nu(\alpha - x_0)(\beta - x_0)(\alpha + \beta) = 0,$$
$$\lambda(\beta - x_0)(\gamma - x_0)(\beta\gamma x_0^2 - 1) + \mu(\gamma - x_0)(\alpha - x_0)(\gamma\alpha x_0^2 - 1) + \nu(\alpha - x_0)(\beta - x_0)(\alpha\beta x_0^2 - 1) = 0.$$

On en déduit

$$\frac{\lambda}{(\beta - \gamma)(\alpha - x_0)(\alpha^2 x_0^2 + 1)} = \frac{\mu}{(\gamma - \alpha)(\beta - x_0)(\beta^2 x_0^2 + 1)} - \frac{\nu}{(\alpha - \beta)(\gamma - x_0)(\gamma^2 x_0^2 + 1)}.$$

L'équation de la conique est alors

$$(\beta - \gamma)(\alpha - x_0)(\alpha^2 x_0^2 + 1)(u\beta^2 + v + w\beta)(u\gamma^2 + v + w\gamma) + (\gamma - \alpha)(\beta - x_0)(\beta^2 x_0^2 + 1)(u\gamma^2 + v + w\gamma)(u\alpha^2 + v + w\alpha)$$
$$+ (\alpha - \beta)(\gamma - x_0)(\gamma^2 x_0^2 + 1)(u\alpha^2 + v + w\alpha)(u\beta^2 + v + w\beta) = 0.$$

Les coordonnées de la perpendiculaire élevée en O à la droite OP sont $u = x_0^2$, $v = 1$, $w = 0$; remplaçons $u$, $v$, $w$ par ces valeurs dans l'équation de la conique, nous avons

$$(\alpha^2 x_0^2 + 1)(\beta^2 x_0^2 + 1)(\gamma^2 x_0^2 + 1)[(\beta - \gamma)(\alpha - x_0) + (\gamma - \alpha)(\beta - x_0) + (\alpha - \beta)(\gamma - x_0)] = 0.$$

La quantité entre crochets est identiquement nulle, et le théorème est démontré.

R. BOUVAIST.

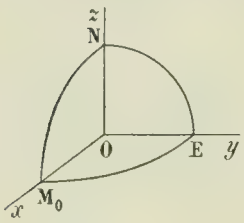
Autre solution par M. Dnallor Lecram.

## CONCOURS DE 1904

### ÉCOLE POLYTECHNIQUE

*Mathématiques.*

I. — **1311**. — On donne une sphère de rayon $r$, de centre O origine de coordonnées rectangulaires, $Ox$, $Oy$, $Oz$. Un point de cette sphère primitivement situé en $M_0$ sur $Ox$, se déplace uniformément sur le grand cercle $M_0N$, de $M_0$ vers N, avec une vitesse angulaire $\omega$. En même temps le plan primitivement situé en $OM_0N$ tourne uniformément autour de ON de $OM_0N$ vers OEN, avec la même vitesse angulaire. Par suite de ce double mouvement, le point mobile considéré, au bout du temps $t$, occupera une certaine position M.




1° Déterminer en fonction de $t$ les coordonnées du point M, les composantes de sa vitesse $v$, et celles de son accélération $w$ suivant les directions des axes. Déterminer aussi la grandeur de la vitesse, celles de l'accélération tangentielle $w_t$ et de l'accélération normale $w_n$.

2° Construire les projections sur les trois plans coordonnés de la trajectoire de M.

3° L'accélération totale de M étant représentée par une droite MW, et cette droite venant percer le plan des $xy$ en P, déterminer dans ce plan le mouvement du point P.

Démontrer que la droite MW rencontre une droite fixe.

II. — **1312**. — Déterminer à 0,001 près la racine positive de l'équation $x^3 + x^2 - 27{,}48 = 0$, en appliquant la méthode d'approximation de Newton.

(*31 mai, de 7 h. à 11 h.*)

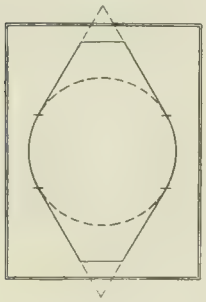
*Physique et Chimie.*

*Physique.* — I. — Expérience d'Andrews.
II. — Théorie de l'électromètre absolu.

*Chimie.* I. — Préparation dans les laboratoires et analyse de l'ammoniaque.
II. — Propriétés qui permettent de rapprocher le soufre de l'oxygène.

(*31 mai, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

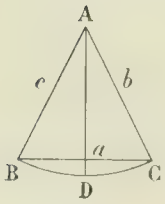
*Lavis.*



Exécuter à l'encre de Chine, à teintes plates ou à teintes fondues, le lavis d'un solide sphéro-conique. Sa surface sera supposée être blanche et dépolie. Le rayon lumineux est dirigé à 45° suivant l'usage.

(*1er juin, de 2 h. à 4 h.*)

*Calcul trigonométrique.*




**1313**. — Dans le triangle isocèle ABC, on a :

$$b = c = 35^m{,}876, \qquad a = 24^m{,}853.$$

On demande de calculer : 1° la surface du triangle ;

2° l'aire du secteur circulaire ABDC dans le cercle de centre A et de rayon AB ;

3° le volume engendré par la révolution complète du secteur ABDC tournant autour de son axe de symétrie AD.

(*1er juin, de 4 h. à 5 h.*)

*Épure.*

**1314.** — On tracera un cadre de 300mm de largeur sur 380mm de hauteur, et une ligne de terre au milieu de la hauteur.

Une sphère de rayon égal à 40mm, a son centre $(o, o')$ situé à 120mm du côté gauche du cadre, à 50mm au-dessus du plan horizontal, et à 65mm en avant du plan vertical.

Un point lumineux $(s, s')$ est à 100mm à gauche, à 100mm en avant, et à 20mm au-dessus du centre de la sphère.

Déterminer par ses deux projections la séparatrice d'ombre propre de la sphère, et ses ombres portées sur les plans de projection : ces dernières seront tracées jusqu'aux limites du cadre.

On déterminera directement : 1° Un point courant $(m, m')$ de la séparatrice, et la tangente $mt$, $m't'$ en ce point ;

2° Les ombres portées par le point $(m, m')$ sur les deux plans de projection et les tangentes aux courbes d'ombres portées ;

3° Les axes de chacune des projections de la séparatrice ;

4° Les lignes et les points importants des ombres portées sur les plans de projection.

On emploiera les traits noirs pour tracer les parties vues ; les points ronds noirs pour les parties cachées ; les traits rouges pour les constructions. Les parties dans l'ombre seront couvertes de hachures.

*(2 juin, de 7 h. à 11 h.)*

---

## ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

*Mathématiques.*

**1315.** — I. On donne deux axes de coordonnées rectangulaires OX, OY, et, sur la partie positive de l'axe des $x$, un point A, d'abscisse $c$.

Appelons en général parabole (P) une parabole qui passe par le point A et dont la directrice coïncide avec l'axe des $y$, F le foyer de cette parabole, $\alpha$, $\beta$ les coordonnées de ce foyer.

1° Soit B un point d'une parabole (P), soit K la projection de ce point sur la directrice, soit S l'aire du triangle OFK ; montrer que l'on a

$$\frac{OF^2.OK}{OA} = \frac{KF^2.OK}{KB} = 4S.$$

2° Au point B de la parabole (P) on fait correspondre le point M dont les coordonnées $u$, $v$ sont données par les formules

$$(1) \qquad u = \frac{KF}{OK}, \qquad v = \frac{OF}{OK};$$

les seconds membres sont pris en valeur absolue, en sorte que les nombres $u$, $v$ sont positifs. Quand on se donne la parabole (P) et le point B sur cette parabole, le point M est déterminé sans ambiguïté. Si l'on se donne un point B du plan, il passe en général deux paraboles (P) par ce point. On appellera première parabole relative au point B celle des deux dont le foyer est le plus éloigné de la directrice. Soit $F_1$ ce foyer ; soit $F_2$ le foyer de la seconde parabole. Au point B correspondent alors deux points $M_1$, $M_2$, par les relations (1), où l'on remplacera successivement F par $F_1$ et par $F_2$.

Connaissant les coordonnées $x$, $y$ du point B, on demande de calculer les coordonnées des points $M_1$, $M_2$. Quelles sont les positions limites de ces points lorsque le point B s'approche d'un point $B_0$ situé sur la partie positive de l'axe des $x$ ? Quels sont les lieux décrits par ces points limites quand l'abscisse de $B_0$ varie ?

3° Inversement, le point M étant donné par ses coordonnées $u$, $v$ on demande de déterminer les coordonnées $x$, $y$ du point B auquel il correspond en vertu des relations (1), ainsi que les coordonnées $\alpha$, $\beta$ du foyer F, qui figure dans ces relations, de la parabole (P) sur laquelle le point B doit être situé.

Construire géométriquement le point F et le point B, connaissant le point M et l'unité de longueur.

4° Le problème précédent admet deux solutions. Dans quelle région du plan le point M doit-il être situé pour que ces solutions soient réelles ? Dans quelle région doit-il être situé pour que la parabole (P), dont on a déterminé le foyer, soit la première parabole relative au point B ?

II. 1° Considérant une parabole (P), de foyer $(\alpha, \beta)$, on suppose qu'un arc quelconque de cette parabole est pesant : la densité en chaque point est égale à la racine carrée de l'abscisse $x$ de ce point, en sorte que le poids de l'élément d'arc $ds$ soit $\sqrt{x}\,ds$. Montrer que, dans ces conditions, le poids d'un arc AB de la parabole est égal au produit par $\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$ de l'aire comprise entre la courbe, la directrice, et les deux droites OA, KB. (K est, comme plus haut, la projection de B sur la directrice.)

2° On suppose que les deux droites OA, KB soient aussi pesantes ; la densité en chacun de leurs points est encore égale à la racine carrée de l'abscisse de ce point. Etudier, quand le point B décrit la parabole (P), comment varie la différence entre le poids de l'arc AB et la somme des poids des droites OA, KB. Montrer que, sur chacun des arcs indéfinis de la parabole qui partent du point A, il y a un point B, et un seul, pour lequel cette différence est nulle.

3° Le point B étant ainsi déterminé sur la parabole (P), soit M le point qui lui correspond par les relations (1) ; montrer que, lorsque la parabole (P) varie, le point M reste sur une conique, qui fait partie de la courbe du troisième degré définie par l'équation

$$2u^3 + 2v^3 \quad 3u^2 - 3v^2 + 1 = 0.$$

N. B. — Les poids dont il est question plus haut sont *positifs*.

(*13 juin, de 8 h. à 2 h.*)

*Physique.*

I. — Définition et mesure de l'inclinaison magnétique.

II. — **1316**. — On construit un pendule, assimilable à un pendule simple, en attachant à un fil isolant très fin et parfaitement flexible, long de 1 mètre, une boule sphérique d'aluminium (densité 2,67) de 5 millimètres de diamètre. On place cette boule, loin de tout autre conducteur, au milieu d'une vaste enceinte conductrice reliée au sol ; et on la charge en la touchant un instant avec un fil métallique très fin relié à un des pôles d'une source éloignée dont l'autre pôle est au sol. La différence de potentiel ainsi obtenue est de 300 volts.

1° Calculer en coulombs la charge prise par la boule.

2° On place, symétriquement par rapport à la boule dans sa position d'équilibre, deux grands plateaux verticaux formant condensateur à lame d'air. Leurs faces internes parallèles sont distantes de 10 centimètres. On charge ce condensateur avec une autre source qui établit aussitôt une différence de potentiel de 15000 volts entre ses armatures. Ces armatures sont supposées assez grandes pour qu'on puisse considérer le champ électrostatique obtenu comme parfaitement uniforme et on peut admettre sans erreur sensible qu'elles sont chargées de la même façon que si la boule était enlevée. Le pendule prend une nouvelle position d'équilibre : expliquer comment il l'atteint et calculer l'angle d'écart avec la verticale en tenant compte de ce que cet angle est petit. L'accélération de la pesanteur est 981 centimètres.

3° Le résultat du calcul précédent est indépendant de la longueur du pendule : montrer que pourtant, si cette longueur est prise trop grande et dépasse une certaine valeur critique, le calcul n'est plus valable. Décrire, sans calcul, ce qu'on verrait alors.

4° Le pendule étant construit et chargé comme au début, on imagine qu'on verse entre les deux plateaux un liquide parfaitement isolant dont le pouvoir inducteur spécifique aurait la valeur constante 2,25 et dont la densité serait 0,80. Chercher comment la déviation est modifiée en supposant successivement que la communication du condensateur à plateaux avec la source a été rompue : 1° après l'introduction du liquide ; 2° avant que l'on verse celui-ci.

(*14 juin, de 8 h. à 2 h.*)

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1317**. — On considère une conique et ses cercles bitangents C qui ont leurs centres sur un même axe.

1° Il y a deux cercles C passant par un point P. Les construire géométriquement. Lieu du point P quand les deux cercles qui y passent sont orthogonaux.

2° Il y a deux cercles C tangents à une droite D. Les construire. Quand les deux cercles trouvés sont-ils du même côté de la droite D ?

3° Le lieu de leurs points de contact avec la droite D quand cette droite se déplace en gardant la même direction est une conique S.

4° La conique S garde le même cercle orthoptique et ses foyers décrivent un ovale de Cassini quand la direction de la droite D varie. T. L.

**1318**. — Calculer la capacité d'un condensateur sphérique dont le noyau, formé d'une sphère métallique de rayon $R_1$, est recouvert d'une couche de substance diélectrique de pouvoir inducteur spécifique K et d'épaisseur uniforme $R - R_1$ ; autour de ce noyau se trouve une enveloppe concentrique de rayon intérieur $R_2$ plus grand que R.

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE CENTRALE (1903, 1re Session, *fin.*)

### Physique.

**1238.** — *On mélange* $V^{gr}$ *de vapeur d'eau à* $100^{\circ}$. $E^{gr}$ *d'eau à* $t^{\circ}$ *et* $G^{gr}$ *de glace à zéro. Quelle sera la température* $x$ *de l'eau qu'on obtiendra ? Quel doit être le rapport* $\frac{V}{G}$ *pour que la température finale soit* $t^{\circ}$ *? Chercher* $x$ *avec les données suivantes :*

$V = 30$, $E = 2000$, $G = 130$, $t = 10$, *chaleur de vaporisation* $L = 537$, *chaleur de fusion* $l = 80$.

Chaleur *perdue* par $V^{gr}$ de vapeur d'eau passant de $100^{\circ}$ à $x^{\circ}$ : $VL + V(100 - x)$.

Chaleur *gagnée* par $E^{gr}$ d'eau passant de $t^{\circ}$ à $x^{\circ}$ : $E(x - t)$.

Chaleur *gagnée* par $G^{gr}$ de glace passant de $0^{\circ}$ à $x^{\circ}$ : $Gl + Gx$.

S'il n'y a eu aucun échange de chaleur avec le milieu ambiant, on doit avoir

$$VL + V(100 - x) = E(x - t) + Gl + Gx,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{V(L + 100) + Et - Gl}{V + E + G}.$$

Si $x = t$, l'équation devient

$$VL + V(100 - t) = Gl + Gt,$$

d'où

$$\frac{V}{G} = \frac{l + t}{L + 100 - t}.$$

L'application numérique donne

$$x = 13^{\circ},29.$$

### Chimie.

**1239.** — *Une salle de dimensions* $6^{m}$, $4^{m},5$ *et* $5^{m}$ *renferme de l'air pur et sec. On mélange à cet air le gaz provenant de la réaction, à chaud, d'un certain poids de ferrocyanure de potassium anhydre sur un excès d'acide sulfurique concentré. On prélève 100 litres de l'air ainsi vicié, et on les fait passer lentement dans un tube étroit* A *contenant des cristaux d'anhydride iodique, puis dans un tube semblable* B *rempli de cuivre pulvérulent très pur.*

*Les tubes* A *et* B *sont disposés dans une étuve chauffée à* $100^{\circ}$ *environ et le tube à cuivre a été taré avant l'expérience. Quand elle est achevée, son poids a augmenté de* 22 *milligr.*, 858.

*On demande :* 1° *D'expliquer et de formuler les réactions qui se passent entre le ferrocyanure et l'acide sulfurique concentré d'une part, et dans chacun des tubes* A *et* B *d'autre part.*

2° *Quelle est la proportion, en volumes, du gaz étranger mélangé à l'air de la salle.*

3° *Quel poids de ferrocyanure anhydre a été décomposé.*

*Pour simplifier, on supposera les gaz mesurés dans les conditions normales, et on ne fera pas de correction.*

*Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.*

1. Les réactions sont représentées par les équations suivantes :

$$K^4Fe(CAz)^6 + 8SO^4H^2 + 6H^2O = 4SO^4KH + SO^4Fe + 3SO^4(AzH^4)^2 + 6CO,$$
$$5CO + I^2O^5 = 5CO^2 + I^2,$$
$$I^2 + 2Cu = Cu^2I^2.$$

2. Le poids moléculaire de l'iode étant 254, l'augmentation de poids du tube B représente un nombre de millimolécules d'iode égal à $\frac{22,858}{254} = 0,09$. A ces molécules d'iode correspondent 5 fois plus de molécules d'oxyde de carbone, c'est-à-dire 0,45 et, par conséquent, un volume $22^{cc},32 \times 0,45 = 10^{cc}$.

La proportion en volume d'oxyde de carbone est donc $\frac{10}{100000} = \frac{1}{10000}$.

3. Si dans $100^{lit}$ ou $0^{mc},1$ il y a 0,45 millimolécules d'oxyde de carbone, dans $6 \times 4,5 \times 5 = 135^{cm}$ il y en a $0,45 \times 1350 = 607,5$.

Or, pour fournir 6 molécules d'oxyde de carbone, il faut 1 molécule de ferrocyanure ; pour en fournir 607,5 il faudra $\frac{607,5}{6}$ molécules de ferrocyanure et par suite un poids de cette substance égal à $\frac{607,5}{6} \times 368$ milligr. $= 37^{gr},26$.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1243.** — *On considère une ellipse et son cercle principal ; un rayon mené par le centre* O *de l'ellipse rencontre d'un même côté du grand axe l'ellipse et le cercle, respectivement en* M *et* P. *Trouver et construire la courbe lieu du point de rencontre de la normale en* M *à l'ellipse avec la parallèle au petit axe menée par le point* P.

Soient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes et $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ celle de son cercle principal. La normale en un point $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ de l'ellipse a pour équation

$$(1) \qquad \frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0;$$

le rayon OM défini par l'équation $\frac{x}{a\cos\varphi} = \frac{y}{b\sin\varphi}$ rencontre le cercle principal en deux points P et P' ; celui de ces deux points qui est situé par rapport au point O du même côté que le point M a pour abscisse

$$(2) \qquad x = \frac{a^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}},$$

le radical étant précédé du signe +. D'ailleurs, l'équation (2) représente la parallèle à $Oy$ menée par ce point.

On obtiendrait l'équation du lieu en éliminant $\varphi$ entre les deux équations (1) et (2). On peut éviter ce calcul laborieux en résolvant les équations par rapport à $x$ et $y$ ; on obtient de cette façon les coordonnées d'un point du lieu en fonction du paramètre $\varphi$

$$x = \frac{a^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}},$$
$$y = \frac{\sin\varphi}{b}\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} - c^2\right],$$

et pour avoir toute la courbe il suffit de faire varier $\varphi$ dans un intervalle d'étendue égale à $2\pi$.

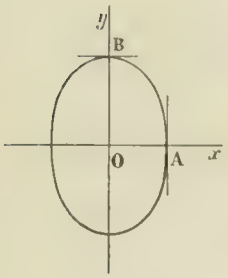
Mais il est aisé de voir qu'on obtiendra toute la courbe en faisant varier $\varphi$ de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et en prenant le symétrique de la portion construite par rapport aux deux axes.

Les dérivées de $x$ et de $y$ par rapport à $\varphi$ sont

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-a^2b^2 \sin\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2},$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{b}\left[\frac{a^5}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^{\frac{5}{2}}} - c\right].$$

Quand $\varphi$ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{dx}{d\varphi}$ est constamment négatif, par suite $x$ décroît de $a$ à 0 ; d'autre part, comme $a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi$ est toujours inférieur à $a^2$, $\frac{dy}{d\varphi}$ est toujours positif, et $y$ croît de 0 à $\frac{a^3 - bc^2}{b^2}$. A ces variations correspond l'arc de courbe AB.




Pour $\varphi = 0$, $\frac{dx}{d\varphi}$ est nul, la tangente au point A est parallèle à $Oy$. Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\frac{dy}{d\varphi}$ est nul, la tangente au point B est parallèle à $Ox$. En achevant par symétrie, on obtient la forme de courbe ci-contre.

J. HAAG et R. BOUVAIST.

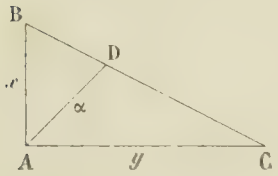
Bonne solution : M. Dnallor Legrand.

---

**1249**. — *Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant la bissectrice de l'angle droit et la somme des surfaces engendrées par l'hypoténuse en tournant autour de chacun des côtés de l'angle droit.*

Désignons par $\alpha$ la longueur de la bissectrice, par $x$ et $y$ les longueurs des côtés de l'angle droit du triangle rectangle cherché. Nous aurons d'abord

$$xy = \alpha^2 + \frac{xy.\overline{BC}^2}{(x+y)^2},$$




BC étant l'hypoténuse du triangle ; or $\overline{BC}^2 = x^2 + y^2$; donc

$$2x^2y^2 = \alpha^2(x+y)^2.$$

L'aire engendrée par l'hypoténuse en tournant autour de AC est $\pi x.BC$, et, en tournant autour de AB, $\pi y.BC$. La somme des deux aires est donc $\pi(BC)(x+y)$, et l'on doit égaler cette somme à une quantité donné $\pi a^2$, ce qui fournit la nouvelle équation

$$(x+y)\sqrt{x^2+y^2} = a^2.$$

Prenons alors pour inconnues $x+y$ et $xy$ ; la première équation nous fournira

$$xy = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x+y),$$

et, en portant cette valeur de $xy$ dans la seconde équation, nous aurons

$$(x+y)^2[(x+y)^2 - \alpha\sqrt{2}(x+y)] = a^4,$$

c'est-à-dire

(1) $$u^4 - \alpha\sqrt{2}u^3 - a^4 = 0,$$

en représentant par $u$ l'inconnue $x+y$.

D'après le théorème de Descartes, cette équation admet une racine positive et une seule, elle admet aussi une racine négative et une seule. La racine positive est seule acceptable. Appelons-la $u$, nous aurons $xy = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} u$ et $x, y$ seront les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - ux + \frac{\alpha u}{\sqrt{2}} = 0. \tag{2}$$

Cette équation admet deux racines positives ou deux racines imaginaires ; si la condition de réalité est remplie, mais seulement dans ce cas, les racines seront acceptables. Nous devons donc avoir

$$u^2 - 2u\alpha\sqrt{2} > 0$$

ou

$$u > 2\alpha\sqrt{2}.$$

Or 0 substitué à $u$ dans l'équation (1) donne le signe —, il faut donc que $2\alpha\sqrt{2}$ substitué à $u$ dans la même équation donne le même signe. La condition d'existence du triangle est ainsi

$$a > \alpha\sqrt[4]{32}.$$

Si $a$ est égal à $\alpha\sqrt[4]{32}$, la valeur de $u$ est égale à $2\alpha\sqrt{2}$, l'équation (2) a une racine double et le triangle est isocèle.

M. THIÉRY, lycée de Nancy.

Bonne solution : M. J. Haag, élève de l'École normale supérieure.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1319.** — On considère une ellipse rapportée à ses axes et une sécante variable M'M'' telle que les coordonnées des points M' et M'', $(x', y')$ et $(x'', y'')$ satisfassent à la relation $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{1}{y'} + \frac{1}{y''}$.

Trouver le lieu du pôle de la droite M'M'' par rapport à l'ellipse. Ce lieu est une courbe du 3e degré que l'on demande de construire.

U. Martin, lycée de Bordeaux.

**1320.** — On donne une ellipse (E) et deux points fixes de son plan, P et Q ; on considère tous les cercles (Ω) qui passent par ces deux points et qui coupent l'ellipse aux points variables M et N ; soit (D) la droite MN, on demande :

1° Le lieu du point d'intersection de la droite (D) avec la polaire du centre de l'ellipse par rapport au cercle (Ω) ;

2° Le lieu du point d'intersection de la droite (D) avec la polaire du centre du cercle (Ω) par rapport à l'ellipse ;

3° Le lieu du point d'intersection de (D) avec la droite qui joint le centre de l'ellipse au centre du cercle ;

4° Le lieu du point de rencontre de (D) avec chacune des droites qui joignent le centre du cercle aux points fixes P et Q ;

5° Le lieu des points de rencontre de (D) avec les tangentes aux cercles (Ω) parallèles à la droite PQ.

U. Martin.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

14e Année. N° 11 Août 1904.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### TRIANGLE INSCRIT DANS UNE CONIQUE ET DONT DEUX CÔTÉS TOUCHENT DEUX AUTRES CONIQUES

par M. **Mathieu Weil**.

Considérons trois coniques faisant partie d'un même faisceau linéaire, et ayant pour équations :

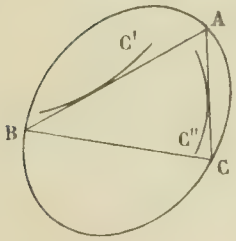
(C) $$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

(C′) $$Ax^2 + By^2 - z^2 = 0,$$

(C″) $$A'x^2 + B'y^2 - z^2 = 0.$$

On aura $$\frac{B-1}{A-1} = \frac{B'-1}{A'-1} = k.$$

Soit un triangle ABC qui se déplace en restant inscrit dans la première conique, pendant que AB touche la seconde conique, et AC la troisième. On sait que l'enveloppe du côté BC est formée de deux coniques du faisceau ; nous nous proposons d'effectuer le calcul qui conduit aux équations séparées de ces deux coniques.




Un point de la conique C est défini par un paramètre $t$ au moyen des formules

$$x = z\,\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = z\,\frac{2t}{1+t^2},$$

et la droite qui joint deux points a pour équation

$$x(1-tt') - y(t+t') - z(1+tt') = 0.$$

Un point de la conique C′ est donné par les formules

$$x\sqrt{A} = z\,\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}, \qquad y\sqrt{B} = z\,\frac{2\theta}{1+\theta^2}.$$

Les valeurs de $\theta$ correspondant aux points où cette conique est coupée par la droite sont données par l'équation

$$\frac{(1-\theta^2)(1-tt')}{\sqrt{A}} + \frac{2\theta(t+t')}{\sqrt{B}} - (1+\theta^2)(1+tt') = 0.$$

La condition pour que la droite touche la conique C′ est donc

$$\frac{(t+t')^2}{B} + \frac{(1-tt')^2}{A} - (1+tt')^2 = 0.$$

ou

(1) $$t^2(1+\lambda x^2) + 2\mu t x + x^2 + \lambda = 0,$$

en posant $$t' = x, \qquad \frac{B-AB}{A} = \lambda, \qquad \frac{A-B-AB}{A} = \mu.$$

Opérant de même pour la conique C″, on aura

(2) $$t^2(1+\lambda' y^2) + 2\mu' t y + y^2 + \lambda = 0,$$

avec des notations analogues.

On a d'ailleurs, en remplaçant B par $1 + k(A - 1)$,

$$A\lambda = (1 - k + kA)(1 - A),$$
$$A(1 - \mu) = (1 - k + kA)(1 + A).$$

Éliminant A, il vient

$$\frac{(1+\lambda)^2 - \mu^2}{4\lambda} = k = \frac{(1+\lambda')^2 - \mu'^2}{4\lambda'}.$$

Nous aurons, en éliminant $t$ entre les équations (1) et (2), la relation entre $x$ et $y$ ($x$ désignant $t'$, et $y$ désignant $t''$), qui définit l'enveloppe du côté BC. Le résultat de l'élimination est

$$\left[2(1 + \lambda x^2)(\lambda' + y^2) + (1 + \lambda' y^2)(\lambda + x^2)\right] - 4\mu\mu' xy\Big]^2$$
$$- \left[4\mu^2 x^2 - 4(1 + \lambda x^2)(\lambda + x^2)\right]\left[4\mu'^2 y^2 - 4(1 + \lambda' y^2)(\lambda' + y^2)\right] = 0,$$

ou bien

$$[(\lambda\lambda' + 1)(x^2 + y^2) + (\lambda + \lambda')(x^2 y^2 + 1) - 2\mu\mu' xy]^2 - 4[\mu^2 x^2 - (1 + \lambda x^2)(\lambda + x^2)][\mu'^2 y^2 - (1 + \lambda' y^2)(\lambda' + y^2)] = 0.$$

Considérons l'expression

$$\mu^2 x^2 - (1 + \lambda x^2)(\lambda + x^2) = (\mu^2 - \lambda^2 - 1)x^2 - \lambda(x^4 + 1).$$

On a
$$\mu^2 - \lambda^2 - 2\lambda - 1 = -4\lambda k,$$
d'où
$$\mu^2 - \lambda^2 - 1 = 2\lambda(1 - 2k) = \lambda h \quad (h = 2 - 4k),$$
de même
$$\mu'^2 - \lambda'^2 - 1 = \lambda' h.$$

Posons $x^2 + y^2 = U$, $xy = z$, l'équation devient

$$[(\lambda\lambda' + 1)U + (\lambda + \lambda')(z^2 + 1) - 2\mu\mu' z]^2 - 4\lambda\lambda' U^2 - hU(z^2 + 1) + (z^2 + 1)^2 + (h^2 - 4)z^2] = 0,$$

ou bien

$$U^2[(\lambda\lambda' - 1)^2 + 2U[(\lambda\lambda' + 1)A + 2h\lambda\lambda'(z^2 + 1)] + A^2 - 4\lambda\lambda'[(z^2 + 1)^2 + (h^2 - 4)z^2] = 0,$$

en écrivant $A = (\lambda + \lambda')(z^2 + 1) - 2\mu\mu' z$.

Cette équation se décompose si la quantité sous le radical est un carré parfait; cette quantité est égale à $4\lambda\lambda' D$,

$$D = (z^2 + 1)^2 \mu^2 \mu'^2 - 2\mu\mu' z(z^2 + 1)[h(\lambda\lambda' + 1) + 2(\lambda + \lambda')] + z^2[(\lambda\lambda' - 1)^2(h^2 - 4) + 4\mu^2\mu'^2].$$

En observant que l'on a

$$\mu^2 = \lambda^2 + 1 + \lambda h,$$
$$\mu'^2 = \lambda'^2 + 1 + \lambda' h,$$

on voit bien que, dans D, le coefficient de $(z^2 + 1)^2$ est $\mu^2\mu'^2$; on voit aussi que D est le carré de

$$(z^2 + 1)\mu\mu' - z[h(\lambda\lambda' + 1) + 2(\lambda + \lambda')].$$

On a donc l'équation des coniques sous la forme

$$(\lambda\lambda' - 1)^2 U^2 = H(z^2 + 1) + Lz.$$

Pour l'une des coniques, on aura

$$H = -(\lambda\lambda' + 1)(\lambda + \lambda') - 2h\lambda\lambda' + 2\mu\mu'\sqrt{\lambda\lambda'},$$
$$L = 2\mu\mu'(\lambda\lambda' + 1) - 2\sqrt{\lambda\lambda'}[h(\lambda\lambda' + 1) + 2(\lambda + \lambda')].$$

Pour l'autre conique, il suffit de changer le signe de $\sqrt{\lambda\lambda'}$.

En remplaçant U et $z$ par leurs valeurs, l'équation de la conique s'écrit

$$\lambda_1(t^2 t'^2 + 1) - 2t t'\mu_1 + t^2 + t'^2 = 0,$$

avec

$$\lambda_1 = -\frac{H}{(\lambda\lambda' - 1)^2}, \qquad \mu_1 = \frac{-L}{2(\lambda\lambda' - 1)^2}.$$

L'équation ponctuelle de la conique est

$$A_1 x^2 + B_1 y^2 - z^2 = 0,$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{B_1}{A_1} - B_1, \qquad \mu_1 = 1 - B_1 - \frac{B_1}{A_1},$$

d'où

$$A_1 = \frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{1 + \lambda_1 - \mu_1}, \qquad 2B_1 = 1 - \lambda_1 - \mu_1.$$

ou

$$A_1 = \left(\frac{\sqrt{\lambda\lambda'}+1}{\sqrt{\lambda\lambda'}-1}\right)^2 \cdot \frac{\mu\mu' + (\lambda-1)(\lambda'-1) - (2+h)\sqrt{\lambda\lambda'}}{\mu\mu' + (\lambda+1)(\lambda'+1) + (2-h)\sqrt{\lambda\lambda'}},$$

$$B_1 = \frac{\mu\mu' + (\lambda-1)(\lambda'-1) - (2-h)\sqrt{\lambda\lambda'}}{2(\sqrt{\lambda\lambda'}-1)^2}.$$

Ces formules, relativement simples, résolvent le problème proposé; les méthodes ordinaires conduisent à des calculs très pénibles.

## ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES (1903).

### Mathématiques.

**1256.** — *On donne la parabole $y^2 = 2px$ rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, et un point de l'axe, A, d'abscisse $a$.*

*On mène par A une sécante coupant la parabole aux points M et N; puis par les points M et N on fait passer un cercle tangent à la parabole: soit Q le point de contact. On demande :*

*1° de trouver le lieu du centre du cercle, quand la sécante MN tournera autour du point A;*

*2° de trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point de rencontre de la sécante MN avec la normale menée à la parabole au point Q.*

*Construire et discuter ces lieux selon les différentes positions du point A sur l'axe de la parabole.*

**1.** Soit $m$ le coefficient angulaire de la sécante MN; comme il existe un cercle passant par les points où la parabole est rencontrée par MN et par la tangente au point Q, le coefficient angulaire de cette tangente est $-m$ et son équation est $y + mx + \frac{p}{2m} = 0$. L'équation du cercle considéré est donc de la forme

$$\lambda(y^2 - 2px) + (y - mx + ma)\left(y + mx + \frac{p}{2m}\right) = 0.$$

et on détermine $\lambda$ en écrivant que le coefficient de $x^2$ est égal à celui de $y^2$. Nous trouvons ainsi $\lambda = -(1+m^2)$, puis en remplaçant $\lambda$ par cette valeur dans l'équation précédente, nous obtenons pour équation du cercle

$$-m^2(x^2+y^2) + x\left[(2p+a)m^2 + \frac{3p}{2}\right] + y\left(\frac{p}{2m} + ma\right) + \frac{pa}{2} = 0.$$

Les coordonnées du centre vérifient les équations

$$-2m^2x + (2p+a)m^2 + \frac{3p}{2} = 0.$$

$$-2m^2y + \frac{p}{2m} + ma = 0.$$

et pour avoir l'équation du lieu de ce point, il suffit d'éliminer $m$ entre ces deux équations.

La première nous donne

$$(1) \qquad m^2 = \frac{3p}{2[2x-2p-a]};$$

d'autre part la deuxième peut s'écrire

$$-4m^3y + p + 2am^2 = 0$$

ou

$$16m^6y^2 = (p+2am^2)^2;$$

il n'y a plus qu'à remplacer dans cette dernière équation $m^2$ par sa valeur (1). Nous trouvons ainsi

$$16y^2 . \frac{27p^3}{8(2x-2p-a)^3} = \left(p + \frac{3pa}{2x-2p-a}\right)^2,$$

ou

$$27py^2 = (2x-2p-a)(x-p+a)^2.$$

Transportons l'origine des coordonnées au point $x = p - a$, $y = 0$, l'équation se simplifie et devient

$$y^2 = \frac{x^2(2x-3a)}{27p}.$$

Cette équation représente une courbe du troisième degré symétrique par rapport à $Ox$, admettant un point double à l'origine et des branches infinies paraboliques parallèles à $Oy$.

Nous en construirons seulement la moitié qui correspond à l'équation

$$y = \frac{x\sqrt{2x-3a}}{\sqrt{27p}},$$

les radicaux étant précédés du signe $+$.

La dérivée de $y$ est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x-a)}{\sqrt{27p(2x-3a)}}.$$

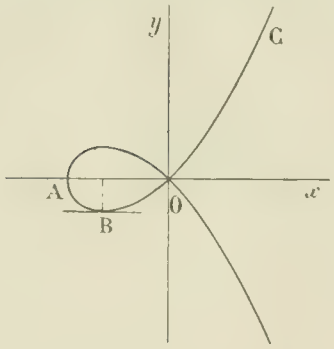
Pour que $y$ soit réel, il faut que $2x - 3a$ soit positif, ou que $x$ soit supérieur à $\frac{3a}{2}$. Comme $x = 0$ est une valeur remarquable correspondant au point double, nous sommes conduits à distinguer les cas suivants.

Premier cas. $a < 0$.

La variation de $y$ est indiquée par le tableau suivant

| $x$ | $\frac{3a}{2}$ | | $a$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dy}{dx}$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $y$ | $0$ | décroît | *min* | croît | $0$ | croît | $+\infty$ |

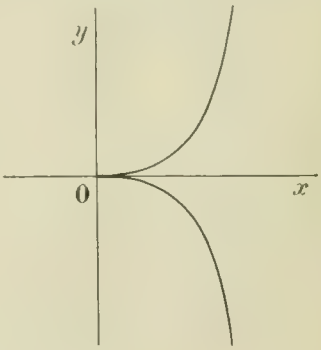
On obtient ainsi la branche de courbe ABOC, et on achève par symétrie par rapport à $Ox$.




Les tangentes au point double ont pour coefficients angulaires $\pm\sqrt{-\frac{3a}{27p}}$.

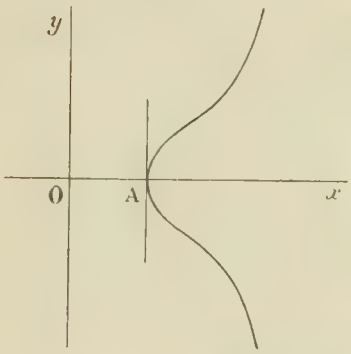
Deuxième Cas. $a = 0$.

On ne peut donner à $x$ que des valeurs positives, $\frac{dy}{dx}$ est constamment positif et quand $x$ croît de $0$ à $+\infty$, $y$ croît également de $0$ à $+\infty$. Comme $\frac{y}{x}$ a pour limite $0$ pour $x = 0$, l'origine est un point de rebroussement dont la tangente est $Ox$.



Troisième Cas. $a > 0$.

Dans ce cas le point double est isolé. Quand $x$ croît de $\frac{3a}{2}$ à $+\infty$, $y$ croît de 0 à $+\infty$. La tangente au point A $\left(x = \frac{3a}{2},\ y = 0\right)$ est parallèle à $Oy$, car le rapport $\frac{y}{x - \frac{3a}{2}}$ croît indéfiniment quand $x$ tend vers $\frac{3a}{2}$.




2. La normale au point Q à la parabole a pour coefficient angulaire $\frac{1}{m}$; par suite l'équation de cette droite est

$$(2) \qquad y = \frac{1}{m}(x - p) - \frac{p}{2m^3}.$$

D'autre part de l'équation de la sécante MN, $y = m(x - a)$, on tire $m = \frac{y}{x - a}$ ou $\frac{1}{m} = \frac{x - a}{y}$. Nous aurons donc l'équation du lieu cherché en remplaçant dans l'équation (2) $\frac{1}{m}$ par $\frac{x - a}{y}$, ce qui nous donne

$$y = \frac{(x - a)(x - p)}{y} - \frac{p(x - a)^3}{2y^3},$$

ou, en chassant les dénominateurs et en transportant l'origine au point $x = a$, $y = 0$,

$$2y^2(y^2 - x^2) + px^3 - 2xy^2(a - p) = 0.$$

Le lieu est donc une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à $Ox$ et admettant un point triple à l'origine.

Pour la construire nous poserons $y = tx$, nous avons

$$x = \frac{2t^2(a - p) - p}{2t^2(t^2 - 1)};$$

il suffira de faire varier $t$ de 0 à $+\infty$, et de prendre la symétrique de la portion de courbe obtenue par rappport à $Ox$.

$x$ devient infini pour $t = 1$ et s'annule pour $t = \sqrt{\frac{p}{2(a - p)}}$; cette valeur n'est réelle que si $a$ est plus grand que $p$. Dans cette dernière hypothèse il est nécessaire de comparer ces deux valeurs de $t$, 1 et $\sqrt{\frac{p}{2(a - p)}}$. La différence $\frac{p}{2(a - p)} - 1$ est égale à $\frac{3p - 2a}{2(a - p)}$; elle est positive si $a < \frac{3p}{2}$ et négative si $a > \frac{3p}{2}$.

Nous aurons donc plusieurs cas à examiner.

En outre la courbe admet une asymptote correspondant à la valeur $t = 1$. Pour déterminer cette asymptote, cherchons la limite de $y - x$ ou de $tx - x$ ou encore $x(t - 1)$ pour $t = 1$. Nous avons

$$y - x = \frac{2t^2(a - p) - p}{2t^2(t + 1)},$$

la limite du second membre est $\frac{2a - 3p}{4}$; par suite, l'équation de l'asymptote est

$$Y - x = \frac{2a - 3p}{4}.$$

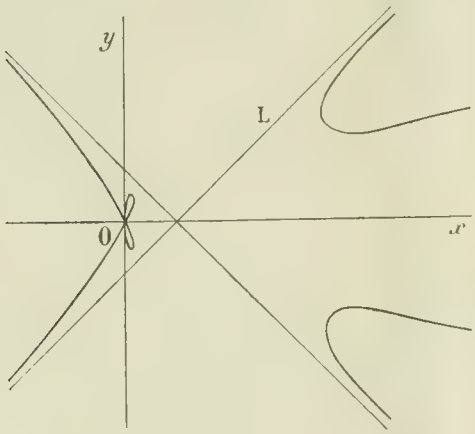
Pour avoir la position de la courbe par rapport à l'asymptote, calculons la différence $y - Y$ ; nous avons

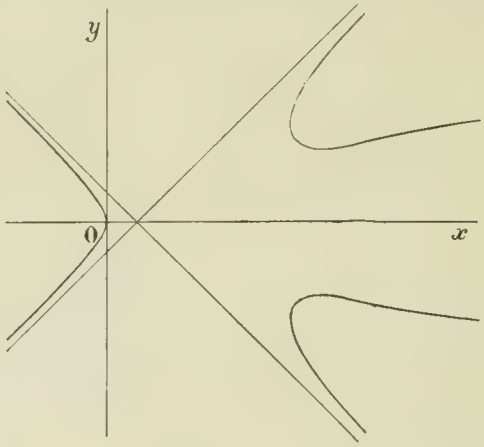
$$y - Y = \frac{2t^2(a-p)-p}{2t^2(t+1)} - \frac{2a-3p}{4},$$

$$= \frac{-t^3(2a-3p)+t^2(2a-p)-2p}{4t^2(t+1)},$$

$$= \frac{(t-1)[-t^2(2a-3p)+2pt+2p]}{4t^2(t+1)}.$$

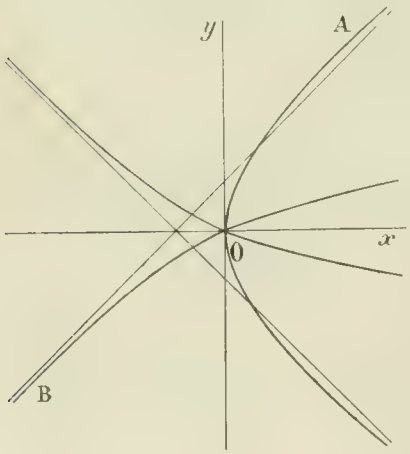
Le trinome $\varphi(t) \equiv -t^2(2a-3p)+2pt+2p$ a deux racines réelles si $a$ est plus grand que $\frac{5p}{4}$, dans ce cas l'asymptote rencontre la courbe en deux points réels à distance finie. De plus, comme




$\varphi(1) = 7p - 2a$, on en conclut que dans les environs de $t = 1$, $y - Y$ a le signe de $(7p-2a)(t-1)$.

Cela étant, rien n'est plus facile que d'avoir les différentes formes de la courbe.




Premier cas. $a < p$.

Le signe et les valeurs remarquables de $x$ sont indiquées dans le tableau suivant

| $t$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $+\infty$ | $+$ | $+\infty$ \| $-\infty$ | $-$ | 0 |

Comme $$y = \frac{2t^2(a-p)-p}{2t(t^2-1)},$$

on voit que pour $t = 0$, $y$ est infini, et pour $t = +\infty$, $y$ est nul.

Pour $a = p$, on a une courbe analogue.

Deuxième cas. $p < a < \frac{3p}{2}$.

| $t$ | 0 | | 1 | | $\sqrt{\frac{p}{(2p-a)}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $+\infty$ | $+$ | $+\infty$ \| $-\infty$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 |

Si $a < \frac{5p}{4}$, l'asymptote ne rencontre pas la courbe, c'est le cas de la figure. Si $a > \frac{5p}{4}$, l'asymp-

tote L rencontre la boucle placée au-dessous de $Ox$ en deux points. Enfin si $a = \frac{5p}{4}$, L est tangente à la boucle.

Si $a = \frac{3p}{2}$, l'équation du lieu s'écrit

$$(y^2 - x^2)(2y^2 - px) = 0,$$

le lieu se décompose en deux droites et une parabole.

TROISIÈME CAS. $\frac{3p}{2} < a < \frac{7p}{2}$.

| $t$ | $0$ | | $\sqrt{\frac{p}{2(a-p)}}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $+\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-\infty$ \| $+\infty$ | $+$ | $0$ |

Si $a > \frac{7p}{2}$, la branche de courbe A est au-dessous de l'asymptote et la branche B au-dessus.

Enfin si $a = \frac{7p}{2}$, les deux branches A et B sont toutes deux au-dessous de l'asymptote. Chaque asymptote rencontre la courbe en un seul point.

Assez bonnes solutions par MM. J. HAAG et GERARD, lycée Janson-de-Sailly.

---

## Physique.

**1257.** — *Un câble est formé d'un conducteur cylindrique de cuivre* A *séparé d'une enveloppe cylindrique en plomb* B *par une matière isolante de capacité inductive* K. *Le conducteur de cuivre a un diamètre* $D_1$. *L'armature cylindrique de plomb, d'épaisseur négligeable, est concentrique au conducteur* A *et a un diamètre* $D_2$. *On établit entre le conducteur* A *et l'enveloppe métallique extérieure* B *une différence de potentiel* $V_0$. *On demande :*

1° *les densités électriques superficielles sur chacune des surfaces métalliques ;*

2° *la différence de potentiel* V *qui existe entre un point situé à la distance* $r$ *de l'axe et un point de la surface du conducteur intérieur ;*

3° *la capacité par unité de longueur de ce câble.*

*Application numérique :* $D_1 = 5^m/_m$, $D_2 = 13^m/_m$.

**1.** — Le potentiel V en un point M est lié au champ F qui agit en ce point par la relation fondamentale

$$dV = -F dr.$$

Les tubes de force entre les deux cylindres ayant la forme de secteurs cylindriques, le champ varie en raison inverse de la distance à l'axe ; si donc $F_1$ désigne, en particulier, le champ dans le voisinage du conducteur A, soit à une distance $r_1$ de l'axe, on a

$$Fr = F_1 r_1.$$

Le champ $F_1$ est lui-même égal à $\frac{4\pi\sigma_1}{K}$, $\sigma_1$ désignant la densité superficielle sur le conducteur A.

On a donc successivement

$$dV = -F_1 \frac{r_1}{r} dr = -\frac{4\pi\sigma_1}{K} \frac{r_1}{r} dr.$$

Intégrons entre $r_1$ et $r_2$, il vient

$$(1) \qquad V_2 - V_1 = -\frac{4\pi\sigma_1}{K} r_1 . \log. \text{nép.} \frac{r_2}{r_1},$$

d'où en remplaçant $V_1 - V_2$ par $V_0$,

$$\sigma_1 = \frac{K}{4\pi r_1} \frac{V_0}{\log.\text{ nép. } \frac{r_2}{r_1}} = \frac{K}{2\pi D_1} \frac{V_0}{\log.\text{ nép. } \frac{D_2}{D_1}} = KV_0 \times 0{,}0767.$$

De même la densité sur le conducteur B est

$$\sigma_2 = \frac{K}{4\pi r_2} \frac{V_0}{\log.\text{ nép. } \frac{r_2}{r_1}} = \frac{K}{2\pi D_2} \frac{V_0}{\log.\text{ nép. } \frac{D_2}{D_1}} = KV_0 \times 0{,}0295,$$

le tout en unités électrostatiques C. G. S.

2. La formule (1), appliquée à un point quelconque, donne en appelant V le potentiel en ce point

$$V - V_1 = -\frac{4\pi\sigma_1}{K} r_1 \log.\text{ nép. } \frac{r}{r_1},$$

ou, en remplaçant $\sigma_1$ par sa valeur

$$V - V_1 = -\frac{\log.\text{ nép. } \frac{r}{r_1}}{\log.\text{ nép. } \frac{r_2}{r_1}} V_0.$$

3. La charge $Q_1$ par unité de longueur est $Q_1 = 2\pi r_1 \sigma_1 = \frac{K}{2} V_0 \frac{1}{\log.\text{ nép. } \frac{r_2}{r_1}}$.

On en déduit $C_1 = \frac{Q_1}{V_0} = \frac{K}{2 \log.\text{ nép. } \frac{r_2}{r_1}} = K \times 1{,}2049$ unités électrostatiques CGS $= K \times 0{,}1339$ microfarads par kilomètre.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1252.** — *On considère les paraboloïdes* S *qui admettent une parabole principale donnée* P.

1° *Lieu des ombilics qui ne sont pas dans le plan de la parabole* P.

2° *Surface engendrée par les hyperboles des paraboloïdes* S *contenues dans leurs plans de Monge. Définir géométriquement cette surface par les sections planes parallèles à l'axe de la parabole* P *et perpendiculaires à son plan.*

3° *Il y a un paraboloïde* S *tangent à un plan* Q. *Lieu du point de contact quand le plan* Q *reste parallèle à un plan donné ou à une direction donnée.*

4° *Mêmes questions si le plan* Q *passe par une droite fixe ou par un point fixe. Étudier les cas de décomposition de la surface trouvée dans le dernier cas.*

Prenons pour axe des $x$ l'axe de la parabole P, pour axe des $y$ la tangente au sommet et pour axe des $z$ la normale au plan de cette parabole. Les équations de cette parabole seront

$$y^2 - 2px = 0, \qquad z = 0.$$

L'équation générale des paraboloïdes S est

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{\lambda} = 2x.$$

$\lambda$ étant un paramètre arbitraire.

1. Les plans cycliques de cette quadrique sont fournis par l'équation

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{\lambda} - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

S prenant successivement pour valeurs les valeurs $0$, $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{\lambda}$ des racines de l'équation en S. Pour $S = 0$, on trouve une solution impropre, les plans directeurs du paraboloïde ; pour $S = \frac{1}{p}$, on trouve

$$z^2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{p}\right) - \frac{x^2}{p} = 0 ;$$

ce sont justement les plans cycliques perpendiculaires au plan de l'autre parabole principale que P, ceux dont les ombilics ne sont pas situés dans le plan de la parabole P. La racine $S = \frac{1}{\lambda}$ donnerait les plans cycliques perpendiculaires au plan de la parabole P.

Par conséquent, les ombilics cherchés sont sur les diamètres conjugués des plans

$$(p - \lambda)z^2 - \lambda x^2 = 0 ;$$

ces plans ont pour équations respectives

$$z\sqrt{p - \lambda} + x\sqrt{\lambda} = 0$$

et

$$z\sqrt{p - \lambda} - x\sqrt{\lambda} = 0 ;$$

ils sont donc représentés tous deux par l'équation $z\sqrt{p - \lambda} - x\sqrt{\lambda} = 0$, dans laquelle les deux radicaux ont le double signe. Le diamètre conjugué de ce plan a pour équations

$$\frac{l}{u} = \frac{l}{v} = \frac{l}{w},$$

ou, dans le cas actuel,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{y}{0} = \frac{z}{\lambda\sqrt{p - \lambda}} ;$$

par suite, les équations du diamètre sont $y = 0$ et $z = \frac{\lambda\sqrt{p - \lambda}}{\sqrt{\lambda}}$. Le lieu des ombilics est donc dans le plan $y = 0$, ce qui est évident a priori, et l'on trouve son autre équation en éliminant $\lambda$ entre l'équation de la seconde parabole principale, $z^2 - 2\lambda x = 0$, et celle que l'on vient d'obtenir ; on trouve ainsi

$$4x^2 + z^2 - 2px = 0.$$

Le lieu demandé est donc l'ellipse dont les équations sont

(1) $$4x^2 + z^2 - 2px = 0 \quad \text{et} \quad y = 0.$$

2. Le plan de Monge du paraboloïde a pour équation $x + \frac{\lambda + p}{2} = 0$ ; nous aurons l'équation de la surface engendrée par l'intersection du paraboloïde et du plan de Monge en éliminant $\lambda$ entre les deux équations ; celle du plan donne $\lambda = -2x - p$, et, en portant cette valeur dans l'équation du paraboloïde, nous avons

(2) $$(2x + p)(y^2 - 2px) - pz^2 = 0.$$

C'est l'équation de la surface cherchée. Cette surface est une surface cubique symétrique par rapport aux plans des $xy$ et des $xz$, coupant le plan des $xy$ suivant la parabole P et la directrice de cette parabole ; elle coupe le plan des $yz$ suivant une droite à l'infini et les deux bissectrices de l'angle $yOz$, et enfin, le plan des $zx$ suivant l'ellipse

(E) $$4x^2 + z^2 + 2px = 0,$$

symétrique de celle que nous avons trouvée par rapport à $Oz$.

La section par le plan $y = k$ a pour équation

$$4x^2 + z^2 + 2px - \frac{k^2}{p}(2x + p) = 0 ;$$

c'est une ellipse homothétique à (E) ayant toujours un de ses axes situés dans le plan des $xy$ et dont les sommets décrivent, l'un, la parabole P, l'autre, la directrice de cette parabole. Avec ces indications, rien n'est plus aisé que de construire une quelconque des sections faites par un plan parallèle au plan des $zx$.

3. L'équation tangentielle de S est $pv^2 + \lambda w^2 - 2ur = 0$ ; elle est du premier degré en $\lambda$, donc il y a un paraboloïde et un seul tangent au plan Q, de coordonnées $u$, $v$, $w$, $r$. Pour avoir le point de contact, il faut joindre l'équation de ce plan à celles du diamètre de ce plan ; on trouve ainsi

$$-\frac{1}{u} = \frac{y}{pv} = \frac{z}{\lambda w},$$

et

$$ux + vy + wz + r = 0.$$

On aura le lieu en éliminant $\lambda$ et $r$ entre ces trois équations et la condition de contact ; ce calcul donne les deux équations

$$(3) \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{pv}{u}, \\ 2u(ux + vy + wz) - uwz + pv^2 = 0. \end{cases}$$

Ce sont les équations d'une droite parallèle au plan des $zx$.

Si le plan Q reste parallèle à une direction fixe seulement $(\alpha, \beta, \gamma)$, les paramètres $u$, $v$, $w$ sont liés par une relation $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$, et le lieu sera engendré par la droite (3) quand $u$, $v$, $w$ varient en vérifiant la relation précédente. Le lieu est donc une surface réglée dont on obtiendra l'équation en éliminant $u$, $v$, $w$ entre les trois équations rappelées ; la première donne $u = p$, $v = -y$, la dernière donne $w = \dfrac{\beta y - p\alpha}{\gamma}$, et l'équation cherchée est

$$(4) \qquad \gamma(y^2 - 2px) - (\beta y - p\alpha)z = 0.$$

C'est l'équation d'un paraboloïde hyperbolique ayant pour plans directeurs le plan $y = 0$ et le plan $\gamma y - \beta z = 0$ ; il était certain à l'avance que le lieu serait une surface réglée ayant pour plan directeur le plan des $zx$. Ce paraboloïde contient aussi la parabole P.

4. Nous allons modifier un peu la méthode suivie dans le paragraphe précédent, en ne faisant pas intervenir d'une façon directe le plan Q.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma)$ et $(\alpha', \beta', \gamma')$ deux points de la droite fixe donnée ; les points de contact des plans tangents au paraboloïde $\lambda$ menés par cette droite sont sur la droite polaire de cette droite, c'est-à-dire sur l'intersection des plans polaires des deux points donnés

$$\frac{\beta y}{p} - \frac{\gamma z}{\lambda} - x - \alpha = 0,$$

$$\frac{\beta' y}{p} + \frac{\gamma z}{\lambda} - x - \alpha' = 0.$$

Le lieu s'obtiendra en éliminant $\lambda$ ou $\dfrac{1}{\lambda}$ entre l'équation du paraboloïde et ces deux-ci. En éliminant $\lambda$ entre la première et la seconde, on a

$$(5) \qquad \gamma(y^2 - 2px) + z(px - \beta y + p\alpha) = 0.$$

C'est l'équation d'un hyperboloïde qui contient la parabole P.

En éliminant $\lambda$ entre les deux dernières, on trouve l'équation d'un plan

$$(6) \qquad (\beta\gamma' - \gamma\beta')y - p[(\gamma' - \gamma)x + \alpha\gamma' - \gamma\alpha'] = 0.$$

Dans le premier cas, le lieu demandé est donc une conique, la conique représentée par les équations (5) et (6).

Dans le second cas, quand le plan est astreint seulement à passer par un point fixe $(\alpha, \beta, \gamma)$, le lieu est l'hyperboloïde (5).

Il nous reste maintenant à étudier les équations (5) et (6), afin de donner la nature exacte de chacun des lieux.

L'équation (5) est linéaire en $z$, donc il faut la résoudre par rapport à $z$ et chercher la nature de l'intersection du cylindre parabolique $y^2 - 2px = 0$ par le plan asymptote $px - \beta y + p\alpha = 0$ relatif à la direction $Oz$ : en éliminant $px$ on trouve une équation du second degré en $y$

$$y^2 - 2\beta y + 2p\alpha = 0 ;$$

ses racines sont réelles si $\beta^2 - 2p\alpha > 0$, c'est-à-dire si le point donné est à l'extérieur du cylindre parabolique, et alors la surface est un hyperboloïde à une nappe ; si $\beta^2 - 2p\alpha < 0$, c'est un hyperboloïde à deux nappes, et si $\beta^2 - 2p\alpha = 0$, c'est un cône.

Quant au plan (6) il est parallèle à $Oz$ et le plan mené parallèlement par l'origine contient une génératrice $Oz$, du cône directeur ; il en contient en général une autre, différant de $Oz$ ; donc la section plane de l'hyperboloïde est une hyperbole en général ; ce ne sera une parabole que si le plan de section est tangent au cône directeur, c'est-à-dire si le plan

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')y - p(\gamma' - \gamma)x = 0$$

coïncide avec le plan

$$\beta\gamma - px = 0 ;$$

ceci donne la condition

$$\beta\gamma' - \gamma\beta' - \beta(\gamma' - \gamma) = 0$$

ou

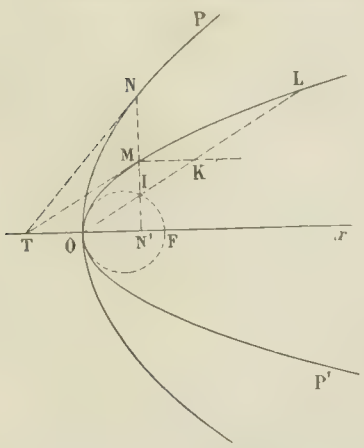
$$\gamma(\beta - \beta') = 0.$$

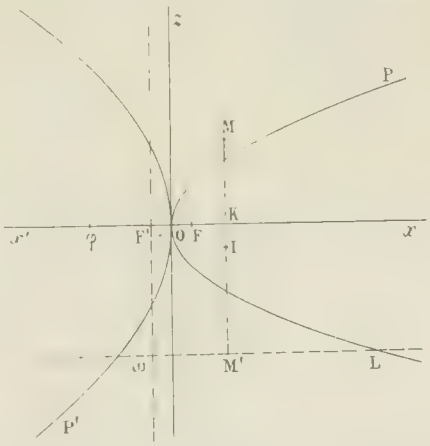
On peut évidemment toujours supposer $\gamma \neq 0$ ; la condition se réduit donc à $\beta - \beta' \neq 0$, ce qui signifie que la droite donnée est parallèle au plan des $zx$. C'est donc seulement dans ce cas que la section plane de l'hyperboloïde est une parabole.

S'il s'agit d'un point donné seul $(\alpha, \beta, \gamma)$, il n'y a plus aucune hypothèse à faire sur ses coordonnées. On voit de suite que pour $\gamma = 0$, la surface (5) se décompose en deux plans $z = 0$ et $px - \beta y + p\alpha = 0$. Comme on s'en assure aisément, il n'y a pas d'autre cas de décomposition. La vraie solution dans ce cas, est d'ailleurs le second plan, qui est le plan polaire fixe du point $(\alpha, \beta, \gamma)$ par rapport à tous les paraboloïdes du faisceau.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist ; Feuchot, lycée de Dijon.

**Remarques géométriques.** — **1.** Toutes les surfaces S admettront comme plans principaux le plan de P et le plan perpendiculaire à celui-ci et passant par l'axe de P. La deuxième parabole principale sera située dans ce dernier plan et admettra même axe et même sommet que P. Ceci étant, prenons pour plan de figure le plan de cette deuxième parabole principale P′ et figurons dans ce plan la parabole P′ et la parabole P après une rotation de 90° autour de son axe. On sait que le paraboloïde S correspondant peut être engendré par une parabole égale à P qui se déplace parallèlement à elle-même, son sommet décrivant P′. Ceci étant, soit M un ombilic non situé dans le plan de P. C'est un point de P′ tel que



OL, corde parallèle à la tangente MT en M, soit égale au segment déterminé par S sur la perpendiculaire au plan de P′ menée par K, milieu de OL. Or ce segment est égal à la corde de P, passant par N′, tel que $ON' = MK = OT$, et perpendiculaire à $Ox$. Cette corde est donc la droite projetant M sur $Ox$. Soit I le point de rencontre de cette droite avec le cercle de diamètre OF, situé du même côté que M par rapport à $Ox$. Nous avons les égalités suivantes :

$$\overline{MN'}^2 = \overline{MT}^2 - \overline{TN'}^2 = \overline{NN'}^2 - 4\overline{ON'}^2 = 4OF.ON' - 4\overline{ON'}^2 = 4ON'.N'F = 4\overline{IN'}^2,$$

ou

$$MN' = 2IN'.$$

Le lieu du point M est donc une ellipse E de petit axe OF et dont la longueur du grand axe est égale à 2OF.

**2.** Etudions maintenant la surface engendrée par les hyperboles des paraboloïdes S situés dans leurs plans de Monge. Reprenons la figure précédente, mais en plaçant P′ de l'autre côté que P par rapport à $Oz$, pour obtenir des points réels de la surface. Soit $\varphi$ le foyer de P′, F celui de P, F′ω la directrice de P. Cherchons la section de la surface par le plan parallèle à $Oz$ et dont la trace sur le plan de P est rabattue sur le plan de la figure suivant ωL. Soit M l'un des points de la section correspondant à P′. Ce point se trouve évidemment sur la parabole égale à P′, d'axe Lω et de sommet L. On a donc

$$\overline{MM'}^2 = 4O\varphi.LM'.$$

Or

$$O\varphi + OF = -OK.$$

Donc

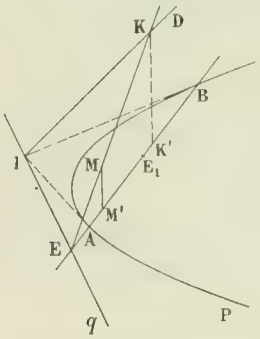
$$O\varphi = -(OK + OF) = OF' - OK = KF'.$$

Par suite,

$$\overline{MM'}^2 = 4LM'.M'\omega = 4\overline{IM'}^2,$$

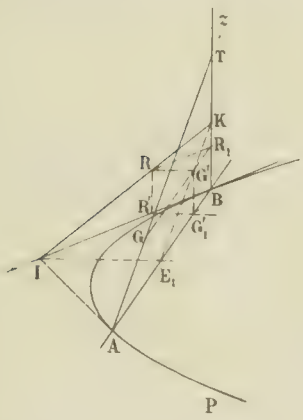
I désignant le point de rencontre de MM′ avec le cercle de diamètre ωL, situé du même côté que M de ωL. Quand $\varphi$ décrit $Ox'$, M décrit donc avec son symétrique par rapport à ωL une ellipse de petit axe ωL et dont la longueur du grand axe est égale à 2ωL. Si on fait varier maintenant ωL, on voit que la surface que nous nous proposions d'étudier peut être engendrée par une ellipse qui se déplace et varie en restant homothétique à E et de façon que les sommets de son petit axe décrivent l'un P, l'autre la directrice de P. Cette surface est d'ailleurs du 3e ordre, comme sa section par le plan de P, laquelle se compose de P et de sa directrice Dans la figure précédente, on vérifie aisément que l'ellipse trouvée passe par O, en tenant compte de ce que L est sur P. On en conclut que les bissectrices de l'angle $yOz$ appartiennent à la surface.

**3 et 4.** — Les surfaces S font partie d'un faisceau tangentiel défini par la parabole P et un point double à l'infini dans la direction $Oz$. Il en résulte qu'il y a une seule de ces surfaces tangente à un plan donné Q. Supposons que le plan Q tourne autour d'une droite donnée D. Cherchons le lieu du point de contact. On sait que le lieu des pôles d'un plan Q par rapport à un faisceau tangentiel de quadriques est une droite, passant par le point de contact de Q avec la quadrique du faisceau tangente à ce plan. Dans le cas actuel, cette droite sera parallèle à $Oz$ et passera par le pôle M′ de la trace $lq$ de Q sur le plan de P, par rapport à P. Le point de contact M du plan Q avec la surface S qui lui est tangente est donc le point d'intersection de cette droite avec la droite KE d'intersection de Q avec le plan polaire de I par rapport au cylindre C de base P et de génératrices parallèles à $Oz$. Or, lorsque Q tourne autour de D, ce plan polaire reste fixe, ainsi que K. M′ décrit AB. D'autre part, on voit aisément que les faisceaux de droites KM et M′M sont homographiques. Donc le lieu du point M est une hyperbole du plan ABK passant par K et le point à l'infini dans la direction $Oz$. On a les tangentes en ces points en cherchant les rayons correspondants au rayon KK′ dans les deux faisceaux. En particulier, on obtient l'asymptote parallèle à $Oz$ qui a pour trace sur AB le point K″ conjugué harmonique de K′ par rapport à AB. On en conclut en passant que pour que l'hyperbole se décompose, il faut et suffit que K′ et K″ coïncident entre eux et par suite avec l'un des points A et B, ce qui exige que D soit tangente à C. La deuxième direction asymptotique de l'hyperbole est la direction du rayon KM correspondant au cas où M′ est à l'infini, et par suite E en $E_1$, milieu de AB. $KE_1$ est donc parallèle à la deuxième asymptote. Remarquons enfin que l'hyperbole passe par les points A et B. Il en résulte que lorsque celle-ci se décompose, elle donne la génératrice de contact BK de C avec le plan tangent à C mené par D et la parallèle à $KE_1$ menée par A. Celle-ci est d'ailleurs le véritable lieu, car la première droite correspond au cas particulier où S se réduit à C. Lorsque D est à l'infini, c'est-à-dire lorsque les plans Q restent parallèles à un plan donné, on se trouve dans un cas de décomposition et le lieu est alors une droite



parallèle aux plans diamétraux de C. — Pour que le lieu soit une parabole, il faut et il suffit que K′ tombe en $E_1$, c'est-à-dire que (D) soit parallèle aux plans diamétraux de C.

Cherchons maintenant le lieu des points M lorsque Q tourne autour d'un point fixe R. Pour cela, nous pouvons évidemment supposer qu'il tourne successivement autour des droites passant par R et situées dans un plan quelconque, un plan tangent RKB mené par R à C, par exemple. Le lieu cherché sera alors la surface engendrée par la droite AT homothétique de $KE_1$ par rapport à B et dans le rapport 2, lorsque IK tourne autour de R. Or cette droite s'appuie constamment sur $Bz$. Nous allons montrer qu'elle s'appuie également sur la droite $\Delta$ intersection du plan parallèle à celui de P mené par R avec le plan diamétral conjugué du deuxième plan tangent à C issu de R. En effet, on a sur la figure




$$\frac{BG'_1}{BE_1} = \frac{KG'}{KE_1} = \frac{KR_1}{KB} = \frac{KR}{KI} = \frac{BR'}{BI}.$$

Donc $R'G'_1$ est parallèle à l'axe de P. Il en est de même de RG′. Or le lieu de G est l'homothétique du lieu de G′ par rapport à $R_1$ dans le rapport 2. G décrit donc une droite qui est bien $\Delta$. On vérifie aisément que les points T et G se correspondent homographiquement. GT décrit donc une quadrique réglée, qui contient P et $Bz$. En considérant l'autre plan tangent mené par R à C, on aura le deuxième système de génératrices. Tant que R sera à distance finie, cette quadrique sera un hyperboloïde à une nappe. Si R est à l'infini, c'est-à-dire si Q reste parallèle à une direction donnée, le lieu sera un paraboloïde hyperbolique. Si R est en K sur C, le lieu est le cône de sommet T et de base P. Enfin si R est en T dans le plan de P, la quadrique se décompose en deux plans, le plan $ABz$ et le plan de P, lequel est d'ailleurs obtenu dans le cas particulier où S se réduit à deux fois ce plan. On montre d'ailleurs aisément que ce cas de décomposition est unique.

J. HAAG, élève de l'Ecole normale supérieure.

---

**1254**. — *Par le sommet d'une strophoïde droite et par un point quelconque pris sur la courbe, on peut mener deux cercles tangents à la strophoïde ; le cercle passant par le sommet et les contacts enveloppe une cissoïde droite.*

Soit

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$

l'équation de la strophoïde rapportée à son axe de symétrie et à la perpendiculaire menée par le point double. Si nous posons $y = tx$, nous avons de suite les équations paramétriques de cette courbe

$$x = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{at(1 - t^2)}{1 + t^2}.$$

Le sommet a pour coordonnées $a$ et 0, le $t$ de ce point est 0; les $t$ du point double sont 1 et $-1$ ; enfin les $t$ des points à l'infini sont $\infty$, $i$ et $-i$.

Cela posé, soit

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \gamma = 0$$

l'équation d'un cercle quelconque ; si nous cherchons les $t$ des points de rencontre de ce cercle avec la strophoïde, nous avons une équation du quatrième degré en $t$

$$a^2(1 - t^2)^2 - 2a(\alpha + \beta t)(1 - t^2) + \gamma(1 + t^2) = 0,$$

ou (1) $$a^2t^4 + 2a\beta t^3 + (2a\alpha - 2a^2 + \gamma)t^2 - 2a\beta t + a^2 - 2a\alpha + \gamma = 0,$$

et nous voyons de suite que les racines de cette équation sont liées par la relation

$$\Sigma t_1 = -\Sigma t_1 t_2 t_3,$$

ou

$$\Sigma t_1 + \Sigma t_1 t_2 t_3 = 0.$$

Or le cercle doit passer au sommet de la strophoïde ; donc l'une des valeurs de $t$ est nulle, $t_4$, par exemple, et la relation se réduit à

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3 = 0.$$

Soit alors $\lambda$ le paramètre du point de la strophoïde par lequel le cercle est mené, les deux autres paramètres des points de rencontre du cercle du faisceau avec la strophoïde sont liés par la relation

$$t_1 + t_2 + \lambda + \lambda t_1 t_2 = 0.$$

Pour que le cercle soit tangent à la strophoïde, il faudra que $t_1 = t_2$; donc les paramètres des points decontact sont fournis par l'équation du second degré

$$(2) \qquad \lambda t^2 + 2t + \lambda = 0;$$

il y a deux solutions, donc deux cercles répondant à la question.

Pour que les points de contact soient sur un cercle passant au sommet, et de coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, il faudra que l'équation (1) ait pour racines 0 et aussi les deux racines de (2).

Nous aurons donc déjà

$$a^2 - 2a\alpha + \gamma = 0,$$

ou

$$\gamma = 2a\alpha - a^2,$$

puis,

$$at^3 + 2\beta t^2 + (4\alpha - 3a)t - 2\beta \equiv (\lambda t^2 + 2t + \lambda)(pt + q).$$

Le calcul d'identification est facile et donne successivement

$$p = \frac{a}{\lambda}, \qquad q = -\frac{2\beta}{\lambda},$$

$$\alpha = a - \frac{a}{2\lambda^2}, \qquad \beta = \frac{a}{2\lambda}$$

et

$$\gamma = a^2\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Le cercle cherché est donc

$$x^2 + y^2 - 2\left(a - \frac{a}{2\lambda^2}\right)x - \frac{a}{\lambda}y + a^2\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) = 0.$$

Nous aurons l'enveloppe de ce cercle en écrivant que l'équation du second degré en $\frac{1}{\lambda}$ a une racine double, ce qui donne

$$(3) \qquad ay^2 - 4(x - a)(x - a)^2 + y^2 = 0.$$

C'est l'équation d'une cubique circulaire ayant pour point double le point $(a, 0)$. En portant les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, l'équation devient

$$4x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0,$$

et l'on reconnaît là l'équation d'une cissoïde droite.

PARROD et J. HAAG.

Bonnes solutions : MM. J. Roda, à Toulouse ; X, à Dijon ; L. Michel ; G. Dulimbert, à Grenoble, Dnallor Lecram.

**Solution géométrique.** — Dans le numéro d'Août 1903 de la Revue, j'ai démontré le théorème suivant :

*Par un point M pris sur une strophoïde droite on peut mener à cette courbe deux tangentes, et la droite joignant les points de contact enveloppe une parabole dont le sommet coïncide avec celui de la strophoïde et dont le foyer est le symétrique du point double par rapport au sommet commun.*

Transformant par inversion ce théorème en prenant pour pôle le sommet de la strophoïde et pour puissance d'inversion le carré de la distance du sommet au point double, (dans ces conditions la strophoïde se transforme en elle-même), on obtient la proposition à démontrer.

R. BOUVAIST.

Bonnes solutions : MM. J. Haag, élève de l'Ecole normale supérieure ; M. Thiéry, lycée de Nancy ; X. à Dijon.

## CONCOURS DE 1904 (*Suite*).

### AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

*Mathématiques élémentaires.* (*)

On donne, dans un plan, deux points A et A′ et une droite D menée par A ; un cercle variable Γ, situé dans ce plan, passe constamment par A et A′. Autour du point variable M où ce cercle rencontre D, on fait tourner la tangente en ce point à Γ d'un angle donné $\alpha$ dans le plan orienté ; soit Δ la droite ainsi obtenue.

1° La droite Δ rencontre Γ en un point M′ autre que M ; le lieu des points M′ est une droite D′ que l'on construira.

Trouver le lieu géométrique de la projection orthogonale du point A′ sur Δ.

2° Démontrer que le lieu géométrique du pôle P de Δ par rapport à Γ est une droite $d$.

3° Soit $d_1$ une droite donnée dans le plan ; chercher si cette droite peut être regardée comme lieu $d$ du point P, en choisissant convenablement la droite D et l'angle $\alpha$.

4° Trouver l'enveloppe de $d$ lorsque D tourne autour du point A, l'angle $\alpha$ restant constant.

5° Soit T le triangle dont les sommets sont le point P et les points de rencontre de Δ avec Γ : étudier le déplacement du cercle circonscrit à ce triangle.

(*4 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

*Mathématiques spéciales.*

**1321.** — On donne un cylindre défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y^2 - 2px = 0$$

et un plan dont l'équation est

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

1° Calculer les coordonnées du sommet S de la parabole section du cylindre par le plan. Trouver la courbe C lieu géométrique de ce sommet quand $\lambda$ varie, $a$ et $b$ restant fixes. Montrer que cette courbe possède en général deux points doubles et peut être placée sur deux cônes du troisième ordre.

2° On considère la courbe particulière C′ obtenue en posant

$$a = 1, \qquad b = 0.$$

Quelles sont les relations qui existent entre les valeurs de $\lambda$ qui correspondent aux points de rencontre de C′ avec un plan arbitraire ?

Discuter la réalité des points de rencontre de cette courbe avec un plan osculateur quelconque.

3° Démontrer que, par toute droite tangente en un point A à C′, on peut mener trois plans qui lui soient tangents chacun en un point autre que A ; réalité de ces plans.

Les plans bitangents à la courbe C′ se partagent en deux familles ; démontrer que les plans de l'une des familles sont tangents au cylindre parabolique et ceux de l'autre famille tangents à une surface du second ordre dont on déterminera le genre.

(*5 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

*Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.*

On donne deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$ ; un point C de l'axe $Oy$, d'ordonnée positive $h$ est le centre d'une circonférence de rayon R située dans le plan $xOy$. Une droite AB, de longueur constante $a$, se déplace de façon que son extrémité A reste sur l'axe $Ox$ et son extrémité B sur la circonférence. On suppose

$$R > h \qquad \text{et} \qquad a > R + h.$$

Soient $\xi$ l'abscisse variable du point A, et $\varphi$, $\theta$ les angles que font respectivement les directions AB et CB avec la direction $Oy$. Soient en outre $\lambda$ et $t$ les valeurs respectives de $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ et de $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

1° Les paramètres $\xi$, $\lambda$ et $t$ satisfont à des relations de la forme

$$\frac{d\xi}{\sqrt{P(\xi)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{Q(\lambda)}} = \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}.$$

(*) Des solutions étudiées de la question de Mathématiques élémentaires sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

où $P(\xi)$, $Q(\lambda)$, $R(t)$ sont trois polynomes du quatrième degré respectivement en $\xi$, en $\lambda$ et en $t$, à coefficients constants. Former ces relations et en déduire les expressions de $\xi$, $\lambda$ et $t$ en fonctions elliptiques d'un paramètre $u$, à l'aide des fonctions $sn$, $cn$, $dn$ de Jacobi. On fera en sorte que, dans ces expressions, à la valeur $u = 0$ corresponde la plus grande valeur que peut prendre $\xi$, lorsque les éléments géométriques de la figure sont tous réels. On discutera les formules obtenues.

2° Exprimer en fonction de $u$ la surface du triangle ABC et le rapport des vitesses des points A et B dans le mouvement de AB.

3° Soient $\Gamma$ la courbe enveloppe de AB et M le point de contact de AB avec cette enveloppe. Démontrer que la différentielle de l'arc $s = M_0M$ de la courbe $\Gamma$, compté à partir d'un certain point fixe $M_0$, est donnée par la formule

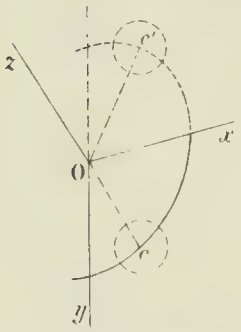
$$ds^2 = (da_1 - \sin\varphi d\xi)^2,$$

où $a_1$ désigne le segment AM estimé positivement dans le sens AB. Déduire de là l'expression de $s$ en fonction de $u$.

(*6 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

*Mécanique rationnelle.*

Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangulaire dont le sommet O est fixe. Le point O est le centre d'un anneau formé par une tige circulaire infiniment mince, sans masse, placée dans le plan $xOy$ et invariablement liée à ce plan. Deux sphères massives, homogènes, identiques, ayant leurs centres $c$ et $c'$ sur la tige, sont traversées par elle et ne peuvent ainsi que glisser le long de l'anneau; elles sont en outre assujetties, par certaines liaisons, à rester symétriques par rapport à l'axe $Ox$. On suppose d'ailleurs que ces liaisons sont sans frottement et qu'il en est de même du glissement des sphères sur l'anneau. Enfin, aucune force extérieure n'agit sur le système ainsi constitué.




1° Former les équations différentielles qui déterminent la rotation instantanée du trièdre $Oxyz$ et l'angle $u$ que font avec $Ox$ les droites $Oc$ et $Oc'$. Indiquer ensuite comment, en supposant ces équations intégrées, on pourra calculer les angles d'Euler qui définissent la position du trièdre relativement à des axes fixes convenablement choisis et comment aussi on peut calculer les forces de liaison qui agissent sur chacune des sphères, regardée comme libre.

2° A un certain moment, on introduit brusquement une liaison nouvelle qui fixe invariablement les deux sphères à la tige: déterminer les variations de vitesse qui peuvent se produire, ainsi que les percussions de liaison que subit à ce moment chacune des sphères.

3° La liaison brusquement introduite étant supposée persistante, former les nouvelles équations différentielles du mouvement du système. Admettons en outre qu'à l'instant de la percussion l'angle $u$ était égal à $\frac{\pi}{4}$, étudier complètement ce mouvement; puis trouver un point de l'anneau tel que si, à une époque ultérieure donnée, on fixe brusquement ce point, le système soit subitement et tout entier immobilisé.

Nota. — On appellera $a$ le rayon de l'anneau, $b$ et $m$ le rayon et la masse de chacune des sphères.

(*7 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

## BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DES SCIENCES

### Sciences mathématiques.

**1322.** — On considère la courbe (C) dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

1° Soit A celui des points d'inflexion de cette courbe dont l'abscisse est négative. Entre quelles limites le coefficient angulaire $m$ d'une sécante menée par le point A doit-il être compris pour que cette sécante rencontre la courbe (C) en deux points réels A', A'' autres que le point A? Comment sont placées, par rapport à la courbe (C), les droites limites entre lesquelles la sécante doit être comprise?

2° On mène par le point A une tangente à la courbe (C), en un point B, autre que le point A: évaluer l'aire comprise entre la droite AB et la courbe.

3° Quel est le lieu (D) du milieu des deux points A', A'', quand la sécante tourne autour du point A? On ne figurera que la partie du lieu qui correspond à des points d'intersection réels, et on déterminera les coordonnées des points communs aux courbes (C) et (D).

(*21 juin, de 8 h. à midi.*)

### Sciences physiques.

*Physique.*

I. Description et usage du spectroscope.

II. — **1323**. — Un tube vertical de 300 mètres de haut renferme de l'air à une température uniforme de 20 degrés. On demande de donner l'expression numérique du rapport des pressions en bas et en haut de cette colonne.

On admettra que l'air obéit rigoureusement à la loi de Mariotte et que l'intensité de la pesanteur a la valeur constante 981 en tous les points de la colonne.

*Chimie.*

I. Préparation et propriétés de l'acide azoteux et des azotites.

II. **1324**. Un mélange de chlorure, bromure et iodure de potassium secs pèse $6^{gr},275$. On demande la composition de ce mélange étant donnés les résultats suivants :

On dissout ce mélange dans l'eau et on partage cette dissolution en deux parties égales A et B. Dans la partie A on verse de l'azotate d'argent jusqu'à précipitation complète. Le précipité recueilli et desséché pèse $5^{gr},2075$.

On chauffe la partie B avec de l'eau de brome et on continue l'ébullition jusqu'à ce que l'excès de brome ait disparu ; on précipite par l'azotate d'argent la liqueur ainsi obtenue et on recueille le précipité dont le poids est $4^{gr},9725$.

*(22 juin, de 8 h. à midi.)*

## ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

### Épure.

On prendra comme origine O le centre de la feuille, comme axe des $x$ le grand axe de la feuille.

On donne les points

$(\omega)$ $\qquad x = -5, \qquad y = 0;$

$(\alpha)$ $\qquad x = -5, \qquad y = 6,$

et l'on construit le triangle équilatéral $\alpha\beta\gamma$ ayant pour centre $\omega$ et pour sommet $\alpha$.

Les points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, sont les pieds des axes verticaux de trois paraboloïdes de révolution dont les sommets et les foyers ont respectivement pour cotes 16 et 15.

Représenter en projection horizontale seulement, le système des trois paraboloïdes solides et de même substance, en ne conservant de cet objet que la région au-dessus du plan horizontal supposé opaque et illimité.

Ombres de ce système, les rayons lumineux étant inclinés à 45° sur le plan horizontal et parallèles en projection horizontale à $O\omega$, de façon que l'ombre sur le plan horizontal soit à droite.

Calculer les coordonnées des points brillants sur les trois paraboloïdes.

*(21 juillet, de 8 h. à midi.)*

## QUESTION PROPOSÉE

**1325**. — On donne une ellipse E et un point P dans son plan.

1° Trouver le nombre des cercles osculateurs à l'ellipse et tels que chacune des cordes communes à ces cercles et à l'ellipse passe par P.

2° Trouver, pour chacune des positions de P, combien de ces cercles sont réels.

3° Démontrer que les points de contact de l'ellipse et de ces cercles sont sur un même cercle C.

4° Enveloppe $\Gamma$ des cercles C, quand D décrit l'ellipse donnée.

5° La courbe $\Gamma$ peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent orthogonalement un cercle fixe et dont les centres sont sur une conique fixe. De combien de manières différentes la courbe $\Gamma$ est-elle susceptible de ce mode de génération ?

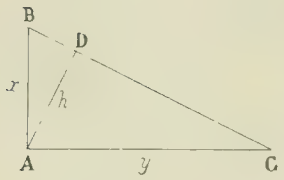
*(Agrégation, 1882.)*

# DEUXIÈME PARTIE

## ALGÈBRE

**1250.** — *Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse et la somme des volumes engendrés par le triangle en tournant autour des deux côtés de l'angle droit.*

Soient $x$ et $y$ les longueurs des côtés de l'angle droit, $h$ la hauteur relative à l'hypoténuse et $\frac{1}{3}\pi a^3$ la somme des deux volumes indiqués. Nous avons d'abord, d'après un théorème connu,




$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2};$$

puis

$$\frac{1}{3}\pi x^2 y + \frac{1}{3}\pi x y^2 = \frac{1}{3}\pi a^3;$$

$x$ et $y$ sont donc fournis par les deux équations

$$h^2(x^2 + y^2) = x^2 y^2,$$
$$xy(x + y) = a^3.$$

Prenons pour inconnues $x + y = u$ et $xy = v$, nous aurons

$$h^2(u^2 - 2v) = v^2$$

et

$$uv = a^3;$$

la seconde donne $u = \frac{a^3}{v}$, et la première devient alors

$$h^2\left[\frac{a^6}{v^2} - 2v\right] = v^2,$$

ou

$$(1) \qquad v^4 + 2h^2 v^3 - h^2 a^6 = 0.$$

Telle est l'équation qui donne $v$; d'après le théorème de Descartes, elle a une racine positive et une seule, et de même une racine négative. La racine positive est seule acceptable.

Appelons-la $v$, nous aurons alors $u = \frac{a^3}{v}$ et $x, y$ sont les racines de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - \frac{a^3}{v}x - v = 0;$$

celle-ci a ses deux racines positives ou imaginaires, et la condition de réalité est

$$a^6 - 4v^3 > 0,$$

ou

$$v < \frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}.$$

Or 0 substitué à $v$ dans l'équation (1) donne le signe $-$; donc le nombre $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$, substitué à $v$, devra donner le signe $+$. Nous trouvons ainsi l'unique condition de possibilité

$$h < \frac{a}{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}.$$

Si l'on a $h = \frac{a}{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}$, on a aussi $v = \frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$, l'équation (2) a ses racines égales et le triangle est isocèle.

M. THIÉRY, lycée de Nancy.

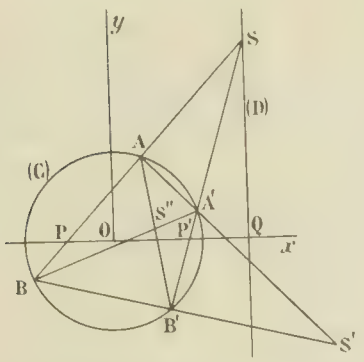
Bonne solution : M. J. Haag, élève de l'Ecole normale supérieure.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1230.** — *On donne un cercle* (C), *deux points* P *et* P′ *sur un même diamètre, et une droite* (D) *perpendiculaire à* PP′. *D'un point quelconque* S *de* (D), *on mène les sécantes* PS *et* P′S *qui coupent respectivement le cercle* (C) *en* A, B *et* A′, B′. *Trouver le lieu du point de rencontre* S′ *de* AA′ *et* BB′, *et le lieu du point de rencontre* S″ *de* AB′ *et* BA′.

*Montrer que lorsque le point* P *seul est donné, on peut toujours déterminer la position du point* P′ *et de la droite* (D), *de telle façon que le lieu de* S′ *soit la droite* (D), *et le lieu de* S″ *le diamètre* PP′.

Prenons comme axe des $x$ le diamètre PP′ du cercle et comme axe des $y$ le diamètre perpendiculaire ; désignons par $p$ et $p'$ les abscisses des points P et P′ et soient $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $x - a = 0$ les équations du cercle (C) et de la droite (D).




Représentons par $\lambda$ l'ordonnée variable du point S ; les coordonnées de ce point sont $a$ et $\lambda$, par suite les équations des droites SP et SP′ sont respectivement

$$\frac{y}{x-p} = \frac{\lambda}{a-p}, \qquad \frac{y}{x-p'} = \frac{\lambda}{a-p'},$$

ou

$$E = \lambda(x-p) - y(a-p) = 0, \qquad E' = \lambda(x-p') - y(a-p') = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par les quatre points A, B, A′ B′ est alors

$$f(x, y) = \mu(x^2 + y^2 - R^2) + EE' = 0,$$

et comme les points S′ et S″ sont les pôles doubles de ce faisceau de coniques, les coordonnées de ces points vérifient les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\mu x + \lambda(E + E') = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\mu y - (a-p)E - (a-p')E = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2\mu R^2 - \lambda pE' - \lambda p'E = 0.$$

Nous aurons le lieu des points S′ et S″ en éliminant $\lambda$ et $\mu$ entre ces trois équations. La première et la troisième nous donnent

$$(1) \qquad E + E' = -\frac{2\mu x}{\lambda}, \qquad pE' + p'E = -\frac{2\mu R^2}{\lambda},$$

et comme la seconde peut s'écrire

$$2\mu y - a(E + E') + pE' + p'E = 0,$$

on peut éliminer aisément $E + E'$ et $pE' + p'E$, et on obtient

$$2\mu y + \frac{2\mu a x}{\lambda} - \frac{2\mu R^2}{\lambda} = 0.$$

ou
$$\mu(\lambda y + ax - R^2) = 0.$$

La solution $\mu = 0$ nous donne $E = 0$, $E' = 0$, et ces équations déterminent le point S, qui est aussi un pôle double du faisceau considéré. Le lieu de ce point est la droite (D).

En écartant cette solution nous avons $\lambda y + ax - R^2 = 0$, ou $\lambda = \frac{R^2 - ax}{y}$, et nous porterons cette valeur de $\lambda$ dans la relation
$$\frac{E + E'}{pE' + p'E} = \frac{x}{R^2},$$
obtenue en éliminant $\mu$ entre les relations (1).

Nous trouvons ainsi $\frac{(R^2 - ax)(2x - p - p') - y^2(2a - p - p')}{(R^2 - ax)[(p + p')x - 2pp'] - y^2[a(p + p') - 2pp']} = \frac{x}{R^2}$,

ou

(2) $$y^2\Big[x[a(p + p') - 2pp'] - R^2(2a - p - p')\Big] - (R^2 - ax)\Big[x[(p + p')x - 2pp'] - R^2(2x - p - p')\Big] = 0.$$

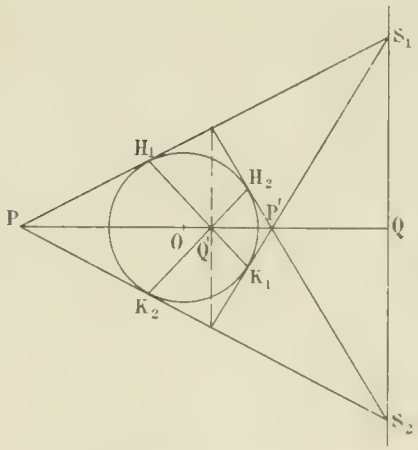
Telle est l'équation du lieu des points S′ et S″, elle représente une courbe du troisième degré, symétrique par rapport à $Ox$. On pourrait la construire en résolvant l'équation par rapport à $y^2$.

Pour que le point S′ décrive la droite (D), il faut que le premier membre de l'équation (2) soit divisible par $x - a$, et pour cela que le coefficient de $y^2$ et le terme indépendant de $y^2$ s'annulent quand on y remplace $x$ par $a$. On obtient ainsi l'unique condition
$$a[a(p + p') - 2pp'] - R^2(2a - p - p') = 0,$$
ou (3)
$$\left(a + \frac{R^2}{a}\right)(p + p') - 2(R^2 + pp') = 0.$$

Cette condition exprime que les points P et P′ sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points de $Ox$ qui ont pour abscisses $a$ et $\frac{R^2}{a}$, c'est-à-dire par rapport aux deux points Q et Q′, Q′ étant le pôle de la droite (D) par rapport au cercle (C).

Supposons cette condition remplie, et divisons par $x - a$ le premier membre de l'équation (2), nous obtenons
$$y[a(p + p') - 2pp'] - (R^2 - ax)\left[(p + p')x - \frac{R^2}{a}(p + p')\right] = 0$$
ou (4)
$$ay^2[a(p + p') - 2pp'] + (R^2 - ax)^2(p + p') = 0,$$
et cette équation représente deux droites passant par le point Q′.

Pour que ces deux droites soient confondues avec $Ox$, il faut que $p + p'$ soit nul; mais alors la relation (3) nous donne $pp' = -R^2$, et nous en déduisons $p = R$, $p' = -R$, ce qui est un cas très particulier. Par conséquent, si le point P est donné arbitrairement sur $Ox$, il est impossible que le lieu se compose de la droite (D) et de la droite PP′.




Tous ces résultats peuvent s'expliquer géométriquement.

En effet, si les deux points S et S′ sont situés sur la droite (D), cette droite est la polaire de S″ par rapport à l'angle ASA′ et aussi par rapport au cercle. Donc le point S″ coïncide avec Q′, *c'est un point fixe*, et les deux points P et P′ sont conjugués harmoniques par rapport à Q et Q′.

Les deux droites représentées par l'équation (4) correspondent au cas où les droites SP et SP′ sont tangentes au cercle, c'est-à-dire au cas où le point S est en $S_1$ ou en $S_2$. Les polaires de ces points, $H_1K_1$ et $H_2K_2$ font partie du lieu, car tous les points de la droite $H_1K_1$ par exemple sont des pôles doubles du faisceau de coniques défini par le cercle et l'ensemble des droites $S_1P$ et $S_1P'$.

Par suite l'équation (4) représente les droites $H_1K_1$ et $H_2K_2$ ; il serait d'ailleurs facile de le vérifier analytiquement.

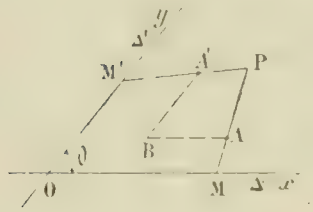
Si en particulier les points P et P' sont aux extrémités du diamètre OQ, les points $S_1$ et $S_2$ sont à l'infini sur la droite (D) et les droites $H_1K_1$ et $H_2K_2$ sont confondues avec OQ.

Solution par M. J. Haag.

---

**1245.**— *On considère deux droites fixes Δ, Δ' et deux points fixes A et A'. On prend sur ces droites des points M et M' tels que* $\frac{AM}{A'M'} = k$, *et on demande le lieu du point de rencontre des droites* AM, A'M', *ainsi que l'enveloppe de la droite* MM'.

Prenons pour axes les droites Δ et Δ' et désignons par $x_1$, $y_1$ les coordonnées du point A et par $x_2$, $y_2$ celles du point A'.




Soient α, β les coordonnées d'un point P du lieu. La droite PA a pour équation

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{\beta - y_1}{\alpha - x_1},$$

elle rencontre $Ox$ en un point M dont les coordonnées sont

$$x = x_1 - \frac{y_1(\alpha - x_1)}{\beta - y_1}, \qquad y = 0;$$

par suite le carré de la distance AM est

$$\overline{AM}^2 = \frac{y_1^2(\alpha - x_1)^2}{(\beta - y_1)^2} + y_1^2 + \frac{2y_1(\alpha - x_1)}{\beta - y_1}\cos\theta,$$

ou

$$\overline{AM}^2 = \frac{y_1^2}{(\beta - y_1)^2}[(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 + 2(\alpha - x_1)(\beta - y_1)\cos\theta].$$

De même les coordonnées du point M' sont

$$x = 0, \qquad y = y_2 - \frac{x_2(\beta - y_2)}{\alpha - x_2},$$

et la longueur A'M' est définie par l'égalité

$$\overline{A'M'}^2 = \frac{x_2^2}{(\alpha - x_2)^2}[(\alpha - x_2)^2 + (\beta - y_2)^2 + 2(\alpha - x_2)(\beta - y_2)\cos\theta].$$

Écrivons maintenant que le rapport $\frac{AM}{A'M'}$ est égal à $k$, nous avons

$$k^2 = \frac{y_1^2(\alpha - x_2)^2}{x_2^2(\beta - y_1)^2} \cdot \frac{(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 + 2(\alpha - x_1)(\beta - y_1)\cos\theta}{(\alpha - x_2)^2 + (\beta - y_2)^2 + 2(\alpha - x_2)(\beta - y_2)\cos\theta},$$

ou, en remplaçant α et β par $x$, $y$,

$$y_1^2(x - x_2)^2[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + 2(x - x_1)(y - y_1)\cos\theta]$$
$$- k^2x_2^2(y - y_1)^2[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + 2(x - x_2)(y - y_2)\cos\theta] = 0,$$

telle est l'équation du lieu.

Cette équation représente une courbe du quatrième degré, circulaire, admettant pour points doubles les points A et A' ainsi que le point B, intersection de la parallèle à $Ox$ menée par le point A et de la parallèle à $Oy$ menée par le point A' ; par suite, cette courbe est unicursale. Elle admet deux directions asymptotiques réelles ayant pour coefficients angulaires $\pm \frac{y_1}{kx_2}$, et une asymptote parallèle à chacune de ces directions.

Soit maintenant $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite MM′ ; l'abscisse du point M est égale à $-\frac{w}{u}$, par suite nous avons

$$\overline{AM}^2 = \left(x_1 + \frac{w}{u}\right)^2 + y_1^2 + 2\left(x_1 + \frac{w}{u}\right)y_1 \cos\theta,$$

$$\overline{A'M'}^2 = x_2^2 + \left(y_2 + \frac{w}{u}\right)^2 + 2x_2\left(y_2 + \frac{w}{u}\right)\cos\theta.$$

En écrivant que $\frac{AM}{A'M'}$ est égal à K, on obtient l'équation tangentielle de l'enveloppe

$$v^2[(ux_1 + w)^2 + u^2y_1^2 + 2uy_1(ux_1 + w)\cos\theta] - k^2u^2[v^2x_2^2 + (vy_2 + w)^2 + 2vx_2(vy_2 + w)\cos\theta] = 0.$$

Cette équation représente une courbe de quatrième classe qui admet trois tangentes doubles, savoir, les droites $\Delta$, $\Delta'$ et la droite de l'infini.

On pouvait prévoir géométriquement ces divers résultats en remarquant que la correspondance entre les droites AM et A′M′ est du genre (2, 2) ainsi que la correspondance entre les points M et M′ sur les droites $\Delta$ et $\Delta'$.

J. HAAG et R. BOUVAIST.

---

## CONCOURS DE 1904 (*Suite*).

### ÉCOLE CENTRALE

*Mathématiques.*

Géométrie analytique et Cinématique.

**1326.** — 1° Construire la ligne S dont l'équation est : $\rho = m\sqrt{\cos 2\omega}$, $m$ étant une longueur donnée.

2° Soient G, G′ les points de l'axe polaire situés à la distance $\frac{m\sqrt{2}}{2}$ du pôle : Vérifier que le produit GM × G′M reste constant lorsque le point M parcourt la ligne S. En déduire un procédé graphique pour tracer la tangente en un point M arbitraire de la ligne S.

(Application de la projection de la dérivée géométrique d'un vecteur.)

3° On considère deux cercles égaux qui se coupent à angle droit et dont les centres C et C′ sont à la distance $2a$. Un mobile M parcourt le cercle C, un autre parcourt C′ de sorte que la distance MM′ reste égale à $2a$. Prouver que le lieu géométrique du milieu P de MM′ se compose d'un cercle C″ et d'une ligne S′ semblable à la ligne S (1°).

On démontrera que si l'on joint le milieu O de CC′ à chacun des points M,M′, tels que le milieu P de MM′ soit sur la ligne S′, on obtient deux droites symétriques par rapport à CC′.

4° Du mode de génération de la ligne S′ déduire un procédé graphique pour tracer la normale en un point donné de cette ligne. Cas où cette normale est perpendiculaire à CC′.

5° Le point M décrivant le cercle C, en sorte que la droite OM tourne uniformément autour du point O, trouver l'expression de la vitesse du point P sur S′ et discuter le résultat.

Statique.

I. — Des forces parallèles $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont appliquées en des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1° Définir le centre de ce système de forces parallèles.

2° Calculer les coordonnées de ce point en fonction des coordonnées des points d'application.

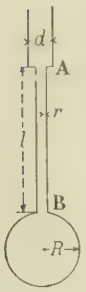
II. — **1327**. — Un corps, dont le poids est 132$^{kg}$, repose sur une table horizontale qui pèse elle-même 36$^{kg}$. Cette table est portée par trois pieds verticaux, égaux, dont les traces sur le sol horizontal sont les sommets d'un triangle rectangle ABC ; les côtés AB, AC de l'angle droit de ce triangle ont pour longueurs 0$^{m}$,3 et 0$^{m}$,4. Calculer les pressions exercées sur le sol, sachant que les projections sur ce sol des centres de gravité de la table et du corps qu'elle porte coïncident, la première avec le centre de gravité de l'aire ABC, la seconde avec le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

*(15 juin, de 7 h. à 11 h.)*

## *Physique et Chimie.*

I. — La loupe.

II. **1328**. — Une enveloppe thermométrique, pleine d'air à la pression $p$, est formée d'une sphère de rayon R reliée par un tube étroit de rayon $r$ et de longueur $l$ à un entonnoir cylindrique de diamètre $d$.




Donner la formule qui fait connaître le volume $x$ de mercure qu'il faut verser dans cet appareil pour que ce liquide comprimant l'air contenu au-dessous de A puisse couler dans le réservoir sphérique et le remplir à moitié.

On admettra que le tube AB est assez étroit pour que l'air ne puisse sortir ; le mercure le remplit entièrement et ne forme pas de goutte en B. Il n'y a pas de variation de température.

Application numérique : $p = 76^{cm},0$, $r = 0^{cm},1$, $R = 2^{cm},5$, $d = 2^{cm},0$, $l = 25^{cm},0$.

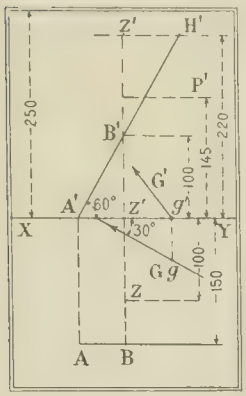
III. — Acétylène.

IV. — **1329**. — 1° On attaque 7 grammes de fer pur par un grand excès d'acide sulfurique froid et étendu (au sixième). On opère à l'abri de l'air. Ecrire la réaction et dire quel est le composé formé en dissolution dans la liqueur. En calculer le poids.

2° Cette liqueur qui contient, outre le sel formé, un excès d'acide sulfurique, est agitée avec un litre de chlore mesuré dans les conditions normales.

Que se passe-t il ? Écrire la réaction. Quand l'action du chlore est terminée, dire s'il reste encore une certaine quantité du sel formé en 1°. En ce cas, calculer cette quantité.

3° Dans la liqueur qui vient d'être soumise à l'action du chlore et qui contient encore un grand excès d'acide sulfurique étendu en plus des sels de fer, on verse la solution étendue et froide de 2$^{g}$,115 de permanganate de potassium ($MnO^4K$). Dire ce qui se passe ; écrire la réaction. Reste-t-il du permanganate quand la réaction est terminée ? En ce cas, caculer le poids du permanganate restant.




4° Enfin, on demande quel volume de chlore il faudrait employer dans l'expérience 2° pour que le permanganate ajouté ensuite reste inattaqué. (On admettra que la température reste assez basse pour que le permanganate ne réagisse pas sur l'acide sulfurique.)

(Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.)

*(2 heures, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)*

## *Géométrie descriptive.*

INTERSECTION D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION AVEC UN CYLINDRE. — SOLIDE COMMUN.

**1330**. — Une surface de révolution est engendrée par la droite de front (AB, A'B') tournant autour de l'axe vertical ZZ'.

On considère la sphère inscrite dans cette surface suivant le parallèle P' de cote 145$^{mm}$ et on circonscrit à cette sphère un cylindre ayant G,G' comme direction de ses génératrices.— (La direction G,G' est inclinée de 60° sur le plan horizontal et la projection horizontale $g$ est à 30° sur XY).

On demande de construire l'intersection de la surface de révolution avec le cylindre.

On représentera le solide commun aux deux surfaces en le limitant au plan horizontal de projection et au plan horizontal H′ de cote $220^{mm}$.

Cadre de $270^{mm}$ sur $450^{mm}$. — XY parallèle aux petits côtés du cadre à $250^{mm}$ du côté supérieur. — ZZ′ au milieu de la feuille. — Éloignement de Z, $100^{mm}$. — Éloignement de AB, $150^{mm}$. Inclinaison de AB sur le plan horizontal, 60°. — Cote de B′, $100^{mm}$. — Cote de P′, $145^{mm}$. — Cote de H′, $220^{mm}$. — Direction G à 30° sur XY. — Inclinaison de G,G′ sur le plan horizontal, 60°.

Titre extérieur : Géométrie descriptive. — Titre intérieur : Intersection d'une surface de révolution avec un cylindre. — Solide commun.

(*16 juin, de 7 h. à 11 h.*)

*Trigonométrie.*

PROBLÈME.

**1331.** — Dans un triangle ABC on donne le côté $c$, l'angle C opposé à ce côté et la différence des carrés des deux autres côtés, $a^2 - b^2 = \mu^2$.

1° Exprimer la tangente de l'angle B en fonction des données.

2° Donner les conditions de possibilité du triangle.

3° Construire la solution répondant à

$$c = 3^{cm},5, \qquad C = 30°, \qquad \mu^2 = 6^{cmq}.$$

CALCUL.

**1332.** — Calculer le plus petit des angles positifs qui satisfont à l'équation

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt[3]{a}.\cos\alpha}{\sin 5\alpha.\operatorname{tg}\beta}.$$

$$\alpha = 131°49'25''17, \qquad \beta = 36°43'15''6, \qquad a = -0,085\,617\,48.$$

(*16 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

## QUESTION PROPOSÉE

**1333.** — Par les sommets d'un triangle ABC, pris deux à deux, on fait passer trois cercles qui se coupent en un même point O.

1° Tout cercle $\omega$ qui passe en O rencontre les cercles OBC, OCA, OAB en des points A′, B′, C′ tels que les droites OA′, OB′, OC′ rencontrent les côtés correspondants du triangle BC, CA, AB en trois points en ligne droite.

2° Les droites qui joignent les points de rencontre $A_1$, $B_1$, $C_1$ du cercle $\omega$ avec OA, OB, OC respectivement aux points A′, B′, C′ passent par le même point.

T. LEMOYNE.

**Question 1320** (M. Martin). — M. Barisien signale que la question se simplifie notablement et présente plus d'intérêt en supposant les points P et Q sur l'ellipse. L'auteur a peut être commis une erreur et oublié de mentionner cette particularité. Nous engageons nos lecteurs à se placer dans cette hypothèse et adressons nos remerciements à notre dévoué collaborateur, qui a pris la peine de nous signaler cette heureuse modification.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

14e Année. N° 12 Septembre 1904.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LES COURBES UNICURSALES DU QUATRIÈME DEGRÉ

par M. J. **Richard**, professeur au lycée de Dijon.

On considère généralement les courbes unicursales du quatrième degré comme étant celles qui ont trois points doubles ; mais des cas singuliers échappent à cette règle.

Dans ce qui suit, je vais étudier toutes les courbes unicursales du quatrième degré ; je montrerai qu'*on les obtient en transformant des coniques par une transformation birationnelle quelconque du second degré.*

Soient

$$(1) \qquad \rho x = f(t), \qquad \rho y = \varphi(t), \qquad \rho z = \psi(t),$$

les équations qui donnent les coordonnées homogènes, ou trilinéaires d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre $t$.

Inversement, on peut exprimer $t$ en fonction de $x, y, z$ ; à cet effet, prenons deux polynomes homogènes du second degré à coefficients arbitraires, G et H, et cherchons à déterminer ces coefficients de façon que l'équation

$$(2) \qquad G + tH = 0$$

devienne une identité, lorsqu'on remplace $x, y, z$ par leurs valeurs en fonction de $t$.

G et H ayant chacun six coefficients, et le polynome $G + tH$ étant du neuvième degré en $t$, lorsque $x, y, z$ ont été remplacées par leurs valeurs, on aura dix équations homogènes à douze inconnues. On pourra donc trouver une infinité de polynomes G et H.

Supposons qu'on ait trouvé un premier couple de polynomes G, H, l'équation (2) donnera $t$ en fonction de $x, y, z$.

Soit $G_1$, $H_1$ un second couple ; on aura d'une part $t = -\frac{G}{H}$, et d'autre part, $t = -\frac{G_1}{H_1}$, en sorte que l'équation de la courbe du quatrième degré sera :

$$(3) \qquad GH_1 - HG_1 = 0.$$

$\alpha$ et $\beta$ étant arbitraires, il est clair que les polynomes $\alpha G + \beta G_1$, $\alpha H + \beta H_1$ satisferont aussi à la question.

Je dis que, réciproquement tous les polynomes satisfaisant à la question sont de cette forme. En effet, supposons qu'il puisse exister deux autres polynomes $G_2$ et $H_2$ qui ne soient pas de cette forme.

Les polynomes $\alpha G + \beta G_1 + \gamma G_2$, $\alpha H + \beta H_1 + \gamma H_2$ répondraient aussi à la question. L'équation de la courbe pourrait s'écrire

$$(4) \qquad G(\alpha H + \beta H_1 + \gamma H_2) - H(\alpha G + \beta G_1 + \gamma G_2) = 0.$$

Il est facile de voir que l'on peut choisir $\gamma$ de façon que cette équation manque par exemple de terme en $z^4$. Or on peut toujours supposer que la courbe donnée ne passe pas par le point $x = 0$, $y = 0$. Il y aurait exception si $H_2$ et $G_2$ avaient leurs coefficients de $z^4$ proportionnels à ceux de $H_1$ et $G_1$, mais si $H_2$ et $G_2$ ne sont pas identiques à $H_1$ et $G_1$, on pourra toujours faire disparaître un terme dans l'équation de la courbe, terme qui ne disparaîtrait pas si $\gamma$ restait arbitraire, ce qui est absurde.

Notre courbe est alors engendrée par l'intersection de deux coniques mobiles.

$$(5)\qquad \begin{cases} G + tH = 0, \\ G_1 + tH_1 = 0, \end{cases}$$

qui se correspondent homographiquement.

Inversement, considérons deux pareilles coniques

$$G + tH = 0, \qquad G_1 + tH_1 = 0,$$

prises d'une façon quelconque. Leurs points d'intersection engendreront toujours la courbe du 4e degré

$$GH_1 - HG_1 = 0.$$

Mais cette courbe ne sera pas unicursale. Pour qu'à une valeur de $t$ ne corresponde qu'un point mobile, il faut que les deux coniques (5) se coupent en trois points fixes. Ces trois points peuvent être tous distincts, ou bien deux d'entre eux peuvent être confondus, ou enfin ils peuvent être tous trois confondus.

De là trois cas que nous allons considérer séparément.

1er Cas. — Les deux coniques (5) passent par trois points fixes distincts. On peut prendre ces trois points comme sommets du triangle de référence.

On pourra donc supposer :

$$\begin{aligned} G &= ayz + bzx + cxy, \\ H &= a'yz + b'zx + c'xy. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_1 &= \alpha yz + \beta zx + \gamma xy, \\ H_1 &= \alpha' yz + \beta' zx + \gamma' xy. \end{aligned}$$

Mais alors la transformation

$$\rho X = yz, \qquad \rho Y = zx, \qquad \rho Z = xy$$

change G, H, $G_1$, $H_1$ en des polynomes du premier degré et la quartique en conique.

La quartique a dans ce cas trois points doubles, les trois sommets du triangle de référence. Les points doubles ont leurs tangentes distinctes ou non, selon que les points où la conique transformée de la quartique coupe les côtés du triangle de référence sont distincts ou non.

2e Cas. — Les deux coniques représentées par l'équation (5) passent par trois points fixes dont deux sont confondus.

Prenons pour triangle de référence le triangle défini de la façon suivante.

Le côté AB $(z = 0)$ est tangent en A aux deux coniques représentées par l'équation (5). Toutes ces coniques passent en outre par le point C $(x = 0,\ y = 0)$, de façon que la droite $x = 0$ soit la droite AC. On pourra prendre alors

$$\begin{aligned} G &= \alpha x^2 + \beta xz + \gamma yz, \\ H &= \alpha' x^2 + \beta' xz + \gamma' yz. \\ G_1 &= ax^2 + bxz + cyz, \\ H_1 &= a'x^2 + b'xz + c'yz. \end{aligned}$$

On a encore une transformation changeant ces coniques en droites :

$$\rho X = x^2, \qquad \rho Y = xz, \qquad \rho Z = yz.$$

Cette transformation a pour inverse la suivante :

$$\lambda x = XY, \qquad \lambda y = ZX, \qquad \lambda z = Y^2.$$

Les quartiques correspondantes se transforment encore en coniques. Ces quartiques n'ont plus ici que deux points doubles.

L'un de ces points doubles présente une singularité d'ordre élevé.

Pour se rendre compte de la nature de ce point, le lecteur pourra construire la courbe

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x^2}.$$

3e Cas. — Les deux coniques définies par l'équation (5) sont osculatrices en un point.

L'équation générale des coniques osculatrices entre elles à l'origine et tangentes à $Ox$ est

$$\alpha(x^2 - yz) + \beta xy + \gamma y^2 = 0.$$

En effet, deux de ces coniques, la précédente et celle-ci

$$\alpha'(x^2 - yz) + \beta' xy + \gamma' y^2 = 0$$

se coupent sur les deux droites

$$(\beta\alpha' - \alpha\beta')x + (\gamma\alpha' - \alpha'\gamma)y = 0.$$

La droite $y = 0$ est la tangente à l'origine. L'autre droite passe aussi par l'origine. Les coniques sont donc osculatrices.

Nous avons donc ici la tranformation

$$\rho X = x^2 - yz, \qquad \rho Y = xy, \qquad \rho Z = y^2.$$

L'inverse est la suivante :

$$\lambda x = Y^2 - ZX, \qquad \lambda y = Z^2, \qquad \lambda z = YZ.$$

Dans ce cas, les quartiques n'ont plus qu'un point double. On doit s'attendre à trouver en ce point une singularité d'ordre élevé.

Le lecteur pourra, afin de s'en rendre compte, étudier dans le voisinage de l'origine la courbe

$$(x^2 - y^2)^2 = y^2(x^2 + y^2).$$

Ce qui précède montre qu'une courbe de degré $m$ peut être unicursale sans avoir $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles.

La discussion pour les courbes d'un degré $m$ supérieur à 4 offre des difficultés spéciales. Les polynomes G et H sont alors de degré $m - 2$, et l'équation (3) n'est plus de degré $m$.

✦

## SUR UNE QUESTION D'EXAMEN

par M. **R. Bouvaist**.

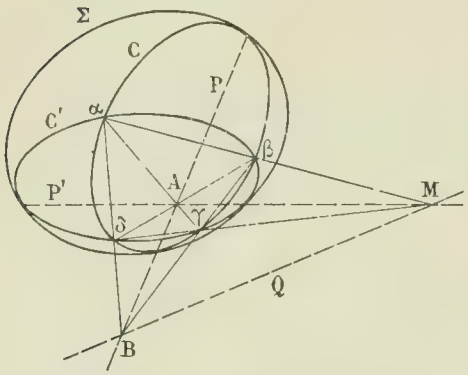
Aux examens oraux de l'École Polytechnique, l'année dernière et les années précédentes, on a fréquemment posé la question suivante : *Étudier les surfaces de révolution passant par l'intersection de deux surfaces de révolution données* ; l'objet de cette courte note est de résoudre géométriquement la question dont la solution analytique n'offre aucune difficulté.

Je démontrerai tout d'abord le théorème suivant :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que par l'intersection de deux coniques* C *et* C′ *bitangentes à une même troisième* Σ, *on puisse faire passer une conique* C″ *bitangente à* Σ, *c'est que les cordes de contact de* Σ *avec* C *et* C′ *soient conjuguées par rapport à* Σ.

*Les trois cordes de contact de* C, C′, C″ *avec* Σ *forment un triangle conjugué à* Σ.

Soient P, P′, Q les cordes de contact de C, C′, C″ avec Σ, soient α, β, γ, δ les quatre points d'intersection de C et de C′. Quand deux coniques sont bitangentes à une même troisième, les cordes de contact forment un faisceau harmonique avec un système de sécantes communes.




P et P′ forment un faisceau harmonique avec αγ, βδ, par exemple, se coupant en A ; P et Q forment un faisceau harmonique avec δα, βγ par exemple, se coupant en B. Or, B, situé sur P, a même polaire par rapport à C et Σ, il a aussi même polaire par rapport à C et C′, donc même polaire par rapport à Σ et C′, c'est le pôle de P′ par rapport à Σ. Soit M le pôle de P par rapport à Σ, les droites AM, αβ, δγ et Q forment un faisceau harmonique, il existe par suite une conique C′ passant par αβγδ et bitangente à Σ, la corde de contact étant AM. Le théorème est démontré.

Supposons maintenant que la conique Σ soit le cercle de l'infini, C et C′, les sections de deux cônes de révolution de sommet S par le plan de l'infini, le théorème démontré devient le suivant :

*La condition nécessaire et suffisante pour que par l'intersection de deux cônes de révolution on puisse faire passer un cône de révolution est que les axes de ces deux cônes soient rectangulaires. L'axe du cône de révolution passant par leur intersection forme un trièdre trirectangle avec leurs axes.*

D'où la condition cherchée.

*Remarque de la Rédaction.* — L'auteur a oublié de mentionner le cas où les deux coniques C et C′ sont tangentes à Σ aux deux mêmes points ; dans ce cas, toutes les coniques du faisceau (C, C′) sont bitangentes à Σ.

Par conséquent quand deux quadriques de révolution ont leurs axes parallèles, toutes les quadriques du faisceau qu'elles déterminent sont de révolution.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1253.** — *Démontrer que trois cercles passant par le point de rebroussement d'une cissoïde droite et coupant orthogonalement cette courbe en trois points en ligne droite, ont même axe radical et que les droites joignant le point de rebroussement aux centres de ces cercles, coupent la cissoïde en trois points en ligne droite.*

La cissoïde droite, rapportée à ses axes ordinaires, a pour équation

$$x(x^2+y^2) = ay^2.$$

Si l'on pose $y = tx$, on déduit de là

$$x = \frac{at^2}{1+t^2},$$

puis,

$$y = \frac{at^3}{1+t^2}.$$

Coupons cette ligne par la droite dont l'équation est

$$ux + vy + w = 0,$$

nous aurons pour fournir les paramètres des points de rencontre, l'équation du troisième degré

$$avt^3 + (au+w)t^2 + w = 0.$$

Les trois racines de cette équation sont liées par la relation

$$tt' + tt'' + t't'' = 0,$$

qui est indépendante de la droite choisie, c'est-à-dire indépendante de $u$, $v$, $w$ : donc c'est là la relation qui existe entre les paramètres de trois points en ligne droite.

Soit maintenant

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$$

l'équation du cercle qui passe au point de rebroussement, au point $t$, et qui est orthogonal à la cissoïde en ce dernier point. Nous avons d'abord

$$2\alpha + 2\beta t - at^2 = 0,$$

pour exprimer que le cercle passe au point $t$ ; puis,

$$-\frac{x-\alpha}{y-\beta}\cdot\frac{dy}{dx} = -1,$$

$x$ et $y$ étant les fonctions de $t$ que nous avons trouvées, pour exprimer que le cercle est orthogonal à la cissoïde. Remplaçons dans cette équation $x$ et $y$ par leurs valeurs, $x'$ et $y'$ par $\frac{2at}{(1+t^2)^2}$ et $\frac{at^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$, nous aurons la nouvelle équation que doivent vérifier $\alpha$ et $\beta$ :

$$\alpha t(3+t^2) - 2\beta = at^3.$$

$\alpha$ et $\beta$ sont donc donnés par deux équations du premier degré et rien n'est plus aisé que de les calculer ; on trouve ainsi

$$\alpha = \frac{at^2}{t^2+2}, \qquad 2\beta = \frac{at^3}{t^2+2}.$$

Par conséquent, le cercle en question a pour équation

$$x^2 + y^2 - \frac{2at^2}{t^2+2}x - \frac{at}{t^2+2}y = 0 ;$$

quand $t$ varie, son centre décrit une cubique dont il est aisé d'avoir l'équation.

Les trois cercles de l'énoncé s'obtiennent donc en remplaçant, dans l'équation précédente, $t$ par trois nombres quelconques vérifiant la relation $tt' + tt'' + t't'' = 0$. Pour démontrer que ces cercles ont même axe radical, il suffit ici, puisque les cercles ont déjà un point commun, de démontrer que les trois centres sont en ligne droite, c'est-à-dire de vérifier que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{at^2}{t^2+2} & \frac{at^3}{2(t^2+2)} & 1 \\ \frac{at'^2}{t'^2+2} & \frac{at'^3}{2(t'^2+2)} & 1 \\ \frac{at''^2}{t''^2+2} & \frac{at''^3}{2(t''^2+2)} & 1 \end{vmatrix}$$

est nul.

Multiplions la première ligne par $t^2+2$, la seconde par $t'^2+2$, la troisième par $t''^2+2$; puis divisons la première colonne par $a$, la deuxième par $\frac{a}{2}$ et retranchons ensuite la première colonne de la dernière, qui après sera divisible par 2, il viendra finalement

$$\begin{vmatrix} t^2 & t^3 & 1 \\ t'^2 & t'^3 & 1 \\ t''^2 & t''^3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or ce déterminant est égal à

$$(t-t')(t'-t'')(t''-t)(tt'+tt''+t't'') ;$$

donc il est nul.

Quant aux droites qui joignent l'origine aux centres des trois cercles elles ont pour coefficients

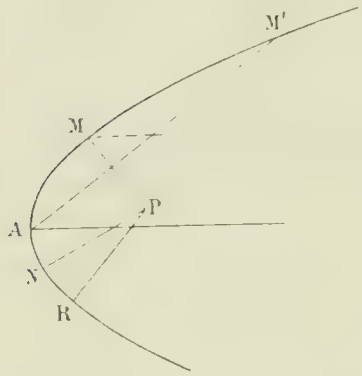
angulaires $\frac{t}{2}$, $\frac{t'}{2}$, $\frac{t''}{2}$ ; ces trois paramètres vérifient aussi la relation $\Sigma tt' = 0$ ; donc les points où les trois droites rencontrent la cissoïde sont en ligne droite.

PARROD.

Bonnes solutions : MM. X., lycée de Dijon ; Thiéry, lycée de Nancy ; J. Haag, élève de l'École normale supérieure ; F. Gérard, lycée Janson-de-Sailly ; Dulimbert, à Grenoble ; Dnallor Lecram ; J. Roda, à Toulouse.

**Solution géométrique.** — Transformons par inversion en prenant le point de rebroussement A comme pôle. La cissoïde se transforme en une parabole ayant son sommet en A. Les cercles orthogonaux à la cissoïde se transforment en normales à la parabole et leurs pieds sont sur un cercle passant par l'origine ; il en résulte (théorème de Joachimstal) que ces normales sont concourantes ; donc les cercles ont un point commun autre que A ; donc ils ont même axe radical.

Les droites joignant A aux centres des cercles se transforment en elles-mêmes et sont les perpendiculaires abaissées de A sur les trois normales à la parabole. Soient PM, PN, PR ces trois normales, et soit par exemple AM′ la perpendiculaire à PM qui rencontre la parabole en M′.




La tangente en M est parallèle à AM′ et comme les diamètres dans une parabole sont parallèles à l'axe, il en résulte évidemment que M′ a une ordonnée double de celle de M. D'ailleurs, pour que les normales en trois points soient concourantes, il faut et il suffit que le triangle formé par leurs pieds ait son centre de gravité sur l'axe, c'est-à-dire que la somme des ordonnées de ces pieds soit nulle. Puisque cela est pour les trois points M, N, R, il en sera donc aussi de même pour les trois points M′, N′, R′ et ces trois points étant les pieds de trois normales concourantes sont sur un cercle passant par le point A. Ceci transformé par inversion démontre le second théorème sur la cissoïde.

X., lycée de Dijon.

Mêmes solutions de MM. R. Bouvaist ; M. Thiéry ; J. Haag, élève de l'École normale supérieure ; A. Dagory ; J. Roda.

---

**1258.** — *Étant donnés un ellipsoïde et une droite* D, *on sait que tout point de la droite est le centre d'une conique de l'ellipsoïde.*

1° *On demande l'enveloppe du plan de cette conique quand son centre décrit la droite* D.

2° *Cette enveloppe est un cylindre parabolique. Trouver la relation qui lie les droites* D *pour lesquelles les génératrices de ce cylindre sont parallèles à un plan* P *passant au centre de l'ellipsoïde.*

3° *Toutes ces droites* D *rencontrent une droite fixe* Δ. *Trouver le lieu décrit par* Δ, *quand le plan* P *varie en coupant l'ellipsoïde suivant une ellipse d'aire constante.*

Rapportons l'ellipsoïde à ses axes et soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}$$

l'équation de l'ellipsoïde et celles de la droite D.

1. Considérons un point M de la droite D ayant pour coordonnées $x_0 + \rho u$, $y_0 + \rho v$, $z_0 + \rho w$. Ce point M est le centre de la section faite dans l'ellipsoïde par le plan passant par M et parallèle au plan diamétral conjugué de la direction OM. Le plan en question a pour équation

$$x - (x_0 + \rho u)\frac{x_0 + \rho u}{a^2} + y - (y_0 + \rho v)\frac{y_0 + \rho v}{b^2} + z - (z_0 + \rho w)\frac{z_0 + \rho w}{c^2} = 0 ;$$

ordonnons cette équation par rapport à $\rho$ :

$$-\rho^2\left[\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right]+\rho\left[\frac{ux}{a^2}+\frac{vy}{b^2}+\frac{wz}{c^2}-2\left(\frac{ux_0}{a^2}+\quad\right)\right]+\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}$$
$$\left[\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right]=0.$$

L'équation de l'enveloppe de ce plan est alors

$$\left[\frac{ux}{a^2}+\frac{vy}{b^2}+\frac{wz}{c^2}-2\left(\frac{ux_0}{a^2}+\frac{vy_0}{b^2}+\frac{wz_0}{c^2}\right)\right]^2+4\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)\left[\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)\right]=0.$$

C'est l'équation d'un cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles à l'intersection des deux plans

$$(1)\qquad \frac{ux}{a^2}+\frac{vy}{b^2}+\frac{wz}{c^2}=0,$$

$$(2)\qquad \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=0,$$

c'est-à-dire parallèles au diamètre conjugué du plan déterminé par la droite D et par le centre O de l'ellipsoïde.

**2.** Pour que ces génératrices soient parallèles à un plan P représenté par

$$(3)\qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0,$$

il faut et il suffit que les trois plans (1), (2), (3) se coupent suivant une droite, c'est-à-dire, que l'on ait

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u & v & w \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=0.$$

**3.** Cette condition peut s'écrire

$$\alpha p+\beta q+\gamma r=0,$$

$p$, $q$, $r$, $u$, $v$, $w$ désignant les coordonnées plückériennes des droites (D).

Ces droites forment un complexe linéaire spécial, toutes les droites (D) rencontrent la droite $\Delta$ de coordonnées 0, 0, 0, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, c'est-à-dire la droite $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$. Cela se voit d'ailleurs immédiatement sur le déterminant.

Pour exprimer que le plan P coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse d'aire constante, considérons l'équation aux carrés des longueurs des demi-axes de la section :

$$\frac{\frac{\alpha^2}{a^2}}{a^2-\rho^2}+\frac{\frac{\beta^2}{b^2}}{b^2-\rho^2}+\frac{\frac{\gamma^2}{c^2}}{c^2-\rho^2}=0$$

et exprimons que le produit des racines est constant :

$$a^2b^2c^2\left[\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{\beta^2}{b^4}+\frac{\gamma^2}{c^4}\right]-k^2\left[\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right]=0$$

Si on regarde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, comme des coordonnées courantes, cette équation est l'équation du cône lieu des droites $\Delta$.

FEUCHOT, lycée de Dijon.

Bonnes solutions : MM. J. Renard, à Dijon ; Parrod, à Vesoul ; J. D. Dufaut, à Poitiers ; J. Haag ; M. Théry, à Nancy ; R. Bouvaist ; J. Roda.

**Solution géométrique.** — **1.** Soit A un point mobile sur D ; le plan de la conique qui a son centre en A est parallèle au plan diamétral conjugué de OA ; il reste donc parallèle au diamètre conjugué du plan (O, D), et, par suite, enveloppe un cylindre dont les génératrices sont parallèles à ce diamètre. Pour avoir la base de ce cylindre sur le plan (O, D) il faut trouver l'enveloppe de la droite menée par A parallèlement au diamètre conjugué de OA dans la conique de section par le plan (O, D) ; cette droite trace sur la droite D et sur la droite de l'infini deux divisions homographiques ; elle enveloppe donc une parabole et l'enveloppe demandée est un cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles au diamètre conjugué D′ du plan (O, D).

**2.** Le diamètre conjugué de tout plan passant par D′ est situé dans le plan (O, D) et rencontre la droite D. Si donc la droite D′ parallèle aux génératrices du cylindre et menée par le centre O de l'ellipsoïde se meut dans un plan donné P, le diamètre conjugué de ce plan, Δ, rencontre la droite D. Les droites D forment donc un complexe spécial ayant pour axe la droite Δ.

**3.** Lorsque le plan P coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse d'aire constante, il enveloppe un cône du second degré. Son diamètre Δ décrit alors le cône réciproque par rapport au cône asymptote de l'ellipsoïde.

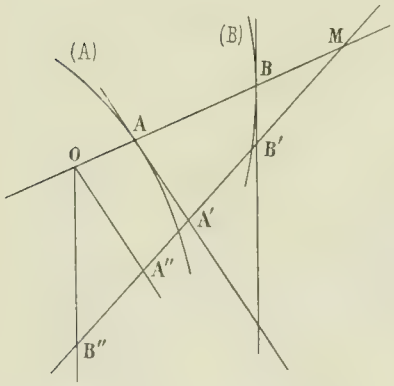
PARROD, à Vesoul.

---

**1271.** — *On considère deux courbes* (A), (B) *et un rayon mobile issu du point fixe* O *et qui les coupe en* A *et* B ; *ce rayon coupe en* M *une troisième courbe* (M).

*Trouver cette dernière courbe sachant que sa tangente en* M *est divisée au point* M *dans un rapport constant par les tangentes en* A, B *à* (A) *et* (B), *ou par les parallèles à ces mêmes tangentes menées par le pôle.*

Cette question qui constitue, comme nous allons le voir, un exercice élégant d'intégration, nous a paru devoir intéresser les élèves actuels des classes de Mathématiques spéciales, en leur fournissant l'occasion de s'exercer dans une autre voie que les voies habituelles. C'est ce qui nous a poussé à l'insérer dans la *Revue*.




**1.** Prenons pour axes deux axes de coordonnées rectangulaires passant au point O et appelons A, B, M les points de rencontre des trois courbes (A), (B), (M) avec une droite passant en O ; appelons aussi, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x, y)$ les coordonnées de ces trois points. Les équations des tangentes en ces points aux trois courbes signalées sont

$$Y - y_1 - y'_1(X - x_1) = 0,$$
$$Y - y_2 - y'_2(X - x_2) = 0,$$

et

$$Y - y - y'(X - x) = 0,$$

avec les notations $y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$, $y'_2 = \frac{dy_2}{dx_2}$, $y' = \frac{dy}{dx}$.

Écrivons la dernière ainsi

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{y'}.$$

et appelons $\rho$ la valeur commune des deux rapports ; $\rho$ sera proportionnel à la valeur algébrique du vecteur MP qui va du point M au point courant P de la droite, et nous aurons

$$X = x + \rho, \qquad Y = y + \rho y'.$$

En portant ces valeurs dans les équations des deux autres tangentes, nous aurons deux nombres $\rho_1$ et $\rho_2$ proportionnels à MA′ et MB′,

$$\rho_1(y' - y'_1) + y - y_1 - y'_1(x - x_1) = 0,$$
$$\rho_2(y' - y'_2) + y - y_2 - y'_2(x - x_2) = 0.$$

Séparons ces équations en deux membres, divisons membre à membre et posons $\frac{\rho_1}{\rho_2} = k$, nous aurons finalement la relation

$$k\frac{y' - y_1}{y - y_2} = \frac{y - y_1 - y_1(x - x_1)}{y - y_2 - y_2(x - x_2)}.$$

Passons maintenant aux coordonnées polaires adjointes au système $x$, $y$, et désignons par $r$ et $\theta$ les coordonnées polaires du point M, par $r_1$ et $\theta$ celles du point A et enfin par $r_2$ et $\theta$ celles du point B; nous aurons

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

puis,

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta,$$
$$dy = dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta,$$

$$\text{et} \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}, \quad \text{avec} \quad r' = \frac{dr}{d\theta}.$$

De même $x_1 = r_1\cos\theta$, $y_1 = r_1\sin\theta$, etc.

Le second membre de la relation trouvée antérieurement s'écrit alors

$$\frac{(r - r_1)\sin\theta(r'_1\cos\theta - r_1\sin\theta) - (r - r_1)\cos\theta(r'_1\sin\theta + r_1\cos\theta)}{(r - r_2)\sin\theta(r'_2\cos\theta - r_2\sin\theta) - (r - r_2)\cos\theta(r'_2\sin\theta + r_2\cos\theta)},$$

il se réduit à $\frac{r_1(r - r_1)}{r_2(r - r_2)}$.

Le premier membre devient

$$k\frac{(r'\sin\theta + r\cos\theta)(r'_1\cos\theta - r_1\sin\theta) - (r'_1\sin\theta + r_1\cos\theta)(r'\cos\theta - r\sin\theta)}{(r'\sin\theta + r\cos\theta)(r'_2\cos\theta - r_2\sin\theta) - (r'_2\sin\theta + r_2\cos\theta)(r'\cos\theta - r\sin\theta)},$$

il se réduit à $$k\frac{rr'_1 - r'r_1}{rr'_2 - r'r_2}.$$

La relation elle-même devient donc

$$k\frac{rr'_1 - r'r_1}{rr'_2 - r'r_2} = \frac{r_1(r - r_1)}{r_2(r - r_2)},$$

ou

$$k(rr'_1 - r'r_1)r_2(r - r_2) = (rr'_2 - r'r_2)r_1(r - r_1).$$

Divisons maintenant les deux membres par $r^2$, nous obtiendrons

$$k\mathrm{D}\frac{r_1}{r}.r_2(r - r_2) = \mathrm{D}\frac{r_2}{r}.r_1(r - r_1),$$

ou enfin

$$k\frac{\mathrm{D}\frac{r_1}{r}}{\frac{r_1}{r}\left(1 - \frac{r_1}{r}\right)} = \frac{\mathrm{D}\frac{r_2}{r}}{\frac{r_2}{r}\left(1 - \frac{r_2}{r}\right)}.$$

Si nous posons, pour abréger, $\frac{r_1}{r} = u$, $\frac{r_2}{r} = v$, et que nous revenions à la notation différentielle, cette équation s'écrit

$$k\frac{du}{u(1 - u)} = \frac{dv}{v(1 - v)},$$

ou

$$k\left(\frac{du}{u} + \frac{du}{1 - u}\right) = \frac{dv}{v} + \frac{dv}{1 - v}.$$

Sous cette forme, elle est immédiatement intégrable et nous donne

$$k\mathrm{L}\frac{u}{1-u} = \mathrm{L}\frac{\mathrm{C}v}{1-v},$$

C étant une constante arbitraire.

Finalement $r$ est donné en fonction de $\theta$ par l'équation

$$\frac{u^k}{(1-u)^k} = \frac{\mathrm{C}v}{1-v}.$$

Cas particuliers. — Si l'on suppose que la tangente est toujours parallèle à celle de la courbe (B), $k$ est nul (puisque $\rho_2$ est toujours infini) et l'on a $\frac{\mathrm{C}v}{1-v} = 1$, ou $\frac{r}{r_2} = \mathrm{c^{te}}$, ce qui montre bien que la courbe cherchée est homothétique à la courbe (B).

Si l'on suppose que la tangente passe toujours au point de rencontre des deux autres, $k = 1$ et l'on a la solution particulière

$$\frac{u}{1-u} = \frac{\mathrm{C}v}{1-v},$$

qui donne $r$ linéairement

$$\frac{r_1}{r-r_1} = \frac{\mathrm{C}r_2}{r-r_2},$$

d'où

$$r(\mathrm{C}r_2 - r_1) = r_1 r_2(\mathrm{C}-1).$$

**2.** Il nous reste à étudier la seconde question, celle que l'on obtient en remplaçant les deux tangentes aux courbes (A) et (B), en A et B, par leurs parallèles à l'origine. Alors les équations des deux premières droites sont remplacées par

$$\mathrm{Y} - y'_1\mathrm{X} = 0,$$
$$\mathrm{Y} - y'_2\mathrm{X} = 0,$$

et les segments MA′ et MB sont proportionnels aux valeurs de $\rho$ fournies par les deux équations

$$\rho_1(y' - y'_1) + y - y'_1 x = 0,$$
$$\rho_2(y' - y'_2) + y - y'_2 x = 0.$$

La relation entre la fonction $y$ et $x$ est alors

$$k\frac{y' - y'_1}{y' - y'_2} = \frac{y - y'_1 x}{y - y'_2 x}.$$

En passant aux coordonnées polaires et en gardant les notations de la première partie, le second membre de la relation devient

$$\frac{\sin\theta(r'_1\cos\theta - r_1\sin\theta) - \cos\theta(r'_1\sin\theta + r_1\cos\theta)}{\sin\theta(r'_2\cos\theta - r_2\sin\theta) - \cos\theta(r'_2\sin\theta + r_2\cos\theta)}$$

ou $\frac{r_1}{r_2}$.

La relation entre $r$ et $\theta$ est donc dans le cas actuel

$$k\frac{rr'_1 - r'r_1}{rr'_2 - r'r_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

ou

$$kr_2(rr'_1 - r'r_1) = r_1(rr'_2 - r'r_2).$$

Divisons les deux membres par $r^2$ et remarquons que $\frac{rr'_1 - r'r_1}{r^2}$ est la dérivée de $\frac{r_1}{r}$, nous

aurons

$$kr_2 D\frac{r_1}{r} = r_1 D\frac{r_2}{r}.$$

ou enfin

$$k\frac{D\frac{r_1}{r}}{\frac{r_1}{r}} = \frac{D\frac{r_2}{r}}{\frac{r_2}{r}}.$$

Posons encore pour abréger, $\frac{r_1}{r} = u$, $\frac{r_2}{r} = v$, nous aurons finalement l'équation différentielle $k\frac{du}{u} = \frac{dv}{v}$, et nous en conclurons, en intégrant,

$$kLu = LCv.$$

ou

$$Cv = u^k,$$

C étant une constante arbitraire. Cette équation donne $r$ en fonction de $\theta$, et la question est résolue pour chaque valeur de $k$.

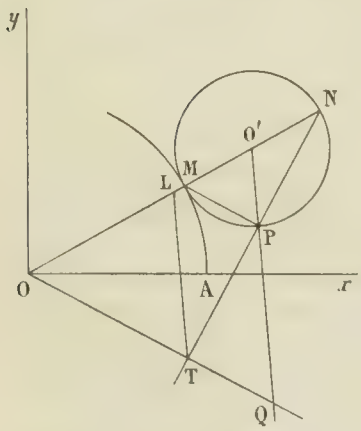
Ici, encore, comme dans le problème précédent, nous trouvons à chaque fois une infinité de solutions.

Bonnes solutions de MM. Parrod et J. Haag.

---

**1272.** — *Trouver la podaire d'une épicycloïde ordinaire par rapport au centre du cercle fixe.*

Soient O le cercle fixe, O′ le cercle mobile qui roule sans glissement sur le cercle fixe ; soient en outre M le point de contact, P le point décrivant l'épicycloïde ordinaire et A la position initiale du point P quand il est en contact avec le cercle fixe.




Nous prendrons comme axe des $x$ le diamètre OA, orienté de O vers A, comme axe des $y$ le diamètre perpendiculaire, orienté dans un sens tel que l'angle $xOy = +\frac{\pi}{2}$ si l'on prend comme sens positif le sens de marche du point de contact sur le cercle fixe, et nous appellerons $\theta$ l'angle décrit par le rayon de contact dans le cercle fixe, $\varphi$ l'angle décrit par le rayon de contact dans le cercle mobile.

Nous aurons les coordonnées du point P en projetant OP ou, ce qui revient au même, le contour OO′P sur les axes.

Projetons d'abord sur $Ox$ : la projection de OO′ est

$$(R + R')\cos\theta :$$

celle de O′P est $R'\cos(\pi - \theta - \varphi)$ : donc

$$x = (R + R')\cos\theta - R'\cos(\theta + \varphi).$$

De même, en projetant sur $Oy$, nous aurons

$$y = (R + R')\sin\theta - R'\sin(\theta + \varphi).$$

D'autre part, le mouvement ayant lieu sans glissement, les chemins décrits par le point de contact sur les deux cercles sont égaux et nous pouvons écrire $R\theta = R'\varphi$, d'où $\theta = \frac{R'}{R}\varphi$ ; en posant

$\frac{R'}{R} = k$, les équations de l'épicycloïde seront

$$(1)\quad \begin{cases} x = (R + R')\cos k\varphi - R'\cos(k+1)\varphi, \\ y = (R + R')\sin k\varphi - R'\sin(k+1)\varphi. \end{cases}$$

Ces équations dépendent d'un paramètre arbitraire $\varphi$; quand $\varphi$ varie de 0 à $2\pi$, elles donnent la portion de l'épicycloïde qui correspond à une rotation complète du cercle mobile. Cette branche de courbe se reproduit indéfiniment : il suffit de la faire tourner autour du point O d'un angle égal à $2k\pi$ pour avoir la seconde branche, puis d'un angle encore égal à $2k\pi$ pour avoir la troisième branche, et ainsi de suite. Si $k$ est commensurable et égal à $\frac{n}{p}$, $n$ et $p$ étant premiers entre eux, au bout de $p$ rotations nécessaires d'amplitude $2k\pi$, la branche revient se placer sur la première et la courbe est fermée ; elle est algébrique, comme on le voit sans peine.

On démontre sans peine aussi que la tangente en P est la droite PN ou, ce qui est équivalent, que la normale en P est la droite MP : il suffit de former l'équation de la tangente ou celle de la normale. Nous ne ferons pas ce calcul.

La podaire relative au point O s'obtiendra donc en abaissant de O une perpendiculaire OT sur PN et en cherchant le lieu du point T.

Or, OT est parallèle à MP et dans un rapport constant avec MP ; les projections de OT seront donc connues dès que nous connaîtrons celles de MP, car le rapport $\frac{OT}{MP}$ est visiblement égal à $\frac{R + 2R'}{2R'}$. Quant aux projections de MP, elles s'obtiennent immédiatement en retranchant de $x$ et de $y$ les projections de OM sur les axes, c'est-à-dire $R\cos\theta$ et $R\sin\theta$ ; les projections de MP sont donc

$$R'\cos\theta - R'\cos(\theta + \varphi),$$

et

$$R'\sin\theta - R'\sin(\theta + \varphi);$$

donc celles de T sont

$$(2)\quad \begin{cases} x = \frac{R + 2R'}{2}[\cos k\varphi - \cos(k+1)\varphi], \\ y = \frac{R + 2R'}{2}\sin k\varphi - \sin(k+1)\varphi. \end{cases}$$

Ce sont les équations de la podaire ; elle est algébrique ou transcendante dans les mêmes cas que l'épicycloïde, algébrique si $k$ est commensurable, transcendante si $k$ est incommensurable.

La géométrie va nous renseigner aisément sur la nature de ce lieu. Joignons T au milieu de ON, au point L ; nous voyons de suite que LT est parallèle à O'P et a une grandeur constante, la moitié de ON ; donc si on prolonge OT jusqu'à son point de rencontre en Q avec le rayon O'P, on voit que O'Q est constant aussi et égal à OO', PQ est donc égal à R et le point Q décrit une épicycloïde allongée dont les boucles intérieures passent toutes au point O.

Le point T décrit l'épicycloïde allongée qu'on obtient en prenant la figure homothétique de celle-ci dans le rapport $\frac{OL}{OO'} = \frac{R + 2R'}{2R + 2R'}$.

Lucien ORLANDO,

élève de l'Académie militaire de Turin.

Bonnes solutions : MM. Michel Constandaki : J. Haag : E.-N. Barisien : Janosy.

**1276.** — *On considère deux points M et M′ d'une ellipse situés aux extrémités de deux diamètres conjugués et les deux droites Δ et Δ′ symétriques du grand axe par rapport aux tangentes en M et M′.*

*Trouver le lieu du point de rencontre de ces droites quand le point M se déplace sur l'ellipse donnée.*

*Même question en remplaçant la tangente en M et la tangente en M′ par les normales.*

**1.** Nous supposerons que l'ellipse soit rapportée à ses axes et ait pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

et nous désignerons par $\varphi$ l'anomalie excentrique du point M ; l'équation de la tangente en ce point est alors

$$\frac{x \cos\varphi}{a} + \frac{y \sin\varphi}{b} - 1 = 0.$$

Désignons par $\alpha$ et 0 les coordonnées d'un point quelconque de $Ox$ et par $x$, $y$ les coordonnées du point symétrique par rapport à la tangente en M, nous aurons à exprimer que le milieu de deux points est sur la tangente et que la droite qui les joint est perpendiculaire à cette tangente ; cela nous donnera les deux relations

$$\frac{(\alpha + x)\cos\varphi}{a} + \frac{y \sin\varphi}{b} - 2 = 0,$$

et

$$\frac{y}{x - \alpha} = \frac{a \sin\varphi}{b \cos\varphi},$$

entre lesquelles il nous suffira d'éliminer $\alpha$ pour avoir l'équation de la droite Δ ; nous trouvons ainsi

$$2abx \sin\varphi \cos\varphi + (a^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi)y - 2a^2b \sin\varphi = 0.$$

L'équation de la droite Δ′ se déduit de celle-ci en y changeant $\varphi$ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$ ; ceci nous donne

$$-2abx \sin\varphi \cos\varphi + (a^2 \cos^2\varphi - b^2 \sin^2\varphi)y - 2a^2b \cos\varphi = 0.$$

Ajoutons et retranchons ces deux équations ; nous avons successivement

$$c^2 y = 2a^2b(\sin\varphi + \cos\varphi),$$

$$4abx \sin\varphi \cos\varphi = (a^2 + b^2)y \cos 2\varphi + 2a^2b(\sin\varphi - \cos\varphi).$$

en portant la valeur de $y$ dans la seconde équation et en simplifiant, nous obtenons aisément la valeur de $x$. Les équations paramétriques du lieu sont donc

$$(1) \quad \begin{cases} x = \dfrac{a(\cos\varphi - \sin\varphi)(a^2 + b^2)\sin\varphi\cos\varphi + b^2}{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}, \\[2ex] y = \dfrac{2a^2b(\sin\varphi + \cos\varphi)}{c^2}. \end{cases}$$

Pour obtenir l'équation cartésienne de ce lieu, nous écrivons

$$\sin\varphi + \cos\varphi = \frac{c^2 y}{2a^2 b},$$

et nous élevons cette relation au carré, nous obtenons ainsi

$$\sin\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{c^4 y^2}{4a^4 b^2} - 1\right);$$

cette valeur, portée dans $x$, nous donne ensuite

$$\cos\varphi - \sin\varphi = \frac{x}{a} \frac{c^4 y^2 - 4a^4 b^2}{c^2(a^2 + b^2)y^2 - 4a^4 b^2};$$

et le calcul s'achève en écrivant que

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 + (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 = 2.$$

Toutes simplifications faites, l'équation cherchée est

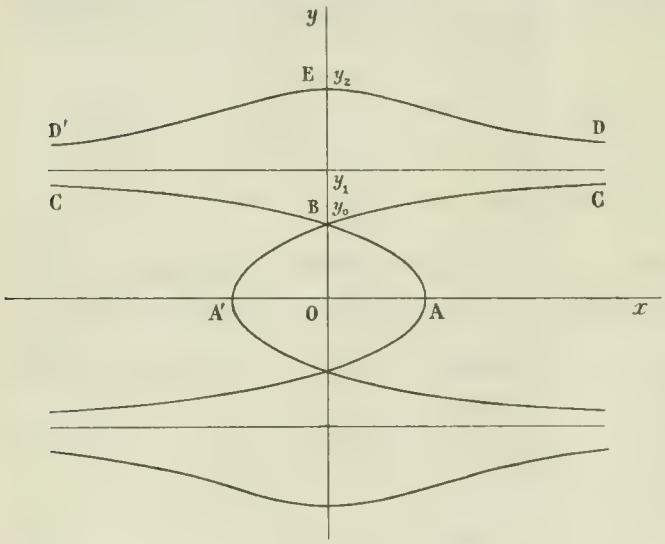
$$(2) \qquad 4a^2b^2x^2(c^4y^2 - 4a^4b^2)^2 = (8a^4b^2 - c^4y^2)[c^2(a^2+b^2)y^2 - 4a^4b^2]^2.$$

Elle représente une courbe du sixième degré ayant pour asymptotes doubles les droites

$$y = \pm\frac{2a^2b}{c^2},$$

et comprise tout entière entre les deux droites $y = \pm\dfrac{2\sqrt{2}a^2b}{c^2}$.

Cette courbe admet l'origine pour centre, les deux axes pour axes de symétrie, et pour points doubles les deux points $x = 0$, $y = \pm\dfrac{2a^2b}{c\sqrt{a^2+b^2}}$; elle a en outre deux sommets sur $Ox$, les points $x = \pm a\sqrt{2}$, $y = 0$. En remarquant enfin que les trois nombres $\dfrac{2a^2b}{c\sqrt{a^2+b^2}}$, $\dfrac{2a^2b}{c^2}$, $\dfrac{2\sqrt{2}a^2b}{c^2}$ sont classés par ordre de grandeur croissante, il est facile de placer cette courbe : la figure ci-contre en donne la forme telle que les remarques précédentes le suggèrent.




Il est d'ailleurs aisé de vérifier cette forme à l'aide des deux équations paramétriques. Posons, à cet effet, $t = \sin\varphi\cos\varphi$, nous aurons

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{1+2t},$$
$$\cos\varphi - \sin\varphi = \sqrt{1-2t}.$$

puis,

$$x = \frac{a}{c^2}\sqrt{1-2t}\,\frac{(a^2+b^2)t + b^2}{t},$$

$$y = \frac{2a^2b}{c^2}\sqrt{1+2t}:$$

ces équations montrent d'une façon évidente les diverses symétries de la courbe, et, en outre, que $t$ ne peut varier que de $-\dfrac{1}{2}$ à $+\dfrac{1}{2}$. Il nous suffira donc de construire dans cet intervalle la portion de la courbe qui correspond aux valeurs arithmétiques des deux radicaux.

Pour $t = -\dfrac{1}{2}$, $y$ est nul et $x$ égal à $a\sqrt{2}$ ; la branche étudiée part du point A.

Pour $t = -\dfrac{b^2}{a^2+b^2}$, $x$ devient nul et $y$, égal à $y_0 = \dfrac{2a^2b}{c\sqrt{a^2+b^2}}$ : le point qui décrit la ligne arrive en B.

Pour $t = -\infty$, $x = -\infty$ et $y = y_1 - \varepsilon' = \dfrac{2a^2b}{c^2} - \varepsilon'$ ; le point vient à l'infini sur l'asymptote supérieure, mais au-dessous, en C.

Pour $t = +\varepsilon$, $x = +\infty$, $y = y_1 + \varepsilon'' = \frac{2a^2b}{c^2} + \varepsilon$, $y$ est plus grand que $y_1$ : le point passe au-dessus de l'asymptote, en D.

Enfin, pour $t = \frac{1}{2}$, $x = 0$, $y = y_2 = \frac{2\sqrt{2}a^2b}{c^2}$ : le point vient en E sur $Oy$.

Ces résultats sont encore confirmés par l'étude des variations des deux fonctions $x$ et $y$ : $y$ est visiblement croissante et la dérivée de $x$, étant toujours négative, montre que celle-ci est toujours décroissante.

2. Nous appliquerons la même méthode au problème obtenu en remplaçant les tangentes en M et en M′ par les normales en ces points, et nous obtiendrons d'abord, pour équations des analogues de $\Delta$ et $\Delta'$,

$$2ab \sin\varphi \cos\varphi x + (a^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi) y - 2bc^2 \sin\varphi \cos^2\varphi = 0,$$
$$-2ab \sin\varphi \cos\varphi x + (a^2 \cos^2\varphi - b^2 \sin^2\varphi) y - 2bc^2 \cos\varphi \sin^2\varphi = 0;$$

puis, pour équations paramétriques du nouveau lieu,

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{(\cos\varphi - \sin\varphi)(a^2 + b^2)\sin\varphi\cos\varphi + a^2}{a}, \\ y = 2b \sin\varphi \cos\varphi (\cos\varphi + \sin\varphi). \end{cases}$$

En posant, comme précédemment,

$$t = \sin\varphi \cos\varphi,$$

nous avons ensuite

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{1-2t}}{a}(a^2 + b^2)t + a^2, \\ y = 2bt\sqrt{1-2t}. \end{cases}$$

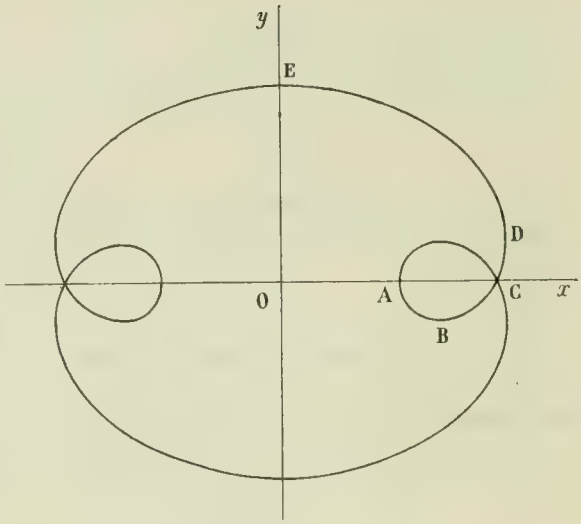
Il est assez difficile d'obtenir l'équation cartésienne du lieu et nous nous contenterons des équations (4) pour étudier sa forme. Elles nous montrent immédiatement que les deux axes de coordonnées sont deux axes de symétrie et que $t$ doit varier de $-\frac{1}{2}$ à $+\frac{1}{2}$. D'autre part, les dérivées de $x$ et de $y$ sont

$$x' = \frac{b^2 - 3t(a^2 + b^2)}{a\sqrt{1-2t}},$$

$$y' = \frac{2b(1+3t)}{\sqrt{1+2t}},$$

et les valeurs particulières de $t$ sont $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $0$, $\frac{b^2}{3(a^2+b^2)}$, $\frac{1}{2}$. Nous avons donc immédiatement le tableau ci-après :

| $t$ | $x'$ | $x$ | $y'$ | $y$ | $\frac{y'}{x'}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{c^2}{a\sqrt{2}}$ | | 0 | $-\infty$ |
| | + | cr. | — | déc. | — |
| $-\frac{1}{3}$ | | | 0 | $-\frac{2b}{3\sqrt{3}}$ (*min.*) | 0 |
| | + | cr. | + | cr. | + |
| 0 | | $a$ | | 0 | $\frac{2a}{b}$ |
| | + | cr. | + | cr | + |
| $\frac{b^2}{3(a^2+b^2)}$ | 0 | *Max.* | | | $+\infty$ / $-\infty$ |
| | — | déc. | + | cr. | — |
| $\frac{1}{2}$ | | 0 | | $b\sqrt{2}$ | 0 |




Dès lors rien n'est plus simple que de tracer la courbe ; nous n'insisterons pas davantage.

PARROD.

Solutions satisfaisantes : MM. R. Bouvaist, J. Haag.

## PHYSIQUE

**1278.** — *Dans la machine de Linde, l'air, qu'on supposera puisé dans l'atmosphère à la température de 0°, est comprimé à 200 atmosphères puis détendu à 20 atmosphères. Dans cette opération, une fraction $x$ de l'air se liquéfie. L'air non liquéfié et supposé ramené à 0° par échange de chaleur avec le courant d'air inverse est comprimé de nouveau, à température constante, de 20 à 200 atmosphères et on lui ajoute de l'air atmosphérique, que l'on porte également à 200 atmosphères, pour compenser le départ de celui qui s'est liquéfié, puis on détend, et ainsi de suite.*

*Sachant que la machine fournit un demi-kilogramme d'air liquide par cheval-heure, on demande de déterminer $x$.*

Soit $m$ la masse d'air puisée dans l'atmosphère, comprimée à $200^{\text{atm}}$ puis détendue à $20^{\text{atm}}$. La partie non liquéfiée, $m(1-x)$, est reprise à la pression $p_1 = 20^{\text{atm}}$, son volume est $v_1 = \frac{m(1-x)}{\sigma_1}$ où $\sigma_1 = \frac{p_1}{p_0}\sigma_0$, $p_0$ désignant la pression atmosphérique et $\sigma_0$ la masse spécifique correspondante, c'est-à-dire $\frac{1}{773}$ en unités C. G. S. Le travail dû à la compression, supposée isotherme, jusqu'à $p_2 = 200^{\text{atm}}$, est

$$w_1 = p_1 v_1 \text{ log. nép. } \frac{p_2}{p_1}.$$

La partie liquéfiée $mx$ est remplacée par une masse égale qu'on doit porter de $p_0$ à $p_2$ ; son

volume initial est $v_0 = \frac{mx}{\sigma_0}$ et le travail de compression jusqu'à $p_2$ est

$$w_2 = p_0 v_0 \text{ log. nép. } \frac{p_2}{p_0}.$$

Le travail total est

$$w = w_1 + w_2 = p_0 \frac{m(1-x)}{\sigma_0} \text{log. nép. } \frac{p_2}{p} + p_0 \frac{mx}{\sigma_0} \text{ log. nép. } \frac{p_2}{p_1} = p_0 \frac{m}{\sigma_0} \left( \text{log. nép. } \frac{p_2}{p_1} + x \text{ log. nép } \frac{p_1}{p_0} \right).$$

Pendant une heure,

$$mx = 500,$$

$$w = 3600 \times 75 \times 1000 \times 981 \times 100,$$

d'autre part $$p_1 = 76 \times 13,6 \times 981.$$

Les log. nép. peuvent être remplacés par les log. vulg. divisés par le module 0,4343.

On trouve finalement

$$x = 0,036.$$

J. JANOSY, à Budapest.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1334.** — On considère les triangles ABC inscrits dans une ellipse et dont les hauteurs sont normales à l'ellipse en des points autres que A, B, C.

1° Le cercle circonscrit à un de ces triangles rencontre l'ellipse en un quatrième point D. Prouver que l'orthocentre H du triangle ABC est le point de Frégier relatif à la normale en D à l'ellipse.

2° Trouver les lieux de l'orthocentre H, du centre de gravité G, et du centre $\omega$ du cercle circonscrit, quand le triangle ABC varie. Trouver l'enveloppe des côtés de ce triangle.

VASNIER.

**1335.** — Par les pieds de quatre normales menées d'un point M à une ellipse passent deux paraboles. Montrer que si le point M décrit une courbe quelconque, les axes des deux paraboles se déplacent parallèlement à eux-mêmes et leur point d'intersection décrit une courbe du même degré.

J. G. NICOLESCO, à Bucharest.

**1336.** — Un moteur développant une puissance utile de $\frac{1}{100}$ de cheval fait tourner une machine électrique dont l'un des pôles est au sol et l'autre en communication avec une batterie de 3 condensateurs réunis en cascade et dont les capacités sont respectivement $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$ et $\frac{3}{100}$ de microfarad. La dernière armature de la batterie est au sol et les deux armatures extrêmes sont reliées d'autre part à un excitateur dont la distance explosive correspond à une différence de potentiel de 8500 volts. Cet excitateur fournit 5 étincelles par seconde. Calculer la chaleur dégagée en une seconde par les frottements de la machine.

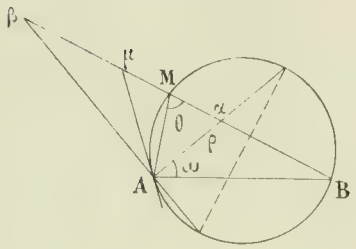
On sait que le cheval-vapeur représente 75 kilogrammètres par seconde.

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**1251.** — *Soient* AB *une corde fixe d'un cercle donné et* M *un point variable sur la circonférence de ce cercle. Trouver et construire les courbes lieux des pieds des bissectrices intérieures et extérieures des angles* A *et* B *du triangle* MAB.

Il est évident d'abord que rien ne distingue le point A du point B et que le lieu relatif à A est le même que le lieu relatif à B. Figurons alors le triangle MAB qui correspond à une position du point M et ses deux bissectrices ; puis, menons la médiane du triangle $\alpha A\beta$, la droite $A\mu$. Le triangle $\alpha A\beta$ étant rectangle en A, nous avons $A\mu = \mu\alpha = \mu\beta$ ; d'ailleurs la division $MB\alpha\beta$ étant harmonique, nous avons aussi




$$\overline{\mu\alpha}^2 = \mu M . \mu B ;$$

donc

$$\overline{\mu A}^2 = \mu M . \mu B.$$

Il en résulte que $\mu A$ est tangente au cercle en A, $\mu A$ est donc une droite fixe. Alors nous menons par le point B, fixe sur AB, une sécante $B\mu$ qui rencontre l'autre côté de l'angle fixe $BA\mu$ en $\mu$, et nous prenons sur cette sécante, à partir du point $\mu$, deux longueurs égales à $\mu A$, $\mu\alpha = \mu\beta = \mu A$ ; donc le lieu des points $\alpha$, $\beta$ est une strophoïde oblique, ayant son point double en A.

Ce résultat est d'ailleurs évident par le calcul, car, si nous prenons AB comme axe polaire et que nous désignions $A\alpha$ par $\rho$, AB par $a$, $\widehat{BA\alpha}$ par $\omega$ et $\widehat{AMB}$ par $\theta$, le triangle $\alpha AB$ nous donne

$$\frac{\rho}{\sin(2\omega + \theta)} = \frac{a}{\sin(\omega + \theta)} ;$$

par suite,

$$\rho = a\frac{\sin(2\omega + \theta)}{\sin(\omega + \theta)} .$$

Telle est l'équation du lieu : on vérifiera facilement que c'est une strophoïde ayant un point double en A et son asymptote parallèle à $A\mu$, à une distance de cette droite, et de l'autre côté, égale à la distance de B à $A\mu$.

R. BOUVAIST.

Bonne solution : M. J. Haag, élève de l'École normale supérieure.

---

**1255.** — *On considère un cercle* C *et un point* A *fixes. On prend sur le cercle* C *deux couples de points diamétralement opposés* PP′, QQ′. *Enveloppe des droites* PQ, *lorsque les couples de droites* AP AP′ ; AQ, AQ′ *ont les mêmes bissectrices.*

Prenons pour axes deux diamètres rectangulaires du cercle, le point $A(a, 0)$ étant situé sur $Ox$, et désignons par $y - mx = 0$ l'équation de la droite PP′, par $y - m'x = 0$ l'équation de la droite QQ′.

Si nous portons les axes parallèlement à eux-mêmes au point A, c'est-à-dire si nous changeons $x$

en $x+a$, l'équation de la droite PP' devient $y-m(x-a)=0$, celle du cercle, qui était $x^2+y^2-R^2=0$, devient $(x-a)^2+y^2-R^2=0$

ou
$$x^2+y^2-2ax+a^2-R^2=0.$$

Nous aurons l'équation quadratique des rayons qui joignent le point A aux points de rencontre du cercle avec la droite PP', en éliminant la variable d'homogénéité entre les deux équations, ce qui donne

$$m^2a^2(x^2+y^2-2a^2m(x+y)-m(x+a)^2+(a^2-R^2)(y-mx)^2=0,$$

ou

$$-R^2m^2x^2+2R^2mxy+(a^2+a^2m^2-R^2)y^2=0.$$

Le faisceau des bissectrices de ce couple est

$$x^2+2\lambda xy-y^2=0.$$

$\lambda$ étant déterminé par la condition que les racines de cette seconde équation divisent harmoniquement celles de la première, c'est-à-dire par la condition que $ac'+ca'-2bb'=0$ ; ce calcul donne

$$\lambda=\frac{a^2(1+m^2)-R^2(1-m^2)}{2R^2m}.$$

En répétant les mêmes calculs pour la droite QQ' on trouve

$$\lambda=\frac{a^2(1+m'^2)-R^2(1-m'^2)}{2R^2m'}.$$

Il n'y a plus qu'à égaler ces deux valeurs de $\lambda$ pour avoir la relation qui doit exister entre $m$ et $m'$. Cette relation est

$$(R^2+a^2)mm'-R^2-a^2=0.$$

Cela posé, appelons $ux+vy+w=0$ l'équation de la droite PQ, les deux rayons OP et OQ seront donnés par

$$a^2(x^2+y^2)-(R^2(ux+vy)^2=0,$$

et le produit de leurs coefficients angulaires par

$$mm'=\frac{a^2-R^2u^2}{a^2-R^2v^2};$$

en portant cette valeur dans la relation précédente, nous aurons

$$a^2(R^2+a^2)+v^2(R^2-a^2)-2w^2=0.$$

Cette relation entre $u$, $v$ et $w$ exprime que la droite est tangente à la conique

$$\frac{x^2}{R^2+a^2}+\frac{y^2}{R^2-a^2}-\frac{1}{2}=0,$$

c'est donc là l'enveloppe de la droite PQ.

J. HAAG, élève de l'École normale supérieure et Mlle THIÉRY, lycée de Nancy.

Bonnes solutions : MM. Michel ; Dnallor Lecram ; J. Roda.

**1273.** — *On considère toutes les coniques qui ont un foyer donné* F *et qui passent par deux points fixes* A *et* B.

1° *Le lieu du centre de ces coniques se compose de deux coniques homofocales ;*

2° *Le lieu des sommets de l'axe focal se compose de deux quartiques ;*

3° *La directrice relative au foyer* F *passe par un point fixe.*

Nous prendrons pour axe des $x$ la droite AB et pour axe des $y$ une perpendiculaire menée à AB en son milieu ; nous désignerons par $x_0$, $y_0$ les coordonnées du point F et par $\pm a$ les abscisses des points A et B.

Cela étant, l'équation générale des coniques ayant pour foyer le point F est

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (lx + my + h)^2;$$

écrivons que ces coniques passent par les points A et B, pour cela faisons dans cette équation $y = 0$ et écrivons que l'équation obtenue

$$x^2(1 - l^2) - 2x(x_0 + lh) + x_0^2 + y_0^2 - h^2 = 0$$

admet pour racines $+a$ et $-a$, c'est-à-dire que son premier membre est proportionnel à $x^2 - a^2$. Ceci nous donne

$$x_0 + lh = 0, \qquad a^2l^2 + h^2 - (x_0^2 + y_0^2 + a^2) = 0.$$

De la première nous tirons $h = -\frac{x_0}{l}$, et en portant cette valeur dans la seconde nous obtenons

$$a^2l^4 - l^2(a^2 + x_0^2 + y_0^2) + x_0^2 = 0.$$

Remplaçons de même $h$ par $-\frac{x_0}{l}$ dans l'équation générale des coniques ; nous avons

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{1}{l^2}[l^2x + lmy - x_0]^2.$$

Nous poserons $l^2 = k$, $lm = \lambda$, de sorte que l'équation des coniques peut s'écrire

$$(1) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{1}{k}[kx + \lambda y - x_0]^2,$$

$\lambda$ étant un paramètre variable, et $k$ une constante définie par l'équation

$$(2) \qquad a^2k^2 - k(a^2 + x_0^2 + y_0^2) + x_0^2 = 0.$$

Cette équation admet deux racines réelles positives séparées par le nombre 1. En donnant à $k$ successivement ces deux valeurs, l'équation (1) représente deux familles de coniques.

1. Le centre de la conique (1) est défini par les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} x - x_0 = kx + \lambda y - x_0, \\ y - y_0 = \frac{\lambda}{k}[kx + \lambda y - x_0]; \end{cases}$$

et nous aurons le lieu du centre en éliminant $\lambda$ entre ces deux équations. En les divisant membre à membre nous avons

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{k}{\lambda} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{k(y - y_0)}{x - x_0},$$

et nous n'avons plus qu'à remplacer $\lambda$ par cette valeur dans la première des équations (3), ce qui nous donne

$$(k - 1)x(x - x_0) + ky(y - y_0) = 0.$$

Cette équation représente une conique circonscrite au rectangle formé par les axes de coordonnées et par les perpendiculaires à ces droites menées par le point F.

Si nous remplaçons $k$ successivement par les deux racines $k_1$ et $k_2$ de l'équation (2) nous obtenons les équations de deux coniques, et en supposant $0 < k_1 < 1 < k_2$, nous voyons que la conique relative à $k_1$ est une hyperbole et que l'autre est une ellipse.

Reste à montrer que ces deux coniques sont homofocales.

Transportons l'origine des coordonnées au centre commun $\frac{x_0}{2}$, $\frac{y_0}{2}$, l'équation devient

$$(k-1)\left(x^2 - \frac{x_0^2}{4}\right) + k\left(y^2 - \frac{y_0^2}{4}\right) = 0,$$

ou

$$(k-1)x^2 + ky^2 - \frac{k(x_0^2 + y_0^2) - x_0^2}{4} = 0.$$

Comme $k$ est racine de l'équation (2), on a

$$k(x_0^2 + y_0^2) - x_0^2 = a^2k(k-1),$$

de sorte que l'équation de la conique peut s'écrire

$$(k-1)x^2 + ky^2 - \frac{a^2k(k-1)}{4} = 0,$$

ou

$$\frac{4x^2}{a^2k} + \frac{4y^2}{a^2(k-1)} - 1 = 0.$$

Quel que soit $k$ les foyers de cette conique ont pour coordonnées $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = 0$. Ces points sont les milieux de FA et FB.

**2.** L'axe focal de la conique

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{1}{k}(kx + \lambda y - x_0)$$

est la perpendiculaire abaissée du foyer $(x_0, y_0)$ sur la directrice $kx + \lambda y - x_0 = 0$; par suite l'équation de cet axe est

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{\lambda}.$$

Nous en tirons $\lambda = \frac{k(y - y_0)}{x - x_0}$, et en portant cette valeur dans l'équation de la conique, nous obtenons le lieu des sommets situés sur l'axe focal. Nous trouvons ainsi

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{1}{k}\left[kx + \frac{ky(y - y_0)}{x - x_0} - x_0\right]^2,$$

ou

$$(x - x_0)^2(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{1}{k}[kx(x - x_0) + ky(y - y_0) - x_0(x - x_0)]^2,$$

ou, en transportant l'origine au point $(x_0, y_0)$,

$$kx^2(x^2 + y^2) - k(x^2 + y^2) + (k-1)xx_0 + kyy_0]^2 = 0.$$

A chaque valeur de $k$ racine de l'équation (3) correspond une quartique circulaire admettant un point double au point F. Le lieu se compose donc de deux quartiques.

3. La directrice $kx - ky - x_0 = 0$ passe par le point fixe $x = \frac{x_0}{k}$, $y = 0$ : il en résulte que les directrices de toutes les coniques d'une même famille correspondant à une valeur de $k$ passent par un point fixe.

DNALLOR LECRAM.

**Remarques géométriques.** — **1**. Considérons une conique (C) ayant pour foyer le point F et passant par les points A et B, et cherchons le lieu du deuxième foyer F'.

Si la conique (C) est une ellipse on a

$$FA + F'A = FB + F'B,$$

on en déduit

$$F'A - F'B = FB - FA.$$

Soit (H) l'hyperbole qui a pour foyers les points A et B et qui passe par le point F. Cette dernière égalité prouve que le point F' est situé sur la branche de l'hyperbole (H) qui ne passe pas par le point F.

Supposons maintenant que la conique (C) soit une hyperbole, nous aurons

$$FA - F'A = FB - F'B \qquad \text{ou bien} \qquad FA - F'A = F'B - FB,$$

suivant que les points A et B sont ou non sur la même branche.

Nous en déduirons

$$F'A - F'B = FA - FB \qquad \text{ou bien} \qquad F'A + F'B = FA + FB.$$

La première égalité montre que le point F' est situé sur la branche de (H) qui passe par le point F, et la deuxième que le point F' appartient à l'ellipse (E) qui a pour foyers les points A et B et qui passe par le point F.

On conclut de là que le lieu du point F' se compose des deux coniques homofocales (E) et (H) ; le lieu du centre des coniques (C) est homothétique de celui-ci par rapport au point F, le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{2}$.

**2**. Soient D et D' les points où les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{AFB}$ rencontrent AB. Si les points A et B sont sur une même branche de la conique (C), la directrice de cette conique passe par le point D', tandis que si ces points sont sur des branches différentes, la directrice passe par le point D.

R. BOUVAIST et J. HAAG.

---

**1274.** — *On considère un parallélogramme* ABCD *et deux paraboles variables, l'une tangente en A à* AC *et ayant pour diamètre* OA, *l'autre tangente en* B *à* BC *et ayant pour diamètre* OB ; *on suppose en outre que ces deux paraboles sont tangentes en un point* M, *et l'on désigne par* P *le point de rencontre de la tangente en* M *avec l'autre tangente commune. Démontrer que la tangente en* M *passe par un point fixe et trouver les lieux décrits par les points* M *et* P.

Prenons pour axes des $x$ et des $y$ les droites BA et BC, et désignons par $a$ et $b$ les coordonnées du point D. Les équations des deux paraboles sont de la forme

$$(1) \qquad y^2 - 2p(x - a) = 0, \qquad x^2 - 2p'(y - b) = 0.$$

Les coordonnées $x, y$ du point M doivent satisfaire à ces deux équations et à la suivante qui

exprime que les coefficients angulaires des tangentes en ce point aux deux courbes sont égaux :

$$\frac{p}{y} = \frac{x}{p'} \qquad \text{ou} \qquad xy = pp'.$$

Nous aurons l'équation du lieu du point M en remplaçant dans cette dernière équation $p$ et $p'$ respectivement par leurs valeurs $\frac{y^2}{2(x-a)}$, $\frac{x^2}{2(y-b)}$ tirées des équations (1). Il vient ainsi, après suppression du facteur $xy = 0$, qui correspond à $pp' = 0$ c'est-à-dire aux paraboles dégénérées des faisceaux (1),

$$xy = 4(x-a)(y-b),$$

ou

$$3xy - 4bx - 4ay + 4ab = 0.$$

Cette équation représente une hyperbole (H) passant en A et en C et par le symétrique de B par rapport à D. Elle a ses asymptotes parallèles aux axes et admet pour centre l'homothétique de D par rapport à B dans le rapport $\frac{4}{3}$.

La tangente en M à la première parabole par exemple a pour équation

$$Yy - pX + x - 2a = 0.$$

Or on a

$$p = \frac{y^2}{2(x-a)}, \qquad y = \frac{4b(x-a)}{3x-4a};$$

en portant ces valeurs dans l'équation de la tangente, elle devient

$$(2) \qquad x(3Y-2b) - 4aY - 2bX + 4ab = 0$$

Sous cette forme on voit que la tangente au point M passe par le point fixe L qui a pour coordonnées $\frac{2a}{3}$ et $\frac{2b}{3}$ ; c'est le centre de gravité du triangle ACD.

La deuxième tangente commune a une équation de la forme

$$Y = mX - a + \frac{p}{2m}.$$

Si on exprime qu'elle est la tangente à la deuxième parabole dont l'équation tangentielle est $p'u^2 - 2v(bv + w) = 0$, on obtient pour déterminer $m$ l'équation

$$p'm^2 - 2am^2 - 2bm + p = 0.$$

Cette équation doit admettre comme racine double le coefficient angulaire de la tangente en M qui est $\frac{p}{y}$, ce qu'il est d'ailleurs facile de vérifier directement en remplaçant $p$, $p'$ et $y$ par leurs valeurs en fonction de $x$. La troisième racine est donc $-\frac{p}{p'}\frac{y^2}{p^2}$ ou $-\frac{y^2}{pp'}$.

Par suite, la deuxième tangente commune a pour équation

$$Y = -\frac{y^2}{pp'}(X-a) - \frac{p^2p}{2y^2}.$$

ou

$$Y = -\frac{y}{x}(X-a) - \frac{px}{2y},$$

ou enfin

$$(3) \qquad x^2(3Y+b) - 4x(aY - bX + ab) - 4ab(X-a) = 0.$$

En éliminant $x$ entre les équations (2) et (3), on aura le lieu du point L. On obtient ainsi

$$(3Y+b)(2aY+bX-2ab)^2 - 2(3Y-2b)(2aY+bX-2ab)(aY-bX+ab) - ab(X-a)(3Y-2b)^2 = 0$$

En transportant l'origine au point L $\left(\frac{2a}{3}, \frac{2b}{3}\right)$ et simplifiant, cette équation s'écrit

$$(bx + ay)(3xy + bx + ay) = 0.$$

Le lieu se décompose donc en une droite parallèle à AC et passant par le point L et en une hyperbole (H') homothétique de (H) par rapport à L dans le rapport $-\frac{1}{2}$. La droite correspond au cas où M vient en L, comme on le constate en faisant $x = \frac{2a}{3}$ dans (2) et (3). Celles-ci se réduisent toutes deux à $3(bX + aY) - 4ab = 0$, ce qui est l'équation de la droite précédente par rapport à l'ancien système d'axes. Dans ce cas, les deux paraboles sont osculatrices en M. Ce cas étant écarté, le véritable lieu est l'hyperbole H'.

J. HAAG, élève de l'École normale supérieure.

Bonnes solutions par MM. R. Bouvaist et Dnallor Lecram.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**1338.** — On considère la strophoïde oblique dont l'équation cartésienne en axes rectangulaires est

$$(S) \qquad (x^2 + y^2)(y - mx) = a(x^2 - y^2).$$

Si $m$ varie, le lieu du point de rencontre de la courbe avec son asymptote est une strophoïde droite. Trouver en outre le lieu du point de rencontre de la perpendiculaire abaissée du point double de S sur l'asymptote: 1° avec la courbe S; 2° avec l'asymptote. Calculer l'aire de ces deux derniers lieux géométriques.

E. N. Barisien.

**1339.** — D'un point M variable sur un cercle donné de centre O, on mène une tangente à un autre cercle également donné et de centre O'. Soit M' le point de contact.

Trouver et construire le lieu du point de rencontre des droites MO et M'O'.

N. Abramescu, à Bucarest.

**1340.** — Un rectangle ABCD a une diagonale fixe AC, tandis que l'autre tourne autour de son milieu O. Trouver les lieux décrits par les orthocentres des triangles AOB, BOC, COD, DOA.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

QA
1
R486
année 13-
14

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
~~Serials~~

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY